24/08/20

Docente: Jaime Salvador Medina González [redacted]

Materia: Ecuaciones Diferenciales

Nombre: Joel Alejandro Espinoza Sánchez

Carrera: ICI

Grupo: 5° A

Asesorías: 13:00 a 14:00 hrs

Edificio 26 o Teams

Criterio de evaluación

Reglas para examen escrito

- Utilizar solo hoja blanca tamaño carta
- Utilizar lápiz HB o pluma punto mediano
- Escanear o sacar fotos de forma vertical
- Subir el archivo de respuestas como pdf

IMPORTANTE: Revisar el protocolo para exámenes en línea

Unidad 1

Introducción

Si $f(x)$ se deriva, $f'(x)$ es una nueva función

Función	Derivada	Observación
$y(x)=e^x$	$\frac{dy}{dx}=e^x$	$\frac{dy}{dx}=y$
$y(x)=e^{x^2}$	$\frac{dy}{dx}=2xe^{x^2}$	$\frac{dy}{dx}=2xy$
$y(x)=x^2e^x$	$\frac{dy}{dx}=x^2e^x+2xe^x$	$\frac{dy}{dx}=2xe^x+y$

Vemos que dada una función $y(x)=f(x)$ obtenemos una ecuación en la que están involucradas la función original y su derivada. A ésta le llamaremos ecuación diferencial

Dada una ecuación diferencial, nosotros debemos encontrar "la función" para satisfacer la ecuación

Clasificación de las E.D.

- Si una E.D. la función desconocida depende de una sola variable, la ecuación es una ecuación diferencial ordinaria

  Si en una E.D la función desconocida depende de dos o más variables, se trata de una ecuación diferencial parcial

03/09/20

Ecuación Diferencial	Tipo	Orden	Variable independiente	Variable dependiente	Parámetros
$\frac{dy}{dx} - xy = x\cos(x)$	EDO	1	x	y	–
$y'' - 5y' + 6y = 0$	EDO	2	x	y	–
$y'' = \operatorname{sen}(y)$	EDO	2	x	y	–
$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} = 10$	EDP	2	x, y	V	–
$\frac{d^2y}{dx^2} - 4\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 + 5y = x^4$	EDO	2	x	y	–
$y''' - 2y' + 4y = \cos(x)$	EDO	3	x	y	–
$10\frac{di}{dt} + Ri = E$	EDO	1	t	i	$R, E \in \mathbb{R}$
$L\frac{di}{dt} + Ri = E$	EDO	1	t	i	$L, R, E \in \mathbb{R}$
$\frac{dp}{dt} = ap - bp^2$	EDO	1	t	p	a, b

Veamos que
$$\frac{dy}{dx} = 2x$$
$$y(x) = x^2 + c \qquad c \in \mathbb{R} \qquad \text{es solución}$$

Con método:
$$\int y' \, dx = \int 2x \, dx$$
$$y(x) = x^2 + c$$

Ejemplo:
Resolver
$$y'' = 6x$$
$$\downarrow$$
$$y' = 3x^2 + c_1$$
$$\downarrow$$
$$y = x^3 + c_1 x + c_2$$

Sobre las soluciones
Definición:
Una solución de una ecuación diferencial de orden n es una función que tiene n derivadas en un intervalo I y que al sustituirla en dicha E.D. se obtiene una identidad

Clasificación de soluciones
- Si una solución de una ED de orden n tiene n constantes arbitrarias, decimos que es la solución general de la ED
- Si una solución de una ED de orden n no contiene constantes arbitrarias y puede obtenerse a partir de la solución general dando valores específicos a las constantes, decimos que es solución particular de la ED

a) Muestra que $y(x) = x^3 + c_1 x + c_2$ es solución general de la ED de orden 2
$$\frac{d^2y}{dx^2} = 6x$$
$$\frac{dy}{dx} = 3x^2 + c_1$$
$$y = x^3 + c_1 x + c_2$$

b) Obtenga tres soluciones particulares de dicha ED
$y = x^3 + 2x + 1$ $\qquad$ $y = x^3$ $\qquad$ $y = x^3 - 24x - 8$

$c_2(2xe^{2x}+e^{2x})$
$2c_2(2xe^{2x}+e^{2x})$

/ /

Muestre que $y(x)=3+e^{-2x}$ es solución general de la ED
$$y'+2y=6$$
$$y(x)=3+e^{-2x}$$
$$y'(x)=-2e^{-2x}$$
De todos modos se necesita una constante arbitraria, así que usemos $y(x)=3+ce^{-2x}$
$$y(x)=3+ce^{-2x}$$
$$y'(x)=-2ce^{-2x}$$
$$-2ce^{-2x}+2(3+ce^{-2x})=6$$
$$\cancel{-2ce^{-2x}}+6+\cancel{2ce^{-2x}}=6$$
$$6=6$$

Muestra que la solución
$$y(x)=c_1e^{2x}+c_2xe^{2x}$$
es solución a la ED
$$y''-4y'+4y=0$$
¿Qué tipo de solución es?

si $y(x)=c_1e^{2x}+c_2xe^{2x}$
$$y'=2c_1e^{2x}+2c_2xe^{2x}+c_2e^{2x}$$
$$y''=4c_1e^{2x}+4c_2xe^{2x}+2c_2e^{2x}+2c_2e^{2x}$$
$$=4c_1e^{2x}+4c_2xe^{2x}+4c_2e^{2x}$$

$$\cancel{4c_1e^{2x}}+\cancel{4c_2xe^{2x}}+\cancel{4c_2e^{2x}}\cancel{-8c_1e^{2x}}\cancel{-8c_2xe^{2x}}\cancel{-4c_2e^{2x}}+\cancel{4c_1e^{2x}}+\cancel{4c_2xe^{2x}}$$
$0=0$ Correcto

08-09-20

Problemas de valor inicial y de valor en la frontera

Definición de problemas de valor inicial (PVI)

Es aquel que busca una solución a una ecuación diferencial de orden n sujeto a n condiciones sujeto a n condiciones sobre la función desconocida y sus n-1 derivadas especificadas en un valor de la variable independiente. A éstas se les llama condiciones iniciales

Definición de problemas de valor en la frontera (PVF)

Es aquel que busca encontrar una solución de la ecuación diferencial de orden n sujeta a n condiciones especificadas únicamente en la función desconocida en n valores de la variable independiente

Llamaremos condiciones de frontera a estas condiciones

Ejemplos

Resolver
$$y'' - 5y' + 6y = 0$$
Sujeta a
$$\left.\begin{array}{l} y(1) = 3 \\ y'(1) = 2 \end{array}\right\} \text{PVI}$$

Resolver
$$y'' - 5y' + 6y = 0$$
Sujeta a
$$\left.\begin{array}{l} y(0) = 3 \\ y(2) = 1 \end{array}\right\} \text{PVF}$$

Ejemplo:

Como: $y(x) = 3 + ce^{-2x}$ es solución general de
$$\frac{dy}{dx} + 2y = 6$$

Resolver el PVI
$$\frac{dy}{dx} + 2y = 6$$
sujeto a $y(0) = 5$

Como $\frac{dy}{dx} + 2y = 6$ tiene de solución general:
$$y = 3 + ce^{-2x}$$

Sustituimos
$$5 = 3 + ce^{-2(0)}$$
$$5 = 3 + ce^{0}$$
$$5 = 3 + c$$
$$2 = c$$

El PVI se resuelve con la solución particular
$$y = 3 + 2e^{-2x}$$

~~Mostremos que~~ $\cancel{y(x)}$

Muestre que $y(x) = xe^{2x}$ es solución del PVI
$$y'' - 4y' + 4y = 0$$
sujeto a
$$y(0) = 0$$
$$y'(0) = 1$$

Veamos que
$$y = (0)e^{2(0)}$$
$$= (0)(1)$$
$$= (0) \checkmark$$

Y ahora
$$y' = 2xe^{2x} + e^{2x}$$
$$y'' = 4xe^{2x} + 2e^{2x} + 2e^{2x}$$
$$= 4xe^{2x} + 4e^{2x}$$

$$\frac{A}{y} + \frac{B}{4-y}$$
$$y = \frac{e^{4x+c}}{4 - \left(\frac{e^{4x+c}}{4+y}\right)}$$
$$4A - 4Ay + By$$

Comprobemos que

$$4xe^{2x}+4e^{2x}-8xe^{2x}-4e^{2x}+4xe^{2x}=0$$

Como

$$y'=2xe^{2x}+e^{2x}$$

Vemos:

$$y'=2(0)e^{2(0)}+e^{2(0)}$$
$$=2(0)(1)+1$$
$$=0+1$$
$$=1$$

Cumple las condiciones

Soluciones implícitas

Observemos el siguiente problema

Muestre que

$$x^2+y^2=9 \quad (1)$$

es solución a la ED

$$\frac{dy}{dx}=\frac{-x}{y}$$

(1) es una circunferencia

Descomponemos

$$y_1=\sqrt{9-x^2} \qquad x\in[-3,3]$$
$$y_2=-\sqrt{9-x^2}$$

$y_1'=$

$$y_2=-(9-x^2)^{1/2}$$
$$y_2'=-\frac{1}{2}\cdot(9-x^2)^{-1/2}$$
$$y_2'=-\frac{1}{2\sqrt{9-x^2}}\cdot-2x \qquad x\in(-3,3)$$
$$-\frac{-2x}{2\sqrt{9-x^2}}=\frac{-x}{-\sqrt{9-x^2}}$$
$$\frac{x}{\sqrt{9-x^2}}=\frac{-x}{-\sqrt{9-x^2}}$$

Sí es identidad

Similarmente veríamos que en y_1 esto no ocurre

Muestre que $y=\cos(xy)$ es solución implícita de la ED

$$\left(1+x\,\mathrm{sen}(xy)\right)\frac{dy}{dx}+\mathrm{sen}(xy)\,y=0$$

Derivemos

$y' = -y'[\text{sen}(xy) + x\,\text{sen}(xy)]$

$y' =$

$y' = -\text{sen}(xy)\cdot(y + xy')$

$y' = -y\,\text{sen}(xy) - xy'\,\text{sen}(xy)$

$y' + xy'\,\text{sen}(xy) = -y\,\text{sen}(xy)$

$y'[1 + x\,\text{sen}(xy)] = -y\,\text{sen}(xy)$

$y'[1 + x\,\text{sen}(xy)] + y\,\text{sen}(xy) = 0$

$\frac{dy}{dx}[1 + x\,\text{sen}(xy)] + y\,\text{sen}(xy) = 0$

$\therefore$ sí es solución implícita

Ecuaciones lineales y no lineales

Se dice que una ED de orden n es lineal sí puede escribirse de la forma

$$a_n(x)\frac{d^n y}{dx^n} + \dots + a_2(x)\frac{d^2 y}{dx^2} + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x), \quad x \in I$$

donde los coeficientes $a_n(x), \dots, a_2(x), a_1(x)$ y $g(x)$ son funciones definidas en I

$a_n(x)$ no debe ser idéntica a 0 en I

Generalmente los coeficientes $a_j(x)$ y $g(x)$ son funciones continuas en I

De no escribirse como anteriormente es no lineal

Casos particulares

ED lineal de primer orden

$$a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x)$$

ED lineal de orden 2

$$a_2(x)\frac{d^2 y}{dx^2} + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x)$$

Clasifique las siguientes ED's en lineal y no lineal

1- $\frac{dy}{dx} + 3y = 2\cos(x)$

$a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x)$

/ /

Si

$a_1(x) = 1$
$a_0(x) = 3$
$g(x) = 2\cos(x)$

La ED es de orden 1 y lineal

2- $\frac{dy}{dx} = 4y - y^2$

$\frac{dy}{dx} - 4y = -y^2$

$a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x)$

Una ED no puede estar elevada a ninguna potencia las y's o sus derivadas

Veamos y^2

La ED no es lineal

Clasifique las siguientes ED's en lineal o no lineal

1- $y\frac{dy}{dx} + 3e^x y = 9e^{3x}$

ED no lineal de orden 1 $\longrightarrow$ Por $y\frac{dy}{dx}$

2- $x^2y'' - 3xy' + 4x = \ln(x)$

ED lineal de orden 2

3- $\frac{dy}{dx} = \sqrt{y}$

ED no lineal de orden 1

! ¿Que pasaría si $\frac{dy}{dx} = \sqrt{x}$? ¿Es lineal? Porque no hay y

4- $\frac{dP}{dt} = aP - bP^2$

ED no lineal de orden 1

5- $\frac{dT}{dt} = -k(T - T_m)$, $k, T_m \in \mathbb{R}$

! $\frac{dT}{dt} + kT = kT_m$

ED lineal de orden 1

6- $y'' = \text{sen}(y)$

ED no lineal de orden 2

14 / 09 / 20

$a_0(x)$ $a_1(x)$ y $g(x)$ dependen únicamente de x y no de y

Ecuaciones diferenciales separables

Decimos que la ED de primer orden

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y)$$

es separable si puede expresarse en forma

$$\frac{dy}{dx} = g(x) \cdot h(y)$$

donde

$g(x)$ depende únicamente de x
$h(x)$ depende únicamente de y

Veamos

$$\frac{dy}{dx} = 3x - 6xy$$
$$= \underbrace{3x}_{g(x)}\underbrace{(1-2y)}_{h(y)}$$

Ejemplos

Determinar si son separables

1- $\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$ Sí es
$$= -x\left(\frac{1}{y}\right)$$

2- $\frac{dy}{dx} = y$
$$= 1(y)$$ Sí es

5- $$\frac{dy}{dx} = \frac{xy^2 - 2xy + x}{x^2y - x^2}$$
$$= \frac{(x)\ y^2 - 2y + 1}{(x^2)(y-1)}$$
$$= \frac{1}{x} \cdot \frac{y^2 - 2y + 1}{y-1}$$
$$= \underbrace{\frac{1}{x}}_{g(x)} \cdot \underbrace{y-1}_{h(y)}$$ Sí es

3- $\frac{dT}{dt} = -k(T - Tm)$ Sí es
$$= -kT - kTm$$
$$= \underbrace{1}_{g(t)}\underbrace{(kT - kTm)}_{h(T)}$$
ó $$\underbrace{-k}_{g(t)}\underbrace{(T - Tm)}_{h(T)}$$

4- $\frac{dP}{dt} = P^2 - 2P$
$$= \underbrace{1}_{g(t)}\underbrace{(P^2 - 2P)}_{h(P)}$$ Sí es

$-1 = \frac{-x}{-x}$ $y' = -1$ $2x + 2yy' = 0$

$2yy' = -2x$, $y' = \frac{-2x}{2y} = \frac{-x}{y}$

/ /

$\frac{dy}{dx} = 2x - 3y$ No es $\frac{dy}{dx} = \frac{x-y}{x+y}$ No es

Encuentre la solución general de

1- $\frac{dy}{dx} = \frac{-x}{y}$ Es separable

$y\,dy = -x\,dx$

Al integrar

$\frac{y^2}{2} = \frac{-x^2}{2} + c \longrightarrow \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} = c_1$

$y^2 = -x^2 + c$ Sea $c = 2c_1$

$y = -x$ $x^2 + y^2 = c$

Solución implícita

Encuentre la solución general de

$\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} = \frac{1}{x}$

Encuentre la sol particular que cumple con $y(1) = 3$

$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x} - \frac{y}{x}$

$\frac{dy}{dx} = \frac{1-y}{x}$

$\frac{dy}{1-y} = \frac{dx}{x}$

$\int \frac{1}{1-y}\,dy = \int \frac{1}{x}\,dx$

$u = 1-y$ $v = x$

$du = -dy$ $dv = dx$

$-\int \frac{1}{1-y}(-dy) = \int \frac{dx}{x}$

$-\ln|1-y| = \ln|x| + c$

$0 = \ln|x| + \ln|1-y| + c$

$-c = \ln|x - xy|$

Si $x = 1$ y $y = 3$

$\ln|x - xy| = c$

Elevando con e $|x - xy| = c$

$c = \pm 2$

$\sin(u)\,du$ $\quad u = x^2 \quad du = 2x$

$e^u\,du \quad u = 2y \quad du = 2$

$u = 12y \quad du = 12\,dy$

$dv = e^{2y}dy \quad v = \frac{e^{2y}}{2} + c$

21/09/20

Encuentre la solución del PVI

$$(x-1)\frac{dy}{dx} = y \qquad \text{sujeta a } y(0) = 2$$

Respuesta

Veamos si la ED es separable

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x-1}\cdot y \qquad \checkmark \text{ si es}$$

Separamos

$$\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x-1}$$

$$\ln|y| = \ln|x-1| + c$$

$$|y| = c|x-1|$$

Como queremos si $y = 2$ cuando $x = 0$

$$2 = c(0-1)$$

$$2 = c(-1)$$

$$\therefore c = -2 \implies \text{¡ ¿Por qué no } 2\text{?}$$

Encuentre la solución general de la ED

$$12y\frac{dy}{dx} = x\,\text{sen}(x^2)\,e^{-2y}$$

Como $\frac{dy}{dx} = x\,\text{sen}(x^2)\cdot\frac{e^{-2y}}{12y}$ es separable

Separamos

$$12y\cdot e^{2y}\,dy = x\,\text{sen}(x^2)\,dx$$

Por partes:

$$\int 12y\cdot e^{2y}dy = 6ye^{2y} - \int 6e^{2y}$$

$$= 6ye^{2y} - 3e^{2y}$$

~~Por partes~~

$$\int x\,\text{sen}(x^2)\,dx$$

$$-\frac{\cos(x^2)}{2}$$

$$6ye^{2y} - 3e^{2y} = -\frac{\cos(x^2)}{2} + c$$

$$6e^{2y}\left(y - \frac{1}{2}\right) = -\frac{\cos(x^2)}{2} + c$$

$$6ye^{2y} - 3e^{2y} + \frac{\cos(x^2)}{2} = c \implies \text{Solución general implícita}$$

22/09/20

Ecuaciones Diferenciales con Parámetros

Encuentra la solución del PVI

$$\frac{dy}{dx} = -ay + b \qquad a, b \in \mathbb{R} \qquad \text{sujeto a } y(0) = 0$$

$\ln|-1(2y-3)|$

$u = 3-2y$
$du = -2\,dy$

/ /

Usando el método de la Transferencia

$a = 2 \qquad b = 3$

$\frac{dy}{dx} = -2y + 3$ sujeto a $y(0) = 0$

$\frac{dy}{3-2y} = dx$

Integrando

$-\frac{1}{2} \cdot \ln|3-2y| = x + c$

$\ln|3-2y| = -2x + c$

$|3-2y| = e^{-2x} e^{c}$

$|3-2y| = ce^{-2x}$

$3-2y = \pm ce^{-2x}$

$-2y = -3 \pm ce^{-2x}$

$y = \frac{-3 \pm ce^{-2x}}{-2}$

$y = \frac{3 \pm ce^{-2x}}{2}$

Ahora con $y = 0$ $x = 0$

$0 = \frac{3 + c(1)}{2}$

$0 = \frac{3}{2} + c$

$c = -\frac{3}{2}$

y regresamos 3 como b
y 2 como a

Resolver

$\frac{dy}{dx} = \frac{-x}{y}$ sujeto a $y(0) = -3$

$y\,dy = -x\,dx$

$\frac{y^2}{2} = \frac{-x^2}{2} + c$

$\frac{x^2 + y^2}{2} = c$

$x^2 + y^2 = c$

$0^2 + (-3)^2 = c$

$0 + 9 = c$

$\therefore c = 9$

Scribe

20 L
10 L

5L + 10L

24 / 09 / 20

Ecuaciones Diferenciales Lineales de Primer Orden

Recordemos

Una ED de primer orden es lineal si puede escribirse de la forma

$$a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)\,y = g(x) \qquad x \in I$$

Ejemplo

$$e^{2x}\frac{dy}{dx} + 2e^{2x}\,y = 6e^{3x} \qquad (1)$$

ED lineal de primer orden

Veamos que (1) no es separable

Necesitaremos un nuevo método

Veamos que

$$\underbrace{e^{2x}\frac{dy}{dx} + 2e^{2x}\,y}_{\text{Es la derivada de un producto}} = 6e^{3x}$$

Así:

$$\frac{d(e^{2x}\cdot y)}{dx} = 6e^{3x}$$

Al integrar

$$e^{2x}y = 2e^{3x} + c$$

$$y = \frac{2e^{3x} + c}{e^{2x}}$$

$$= 2e^{x} + \frac{c}{e^{2x}}$$

$$y = 2e^{x} + ce^{-2x} \qquad c \in \mathbb{R}$$

El factor integrante

Es un factor por el que se debe multiplicar una ED lineal escrita en la forma

$$\frac{dy}{dx} + p(x)\,y = h(x)$$

y está dado por

$$m(x) = e^{\int p(x)\,dx}$$

Veamos que

$$\frac{dy}{dx} + 2y = 6e^{x} \rightarrow m(x) = e^{\int 2\,dx} = e^{2x}$$

$$e^{2x}\left(\frac{dy}{dx} + 2y = 6e^{x}\right) = e^{2x}\frac{dy}{dx} + 2e^{2x}y = 6e^{3x}$$

y resolvemos igual que

25/09/20

Si tenemos

$$a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)\,y = g(x)$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} + \frac{a_0(x)}{a_1(x)}\,y = \frac{g(x)}{a_1(x)}$$

$$\frac{dy}{dx} + p(x)\,y = h(x)$$

si $p(x) = \frac{a_0(x)}{a_1(x)}$, $h(x) = \frac{g(x)}{a_1(x)}$

$\downarrow$

Forma normal

Resolver

$$\frac{dy}{dx} + 2xy = 6x$$

$e^{\int 2x}$ $\qquad \int 2x\,dx = x^2$

Tendremos:

$$\exp(x^2)\frac{dy}{dx} + \exp(x^2)[2xy] = \exp(x^2)[6x]$$

$$\frac{d[\exp(x^2)[y]]}{dx} = 6\exp(x^2)\,x$$

Al integrar

$$\exp(x^2)[y] = 3\exp(x^2) + c$$

$$y = \frac{3\exp(x^2) + c}{\exp(x^2)}$$

$$= 3 + \exp(-x^2)$$

28-09-20

Encuentre la solución general de

$$\frac{dy}{dx} + \frac{3}{x}y = \frac{\cos(x)}{x^2}$$

Como $\frac{3}{x}$, $\frac{\cos(x)}{x^2}$ no son continuas en 0 tomaremos el intervalo $(0,\infty)$

El factor integrante de la ED lineal es $e^{\int \frac{3}{x}dx}$: $e^{3\ln|x|}$

Como estamos trabajando en el intervalo $(0,\infty)$, x es positiva

$$\mu(x) = e^{3\ln x}$$

$$\exp(\ln x^3)$$

$$x^3$$

Multiplicamos por $\mu(x)$.

$\int u\,dv = uv - \int v\,du$

19 / 09 / 20

$x \operatorname{sen} x - \int \operatorname{sen}(x)$

L	u	dv
A	x	$\cos(x)$
T	1	$\operatorname{sen}(x)$
E	du	✓

dv

$$x^3\left[\frac{dy}{dx} + \frac{3}{x}y = \frac{\cos(x)}{x^2}\right]$$

$$x^3\frac{dy}{dx} + 3x^2 y = x\cos(x)$$

$$\frac{d(x^3\cdot y)}{dx} = x\cos(x)$$

Al integrar

$$x^3 y = x\operatorname{sen}(x) + \cos(x) + c$$

$$y = \frac{\operatorname{sen}(x)}{x^2} + \frac{\cos(x)}{x^3} + \frac{c}{x^3} \quad \text{en} \quad (0, \infty)$$

PVI con este metodo

Resolver el PVI

$$x\frac{dy}{dx} - y = x^2 e^x \qquad \text{sujeto a} \qquad y(1) = e$$

Forma normal:

$$\frac{dy}{dx} - \frac{1}{x}\cdot y = xe^x \qquad \text{en} \quad (0, \infty)$$

Multiplicamos por $\exp(-\ln x)$

$\exp(\ln x^{-1})$

x^{-1}

$\frac{1}{x}$

$$\frac{1}{x}\cdot\frac{dy}{dx} - \frac{1}{x^2}y = e^x$$

$$\frac{d(x^{-1}\cdot y)}{dx} = e^x$$

Al integrar

$$x^{-1}\cdot y = e^x + c$$

$$y = xe^x + cx$$

Y en $x = 1$, $y = e$ tenemos

$$e = (1)e^1 + c(1) \qquad \therefore \quad c = 0$$

$$y = xe^x$$

30 / 09 / 20

Encuentre la solución del PVI

$$\frac{dy}{dx} = -ay + b \quad \text{con} \quad y(0) = 0 \quad a, b \in \mathbb{R}^+$$

$$\frac{dy}{dx} + ay = b$$

$$e^{ax}\frac{dy}{dx} + ae^{ax}y = e^{ax}b$$

$$\frac{d(e^{ax}\cdot y)}{dx} = e^{ax}b$$

Al integrar

$$e^{ax}y = \frac{b}{a}\cdot e^{ax} + c$$

$$y = \frac{b}{a} + ce^{-ax}$$

Con $y = 0$ $x = 0$

$$0 = \frac{b}{a} + ce^{a0}$$

$$-\frac{b}{a} = c \qquad \therefore \quad c = -\frac{b}{a}$$

Analisis cualitativo para las ED's autónomas

Obtener la gráfica

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2}{\pi}e^{-x^2}$$

Ecuaciones diferenciales autónomas

$$\frac{dy}{dx} = f(y) \Rightarrow \text{depende únicamente de } y$$

Si

$$\frac{dy}{dx} = f(y)$$

decimos que $y = y_0$ es un punto de equilibrio de la ED si $f(y_0) = 0$

Ejemplo:

$$\frac{dy}{dy} = y^2 - 9$$

$$y^2 - 9 = 0$$

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= 3 \\ y_2 &= -3 \end{aligned}\right\} \text{Puntos de equilibrio}$$

Definimos

$$y_1(x) = 3, \quad y_2(x) = -3 \quad x \in \mathbb{R}$$

Repaso Ecuaciones Diferenciales

Tarea 1 Ejercicio 1.1

Si consideremos que $y = 5e^{x^2} - 1$

entonces $\frac{dy}{dx} = 5e^{x^2} \cdot 2x$

$= 10x \exp(x^2)$

Así, si

$$\frac{dy}{dx} - 2xy = 2x$$

entonces

$$10x \exp(x^2) - 2x[5\exp(x^2) - 1] = 2x$$
$$10x \exp(x^2) - 10x\exp(x^2) + 2x = 2x$$
$$2x = 2x$$

✓

Y vemos que

$$y = 5\exp(0^2) - 1$$
$$y = 5(1) - 1$$
$$y = 4$$ ✓

2.- $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{2y - x}$

$$y^2 - xy = c$$
$$2yy' - y - xy' = 0$$
$$2yy' - xy' = y$$
$$y'(2y - x) = y$$
$$\therefore \quad y' = \frac{y}{2y - x} \quad \boxed{//}$$

d) $\frac{dy}{dx} = xy + x - 3y - 3$

$$= x(y+1) - 3(y+1)$$
$$(x-3)(y+1)$$
$$\frac{dy}{y+1} = (x-3)\,dx$$
$$\ln|y+1| = \frac{x^2}{2} - 3x + c_1 \qquad c_1 \in \mathbb{R}$$

$$\frac{dy}{dx} = (x-5)\,y^{-2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x-5}{y^2}$$

$$y^2\,dy = (x-5)\,dx$$

Integramos

$$\frac{y^3}{3} = \frac{x^2}{2} - 5x + c$$

$$y^3 = \frac{3x^2}{2} - 15x + c$$

$$y = \sqrt{\frac{3x^2}{2} - 15x + c}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} + 2x - 1$$

$$\frac{dy}{dx} - \frac{y}{x} = 2x - 1$$

Integramos:

$$\int -\frac{1}{x}\,dx = -\ln|x| \cancel{+c}$$

$\therefore$

$$\exp(-\ln|x|)\frac{dy}{dx} - \exp(-\ln|x|)\cdot\frac{y}{x} = \exp(-\ln|x|)\,[2x-1]$$

Pero como $\exp(-\ln|x|) = \exp(\ln|x|^{-1})$

$$= |x|^{-1}$$

$$= \frac{1}{|x|}$$

entonces

$$\frac{1}{|x|}\frac{dy}{dx} - \frac{1}{|x|}\cdot\frac{y}{x} = \frac{1}{|x|}\cdot(2x-1)$$

Para $x \geq 0$

$$\frac{1}{x}\cdot\frac{dy}{dx} - \frac{y}{x^2} = \frac{2x-1}{x}$$

Para $x < 0$

$$-\frac{1}{x}\cdot\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x^2} = -\frac{2x-1}{x}$$

Al factorizar -1 vemos que es equivalente al caso $x \geq 0$

Por tanto:

$$\frac{d\left(\frac{1}{x}\cdot y\right)}{dx} = \frac{2x-1}{x}$$

Al integrar: $\frac{1}{x}\cdot y = 2x - \ln|x| + c \Rightarrow y = 2x^2 - x\ln|x| + cx$

$c \in \mathbb{R}$

Vamos a hacer el análisis cualitativo de

$$\frac{dy}{dx} = y^2 - 9$$

Buscamos $f(y)$

Aquí $f(y) = y^2 - 9$ $\therefore$ $f'(y) = 2y$

① Ahora buscaremos los puntos de equilibrio y los posibles puntos de inflexión

Los puntos de equilibrio es $f(y) = 0$

$\therefore$ $y^2 - 9 = 0$

$(y-3)(y+3) = 0$

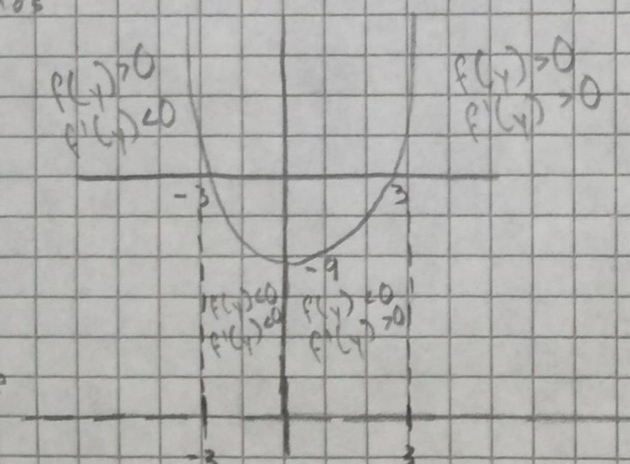
$y = 3$ $\quad y = -3$

Los posibles puntos de inflexión es $f'(y) = 0$

$\therefore$ $y = 0$

② Graficamos

③ Línea fase



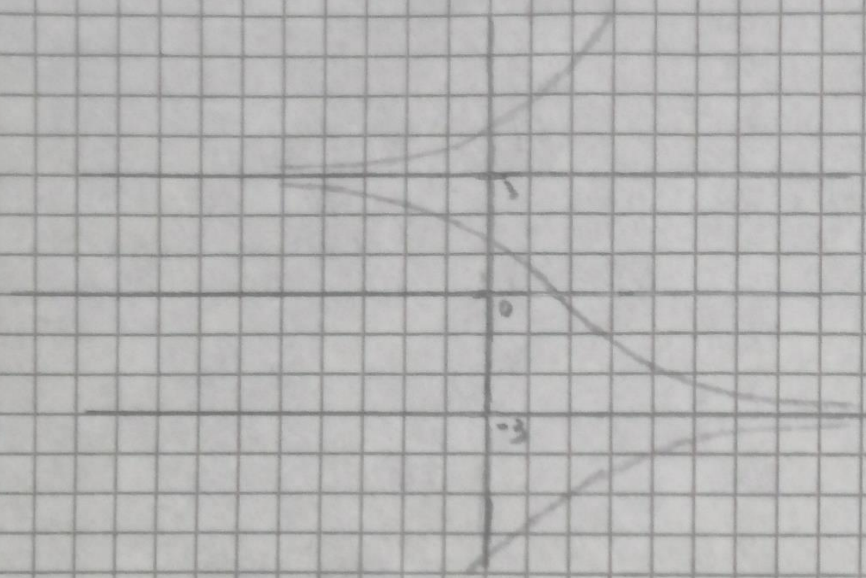
Intervalos

$(-\infty, -3)$ $(-3, 0)$ $(0, 3)$ $(3, \infty)$

④ La tabla

	Intervalos	$y' = f(y)$	$y'' = f(y) \cdot f'(y)$	$y(x)$	Forma
	$(3, \infty)$	$+$	$+ = (+)\ (+)$	creciente convexa	
$(-3,3)$	$(0,3)$	$-$	$- = (-)\ (+)$	decreciente concava	
	$(-3,0)$	$-$	$+ = (-)\ (-)$	decreciente convexa	
	$(-\infty, -3)$	$+$	$- = (+)\ (-)$	creciente concava	

Trazamos la gráfica



Comportamiento de las soluciones

$$\frac{dy}{dx} = y^2 - 9$$

$x^2 + y^2 = c^2$

$2x + 2yy' = 0$

$2yy' = -2x$

$y' = -x/y$

14 / 10 / 20

Práctica: Análisis cualitativo

Realiza el análisis cualitativo de:

$$y' = 3 - y$$

$f(y) = 3 - y$ $\therefore$ $f'(y) = -1$

Ahora buscamos

Puntos de equilibrio

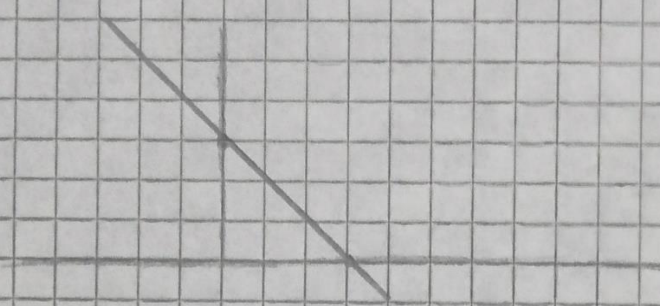
$f(y) = 0$

$0 = 3 - y$

$\therefore y = 3$

Puntos de inflexión

No tiene sentido porque no se presentan en la función



$f(y) > 0$ $f(y) < 0$

Línea fase

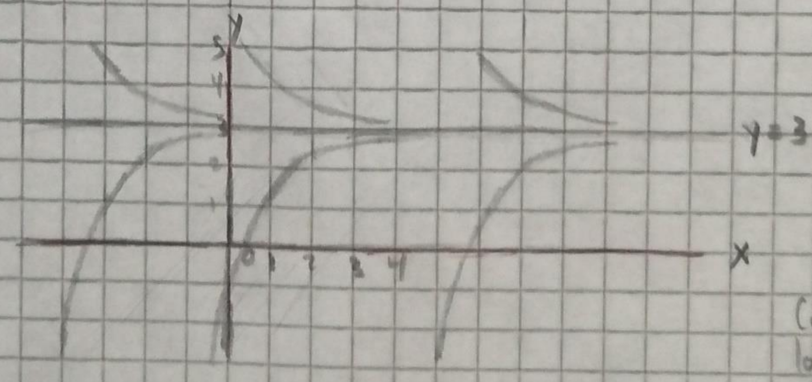
3

$(-\infty, 3)$ $(3, \infty)$

La tabla

Intervalos	$y' = f(y)$	$y(x)$	Forma
$(-\infty, 3)$	+	creciente	/
$(3, \infty)$	−	decreciente	\

Trazamos la gráfica:



Comportamiento de las soluciones

$$\frac{dy}{dx} = 3 - y$$

Practica: Análisis Cualitativo

Realizar el análisis cualitativo de

$$y' = -y^2$$

Puntos de equilibrio

$f(y) = 0$

$-y^2 = 0$

$y = 0$

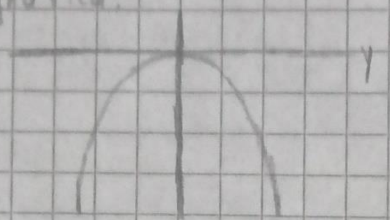
Puntos de inflexión posibles

$f'(y) = 0$

$-2y = 0$

$y = 0$

Trazamos la gráfica:



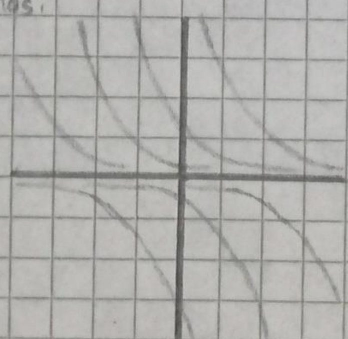
Línea fase

$f(y)<0$	0	$f(y)<0$
$f'(y)>0$		$f'(y)<0$

Analizamos:

Intervalo	$y' = f(y)$	$y'' = f(y) \cdot f'(y)$	$y(x)$	Forma
$(-\infty, 0)$	$-$	$- = - \cdot +$	Decreciente cóncava	
$(0, \infty)$	$-$	$+ = - \cdot -$	Decreciente convexa	

Finalmente graficamos:



Y vemos que es estable

19 / 10 / 20

Ley de enfriamiento de Newton

Planteamiento

Se coloca un cuerpo en un medio ambiente con la temperatura constante y se desea determinar la temperatura de dicho cuerpo conforme el tiempo transcurre

Ley

"La rapidez con la que se enfría un cuerpo (en un medio a temperatura constante) es proporcional a la distancia entre la temperatura del cuerpo y la temperatura del cuerpo y la temperatura del medio"

Variables y modelación

T Temperatura del cuerpo
t Tiempo
T_m Temperatura del medio

$$\frac{dT}{dt} = k(T - T_m)$$

Por convención

$$\frac{dT}{dt} = -k(T - T_m)$$

Modelo completo:

$$\frac{dT}{dt} = -k(T - T_m) \quad \text{sujeto a} \quad T(0) = T_0$$

Concluimos que T siempre tenderá a T_m

Análisis cualitativo

$\frac{dT}{dt} = kT_m - kT$

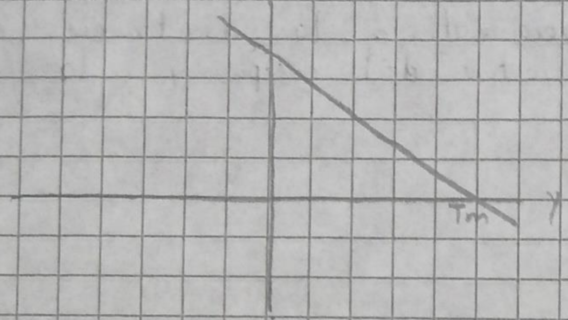
① P. E.

$kT_m - kT = 0$

$T = T_m$

② P P $\underline{T}$

② Gráfica

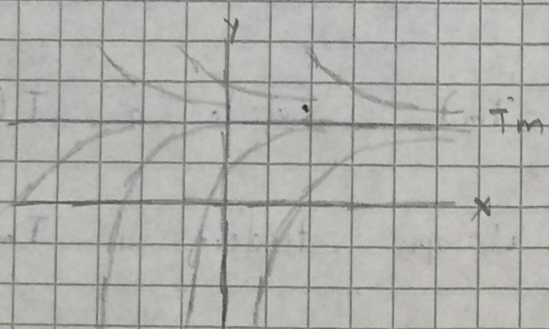


③ Intervalo $y' = f(y)$

Intervalo	$y' = f(y)$	
$(-\infty, T_m)$	+	−
(T_m, ∞)	−	+

$y(x)$	Forma
Crece	↗
Decrece	↘

Gráfica



Se descubre un cuerpo en un medio ambiente con temperatura constante de 20°C el cual presenta una temperatura de 29.44°C. Dos horas más tarde tiene 23.33°C
Determine la hora en la que falleció el individuo

t en min

$$\frac{dT}{dt} = -k(T - T_m) \quad \text{con} \quad T(0) = T_0$$

con $T(0) = 29.44$
$T(0+120) = 23.33$

$$\frac{dT}{dt} = -k(T-20)$$

$$\frac{dT}{dt} = 20k - kT$$

$$\frac{dT}{dt} + kT = 20k$$

$$e^{kt}\frac{dT}{dt} + e^{kt}kT = e^{kt}20k$$

$$\frac{d(e^{kt}\cdot T)}{dt} = e^{kt}\cdot 20k$$

$$e^{kt}\cdot T = 20e^{kt} + c$$

$$T = \frac{20e^{kt} + c}{e^{kt}}$$

$$T = 20 + ce^{-kt}$$

Si $t=0$ $T = 29.44$

$$29.44 = 20 + c(1)$$

$$\therefore c = 9.44$$

$$T = 20 + 9.44e^{-kt}$$

Si $t = 120$ $T = 23.33$

$$23.33 = 20 + 9.44e^{-k(120)}$$

$$\therefore k = 8.6832 \times 10^{-3}$$

$$k = 0.0086832$$

Si pensamos que los 37° son la temperatura
El men murió hace 45 segundos

Ley de enfriamiento

1- $\frac{dT}{dt} = -k(T - T_m)$ con $T(0) = T_0$

$T(0) = 2°C$
$T(3) = 12°C$

a) $\frac{dT}{dt} = -k(T - 25°C)$

b) $\frac{dT}{dt} = 25k - kT$

$\frac{dT}{dt} + kT = 25k$

$e^{kT} \cdot T = 25e^{kT} + c$

$T = 25 + ce^{kT}$

Ahora

$2 = 25 + ce^{0}$

$2 = 25 + c$

$-23 = c$

Y también

$12 = 25 - 23e^{kT}$

$k = -0.1901816$

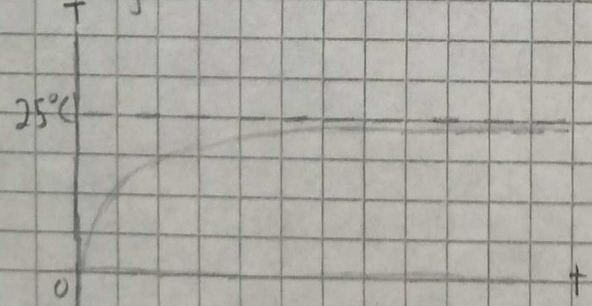
$\therefore \quad T = 25 - 23e^{-0.1901816t}$

Así $\quad 15 = 25 - 23e^{-0.1918161t}$

$t = 4.3795$

c) Tiende a 25 por lo que no existe un tiempo donde $T = 46°C$

d) Vamos algo a esto



26/10/20

Función de población tipo Malthus

Encuentre una función tipo Malthus para México con los datos

Año	1950	1960	1970	1980	1990	2000	2010
Población	25.791	34.923	48.225	66.846	81.249	97.483	112.336

Resolvemos

$$\frac{dP}{dt} = aP$$

Resolvemos para datos del 2000 y 2010

$$\frac{dP}{P} = a\,dt$$

Al integrar

$$\ln|P| = at + c$$
$$|P| = e^{at+c}$$
$$|P| = ce^{at}$$

Si en $t = 0$
$P = 97.483$

$$97.483 = c$$

Si en $t = 10$
$P = 112.336$

$$112.336 = 97.483e^{at}$$
$$\ln\left(\frac{112.336}{97.483}\right) = a(10)$$
$$\therefore \quad a = 0.014181 6$$

$$\therefore \quad P = 97.483e^{0.0141816t}$$

Si $t = 20$

$$P = 129.452$$

Modelo de Malthus

$$\frac{dP}{dt} = aP$$

Modelo logístico

$$\frac{dP}{dt} = aP - bP^2$$

$$P(t) = \frac{ac}{bc + e^{-at}}$$

$$P(t) = \frac{aP_0}{bP_0 + (a - bP_0)e^{-a(t-t_0)}}$$

Ecuaciones Diferenciales Lineales de 2° Orden

$$a_2(x)\frac{d^2y}{dx^2} + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)\,y = g(x)$$ No homogenea

$$a_2(x)\frac{d^2y}{dx^2} + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)\,y = 0$$ Homogenea

Forma normal de una ED Lineal de 2° orden no homogenea

$$\frac{d^2y}{dx^2} + p(x)\frac{dy}{dx} + q(x)y = h(x)$$

Forma normal de ... homogénea

$$\frac{d^2y}{dx^2} + p(x)\frac{dy}{dx} + q(x)y = 0$$

Nosotros resolveremos ED lineales de orden 2 con coeficientes constantes

$$a\frac{d^2y}{dx^2} + b\frac{dy}{dx} + cy = g(x)$$

Forma de la solución general

Para la homogénea

$$y_h(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

y_1 y_2 son soluciones LI de la ED

Para la no homogénea se resuelve la homogénea

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x)$$
$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + y_p(x) \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

Tarea a) Muestre que $y_1(x) = e^{2x}$, $y_2(x) = xe^{2x}$

son soluciones LI de la ED $y'' - 4y' + 4y = 0$ (1)

b) Encuentre la solución general de (1)

c) Muestre que $y_1(x) = e^{2x}$, $y_2(x) = 3e^{2x}$

son soluciones LD de (1) con ello que

$$y(x) = c_1 e^{2x} + c_2(3e^{2x})$$

no es solución de (1)

17 / 11 / 20

Repaso: Ecuaciones Diferenciales (2° Parcial)

Analisis cualitativo

1. $\frac{dy}{dx} = y^2 - 4y + 4$

① P. de equilibrio

$y^2 - 4y + 4 = 0$

$(y-2)^2 = 0$

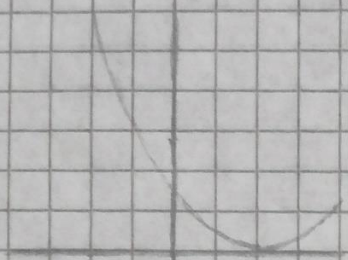
$y = 2$

P. P. de equilibrio

$2y - 4 = 0$

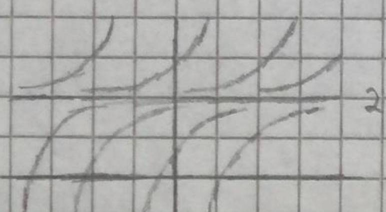
$2y = 4$

$y = 2$



Intervalos	$f(y) = y'$	$y'' = f(y) \cdot f'(y)$	$y(x)$	Forma
$(-\infty, 2)$	$+$	$- = + \quad -$	Creciente cóncava	
$(2, \infty)$	$+$	$+ = + \quad +$	Creciente convexa	

Obtenemos la gráfica:



Punto crítico semiestable

Ley de enfriamiento de Newton

Partiremos de:

$$\frac{dT}{dt} = -k(T - T_m)$$

Y debemos llegar a:

$$T = T_m + ce^{-kt}$$

Modelo de Malthus

Partiremos de:

$$\frac{dP}{dt} = aP$$

Y debemos llegar a

$$|P| = ce^{at}$$

Resolviendo la ley de enfriamiento de Newton

Tenemos

$$\frac{dT}{dt} = -k(T - T_m)$$

$$\frac{dT}{dt} = -kT + kT_m$$

$$\frac{dT}{dt} + kT = kT_m$$

Como ED lineal de primer orden resolvemos

Proponemos el factor integrante:

$$\int k\,dt = kt$$

$$\therefore \quad e^{kt}$$

Ahora

$$e^{kt}\frac{dT}{dt} + e^{kt}kT = e^{kt}kT_m$$

Observemos que:

$$\frac{d(e^{kt}\cdot T)}{dt} = e^{kt}kT_m$$

Integramos

$$e^{kt}\cdot T = T_m\int k e^{kt}\,dt$$

$$e^{kt}\cdot T = T_m e^{kt} + c$$

$$T = \frac{T_m e^{kt} + c}{e^{kt}}$$

$$T = T_m + ce^{-kt}$$

Resolviendo el Modelo de Malthus

Tenemos

$$\frac{dP}{dt} = aP$$

$$\frac{dP}{dt} - aP = 0$$

Obtenemos el factor de integración

$$\int -a \, dt = -at \Rightarrow e^{-at}$$

$$e^{-at}\frac{dP}{dt} - a e^{-at} P = e^{-at}(0)$$

Vemos que:

$$\frac{d(e^{-at} \cdot P)}{dt} = 0$$

Integramos:

$$e^{-at} \cdot P = c$$

$$P = \frac{c}{e^{-at}}$$

$$P = c e^{at}$$

$u = a - bP$
$du = -b\,dP$

/ /

Resolviendo el Modelo Logístico

Tenemos

$$\frac{dP}{dt} = aP - bP^2 \qquad \text{con} \qquad P(t_0) = P_0$$

① Resolvemos por separación de variables:

$$\frac{dP}{aP - bP^2} = dt$$

Integramos

$$\int \frac{dP}{aP - bP^2} = t + c$$

$$\downarrow$$

$$\frac{1}{P(a-bP)} \xrightarrow{\text{Proponemos}} \frac{A}{P} + \frac{B}{a-bP}$$

$$\frac{Aa - AbP + BP}{aP - bP^2} = \frac{(Aa) + (-Ab + B)P}{aP - bP^2}$$

$$\therefore \quad \begin{aligned} Aa &= 1 \\ -Ab + B &= 0 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad A = \frac{1}{a} \quad y \quad B = Ab \quad \therefore \quad B = \frac{b}{a}$$

$$\frac{1}{a}\int \frac{1}{P}\,dP + \frac{b}{a}\int \frac{\cancel{\ }}{a - bP}\,dP$$

$$\frac{\ln|P|}{a} - \frac{\ln|a - bP|}{a}$$

$$\frac{\ln\left|\frac{P}{a-bP}\right|}{a} = t + c \Rightarrow \ln\left|\frac{P}{a-bP}\right| = at + c$$

② Despejamos P

$$\frac{P}{a-bP} = e^{at+c} \Rightarrow \frac{P}{a-bP} = e^{at}e^{c} \Rightarrow \frac{P}{a-bP} = ce^{at}$$

$$P = ace^{at} - bce^{at}P$$

$$P + bce^{at}P = ace^{at}$$

$$P(1 + bce^{at}) = ace^{at}$$

$$P = \frac{ace^{at}}{1 + bce^{at}}$$

③ Hallamos $P(t_0) = P_0$ multiplicando por e^{-at} en forma de 1

$$P = \frac{ace^{at}}{1 + bce^{at}} \cdot \left(\frac{e^{-at}}{e^{-at}}\right)$$

$$P = \frac{ac}{e^{-at} + bc} \qquad (3.1)$$

Por la condición

$$P_0 = \frac{ac}{e^{-at_0} + bc}$$

④ Despejamos c

$$P_0 e^{-at_0} + P_0 bc = ac$$
$$P_0 e^{-at_0} = ac - P_0 bc$$
$$P_0 e^{-at_0} = c(a - P_0 b)$$
$$\frac{e^{-at_0} P_0}{a - bP_0} = c$$

⑤ Sustituimos c en la solución general y dar solución al PVI

$$P = \frac{a\left(\frac{e^{-at_0} P_0}{a - bP_0}\right)}{e^{-at} + b\left(\frac{e^{-at_0} P_0}{a - bP_0}\right)}$$

$$P = \frac{\frac{ae^{-at_0} P_0}{a - bP_0}}{\frac{e^{-at}(a - bP_0) + be^{-at_0} P_0}{a - bP_0}}$$

$$P = \frac{ae^{-at_0} P_0}{e^{-at}(a - bP_0) + be^{-at_0} P_0}$$

⑥ Nos hemos atorado, multiplicamos por e^{at_0} en forma de 1

$$P = \frac{aP_0}{e^{-at} e^{at_0}(a - bP_0) + bP_0}$$

$$P = \frac{aP_0}{e^{-a(t - t_0)}(a - bP_0) + bP_0}$$

Para encontrar a y b se propone:

$$\left.\begin{aligned} P(t_1) &= P_1 \\ P(t_2) &= P_2 \end{aligned}\right\} \text{ tal que } \quad t_2 - t_1 = t_1 - t_0$$

Es decir, los puntos son equidistantes
Y hallamos a y b

Resolver $y'' + y' - 6y = 28e^{4x}$

Resolvemos la homogénea:

$y'' + y' - 6y = 0$

Sea $y = e^{ax}$

$\therefore a^2 e^{ax} + ae^{ax} - 6e^{ax} = 0$

$e^{ax}(a^2 + a - 6) = 0$

$\therefore a = -3$

$a = 2$

$y_h = c_1 e^{-3x} + c_2 e^{2x}$

Ahora:

$y_p = Ae^{4x}$

$y_p' = 4Ae^{4x}$

$y_p'' = 16Ae^{4x}$

$16Ae^{4x} + 4Ae^{4x} - 6Ae^{4x} = 28e^{4x}$

$14Ae^{4x} = 28e^{4x}$

$\therefore A = 2$

$y_p = 2e^{4x}$

Resolver $y'' + y' - 6y = 15e^{2x}$

Resolvemos la homogénea

$y'' + y' - 6y = 0$

Sea $y = e^{ax}$

$y' = ae^{ax}$

$y'' = a^2 e^{ax}$

$a^2 e^{ax} + ae^{ax} - 6e^{ax} = 0$

$e^{ax}(a^2 + a - 6) = 0$ $\therefore$ $a = -3$ $a = 2$

$y_h = c_1 e^{-3x} + c_2 e^{2x}$

Ahora:

$y_p = Ae^{2x}$

$y_p' = 2Ae^{2x}$

$y_p'' = 4Ae^{2x}$

$4Ae^{2x} + 2Ae^{2x} - 6Ae^{2x} = 15e^{2x}$

$12Ae^{2x} = 15e^{2x}$

$12A = 15$

$A = \frac{15}{12}$ $\therefore$ $A = \frac{5}{4}$

$y = c_1 e^{-3x} + c_2 e^{2x} + \frac{5e^{2x}}{4}$

$0Ae^{2x} = 15e^{2x}$

No existe