24 / 08 / 20

Docente: Israel de la Parra González
Materia: Autómatas I

Examen diagnóstico

1.- $A \cup B = \{0, 1, a, b, c\}$

2.- $A \cap \emptyset = \emptyset$

3.- $C - C = \emptyset$

4.- $\overline{A}$

5.- $B \times A$

1.- Lenguajes y expresiones regulares

1.- Lenguajes

1.1 Preliminares matemáticos

Complemento

El complemento de A es $\overline{A}$

Con base en el conjunto universo U

El complemento de un conjunto son los elementos que faltan para completar U

Leyes de De Morgan

- $\overline{A \cup C} = \overline{A} \cap \overline{C}$
- $\overline{B \cap C} = \overline{B} \cup \overline{C}$

Subconjunto

$A \subseteq B$ = A es subconjunto de B = A está contenido en B = Todos los elementos de A son elementos de B

Conjuntos finitos: Se enlistan: $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$

Conjuntos infinitos: Se usan puntos suspensivos: $A = \{2, 4, 6, 8, \ldots\}$

Se usa definición matemática: $A = \{x : x > 0,\ x \text{ es par}\}$

Conjuntos disjuntos

Dos conjuntos son disjuntos cuando no tienen elementos en común

$$A \cap B = \emptyset$$

Cardinalidad

$|A|$ = Cantidad de elementos que tiene un conjunto

1.2 Alfabetos y cadenas

Alfabeto

Conjunto de símbolos. Deben ser conjuntos finitos y no vacíos

Ejemplos:

- $A = \{0, 1\}$
- $B = \{a\}$
- $C = \{a, b, c\}$
- $D = \{a, b\}$

Se prefiere dar el símbolo Σ:

- $\Sigma = \{0, 1\}$ - $\Sigma = \{a\}$ - $\Sigma = \{a, b, c\}$

Cadena o string

Secuencia de símbolos del alfabeto, como "agua"

OJO: No son conjuntos porque sí importa el orden y sí es posible repetir símbolos

Ejemplos:

- u = ababab
- v = 00000000
- w = 123456789abcdef
- w_1 = 1a2b3caaa
- w_2 = abba

Una cadena w que incluye símbolos de Σ se dice que w está sobre Σ (w over Σ)

Una cadena w sobre $\Sigma = \{a, b\}$ puede ser aaba

Operaciones con cadenas

Concatenación

La simbolizamos juntando los nombres de las cadenas

Si w = abc y v = aaa

wv = abcaaa

vw = aaaabc

wvw = abcaaaabc

Reverso
Se simboliza w^R y es escribir a w en orden contrario
Si $w = aaabbb$ $\quad w^R = bbbaaa$
$v = abcdef$ $\quad v^R = fedcba$

Longitud
La longitud de w es $|w|$ y es la cantidad de símbolos que contiene incluyendo repeticiones
Si $w = abdabb$ $\quad |w| = 6$

La cadena vacía lo denotaremos como λ ó ε cuya longitud es cero
$$\lambda w = w = w\lambda$$

Subcadena o substring
Cualquier cadena de símbolos consecutivos dentro de w se denomina subcadena de w
Si $w = abcab$ $\quad v_1 = bca$ es una subcadena de w
$v_2 = a$ también
$v_3 = \lambda$ también

Repetir una cadena
Repetir w n veces se escribe w^n
Si $w = ab$ $\quad w^3 = ababab$
$w^1 = ab = w$
$w^0 = \lambda$

Operaciones con alfabetos
Si se tiene el alfabeto Σ:

Σ^* Sigma estrella
Se define como el conjunto de todas las cadenas que se obtienen concatenando n veces los símbolos de Σ con $n \geq 0$
Si $\Sigma = \{a\}$ $\quad \Sigma^* = \{\lambda, a, aa, aaa, aaaa, \ldots\}$
$= \{a^n : n \geq 0\}$

Si $\Sigma = \{a, b\}$ $\quad \Sigma^* = \{a, b, aa, ab, ba, bb, \ldots\}$

~~1.3 Lenguajes y sus operaciones~~
~~Lenguaje~~
~~Es cualquier sub~~

Σ^+ Sigma positivo
Igual a Σ^* pero con $n > 0$

1.3 Lenguajes y sus operaciones

Lenguaje
Cualquier subconjunto de Σ^*

Para $\Sigma = \{a, b\}$

$$L_1 = \{a, ab, aab, aba\}$$
$$L_2 = \{a, aa, aaa, aaaa\}$$
$$L_3 = \{\lambda, a, aa, aaa, aaaa, \ldots\} = \{a^n : n \geq 0\}$$

Las cadenas que conforman los lenguajes se denominan "palabras", "enunciados" u "oraciones"

Como un lenguaje es un conjunto, se le pueden aplicar operaciones de conjuntos

L^* (Star closure o cerradura estrella)
Matemáticamente $L^* = L^0 \cup L^1 \cup L^2 \ldots$

Si $L = \{a, ab\}$

$$L^0 = \{\lambda\}$$
$$L^1 = \{a, ab\}$$
$$L^2 = \{aa, aab, aba, abab\}$$

Es complicado expresar todo L^* pero podemos identificar si una cadena pertenece a L^*:

aaaababaabba no pertenece a L^*

L^+ (Positive closure o cerradura positiva)

$$L^+ = L^1 \cup L^2 \cup L^3 \ldots$$

Un ejemplo de lenguaje infinito en el que se puede operar es:

$$L = \{a^n b^n : n \geq 0\} = \{\lambda, ab, aabb, aaabbb, \ldots\}$$

El reverso de este lenguaje es:

$$L^R = \{\lambda, ba, bbaa, bbbaaa, \ldots\}$$
$$= \{b^n a^n : n \geq 0\}$$

La repetición del lenguaje 2 veces:

$L^2 = LL = \{\lambda, ab, aabb, aaabbb, \ldots, ab, abab, abaabb, abaaabbb, \ldots\}$

$= \{a^n b^n a^m b^m : n, m \geq 0\}$

Lenguajes y expresiones regulares

Expresiones regulares

Son otra manera de representar lenguajes. Es una alternativa a la descripción con notación de conjuntos

Definición: Se Σ un alfabeto determinado. Entonces:

1- $\varnothing$, λ y todos los símbolos $a \in \Sigma$ son expresiones regulares. Estas se llaman expresiones regulares primitivas por ser las más básicas

2- Si r_1 y r_2 son expresiones regulares, entonces también son expresiones regulares: $r_1 + r_2$, $r_1 \cdot r_2$, r_1^* y (r_1)

3- Una cadena es expresión regular si y sólo si puede derivarse de las expresiones regulares primitivas y un número primitivo de aplicaciones del inciso 2

Ejemplo:

Para $\Sigma = \{a, b, c\}$ la cadena

$$(a + b + c)^* \cdot (c + \varnothing)$$

es una expresión regular

Una expresión regular r representa un lenguaje L. Esto lo simbolizamos como $L = L(r)$

Definición: El lenguaje $L(r)$ denotado por una expresión regular r se define con las siguientes reglas

1- $\varnothing$ es la expresión para el conjunto vacío

2- λ es la expresión para el conjunto $\{\lambda\}$

3- Para los símbolos $a \in \Sigma$, a es la expresión del conjunto $\{a\}$

Si r_1 y r_2 son expresiones regulares, entonces:

1- $L(r_1 + r_2) = L(r_1) \cup L(r_2)$

2- $L(r_1 \cdot r_2) = L(r_1) L(r_2)$

3- $L(r_1^*) = L(r_1)^*$

4- $L((r_1)) = L(r_1)$

Ejemplo: Expresa en notación de conjunto el lenguaje $L(a^* \cdot (a+b))$

$L(a^*) L((a+b))$

$L(a)^* L(a+b)$

$\{a\}^* [L(a) \cup L(b)]$

$\{\lambda, a, aa, aaa, \ldots\}[\{a\} \cup \{b\}]$
$\{\lambda, a, aa, aaa, \ldots\}\{a, b\}$
$\{\lambda a, aa, aaa, aaaa, \ldots, \lambda b, ab, aab, aaab, \ldots\}$
$\{a, aa, aaa, aaaa, \ldots, b, ab, aab, aaab, \ldots\}$
$\{a^n, a^m b : n > 0, m \geq 0\}$

Para evitar poner muchos paréntesis, la jerarquía de operaciones es la siguiente

1 = $*$
2 = $\cdot$
3 = $+$

También se acostumbra no escribir el punto de la concatenación

Ejemplo Encontrar el lenguaje expresado por la expresión regular

$r = (a+b)^*(a+bb)$

$L((a+b)^*(a+bb))$
$L((a+b)^*)\,L((a+bb))$
$L((a \cup b)^*)\,L(a \cup bb)$
$[L(a) \cup L(b)]^*\,[L(a) \cup L(bb)]$
$[L(a) \cup L(b)]^*\,[\{a\} \cup L(b)L(b)]$
$[\{a\} \cup \{b\}]^*\,[\{a\} \cup \{b\}\{b\}]$
$\{a, b\}^*\{a, bb\}$
$\{\lambda, a, b, aa, ab, ba, bb, aaa, aab, aba, abb, \ldots\}\{a, bb\}$
$\{\lambda a, aa, ba, aaa, aba, bba, bba, aaaa, aaba, abaa, abba, \ldots, \lambda bb, abb, bbb, aabb,$
$abbb, babb, bbbb, aaabb, aabbb, ababb, abbbb, \ldots\}$
$= \{wa, wbb : w \in \{a, b\}^*\}$

Encontrar el lenguaje denotado por la expresión $r = (aa)^*(bb)^*b$

$L((aa)^*(bb)^*b)$
$L((aa)^*)\,L((bb)^*)\,L(b)$
$L(aa)^*\,L(bb)^*\,L(b)$
$\{aa\}^*\{bb\}^*\{b\}$
$\{\lambda, aa, aaaa, aaaaaa, \ldots\}\{\lambda, bb, bbbb, bbbbbb, \ldots\}\{b\}$
$\{\lambda\lambda b, aa\lambda b, aaaa\lambda b, \ldots, \lambda bbb, aabbb, aaaabbb, \ldots\}$
$\{a^{2n} b^{2m} b : n \geq 0, m \geq 0\}$

Ahora diseñaremos expresiones regulares

Mony
Montse
Yiss
Choche
Oscar
Angel

Juan Ma
Chuy
Gustavo
Alan
Vital

Omar
Meli
Alex

10 / 09 / 20

Ejemplo

Para $\Sigma = \{0, 1\}$ obtener una r tal que

$L(r) = \{w \in \Sigma^* :$ tiene al menos un par de ceros consecutivos $\}$

Debe estar

00
001
1001
000
0000

$(00)^n \quad n > 0$

$0^i 1^j$

Propongo $r = (0)^*(1)^* 00 (0)^* (1)^*$

La expresión completa es:

$r = (0+1)^* 00 (0+1)^*$

Encuentra una expresión regular para

$L(r) = \{w \in \Sigma :$ no hay par de ceros consecutivos $\}$

Debe estar

λ
0
1
01
10

0
0 y luego 1^*
0 y luego 1^+ luego 0

$r = (1 + 01)^* (\lambda + 0)$

06 - 10 - 20

Autómata Definición general e informal

Modelo abstracto de una computadora digital

Tiene un mecanismo de entrada (lectura) recibe los símbolos de un archivo de entrada (input file)

Tiene un mecanismo de salida con condición binaria

Son aceptadores

DFA

Preliminares matemáticos

Conjunto potencia: Conjunto de todos los posibles subconjuntos

El conjunto potencia de:	es:
$S = \{0, 1\}$	$S = \{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{0,1\}\}$
$S = \{a, b, c\}$	$S = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{ab\}, \{ac\}, \{bc\}, \{abc\}\}$

Encontrar el producto cartesiano $P = A \times B \times C$ si
$A = \{q_0, q_1, q_2\}$ $B = \{a, b\}$ $C = \{Z, 0\}$

$P = (q_0, a, Z), (q_0, a, 0)$
$(q_0, b, Z), (q_0, b, 0)$

$(q_1, a, Z), (q_1, a, 0)$
$(q_1, b, Z), (q_1, b, 0)$

$(q_2, a, Z), (q_2, a, 0)$
$(q_2, b, Z), (q_2, b, 0)$

Funciones:

$$f: S_1 \rightarrow S_2$$

Indicamos que el dominio es subconjunto de S_1 y el rango de S_2
Si el dominio de f es un conjunto completo de S_1 se denomina función total sobre S_1, de lo contrario se le llama función parcial

Un DFA se define como

$$M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$$

donde

Q es un conjunto finito de estados internos
Σ es un conjunto finito de símbolos llamado alfabeto de entrada
$\delta: Q \times \Sigma \rightarrow Q$ es una función de transición
q_0 es el estado inicial
F es un conjunto de estados finales

08 - 10 - 20

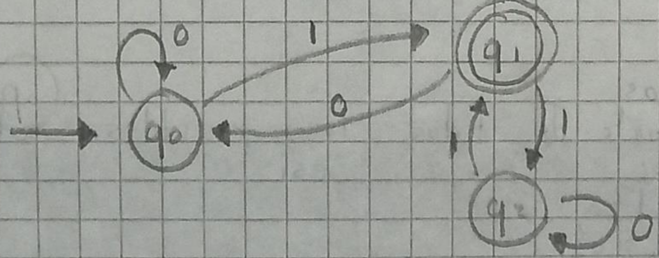
Ejemplo:
Dibujar el grafo de transición para el autómata definido como:

$$M = (\{q_0, q_1, q_2\}, \{0, 1\}, \delta, q_0, \{q_1\})$$

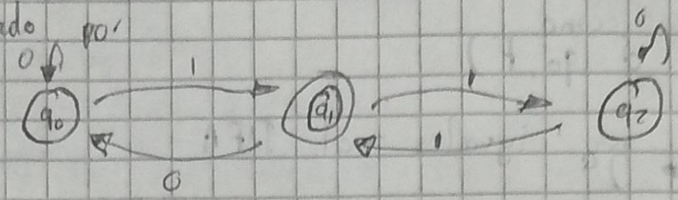
donde

$\delta(q_0, 0) = q_0$ $\delta(q_0, 1) = q_1$
$\delta(q_1, 0) = q_0$ $\delta(q_1, 1) = q_2$
$\delta(q_2, 0) = q_2$ $\delta(q_2, 1) = q_1$

1 ✓ 0 ×
11 × 10 ×
110 ×
1101 ✓
11111 ✓



Ejercicio clase
Lenguaje aceptado por



1
01
001

111
11111

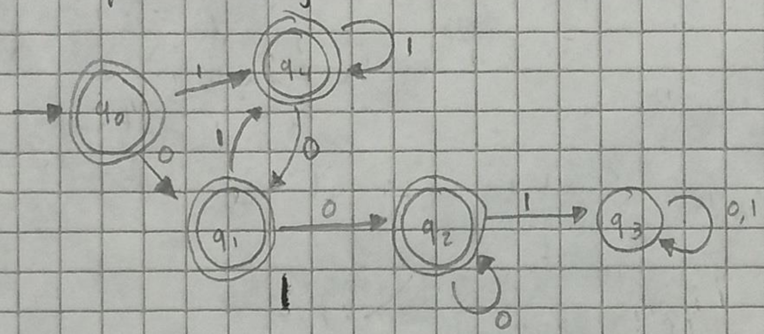
11001
10110000 1

1

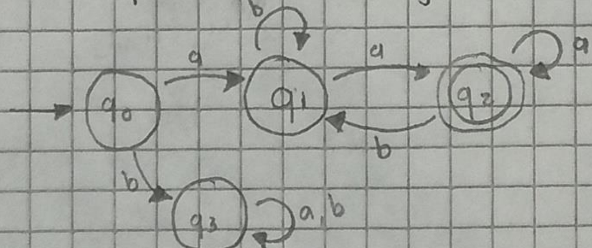
$1(00^*1)^*(10^*1)^*$

$L = \{1wv : w \in \{\{0\}\{0\}^*\{1\}\}^*, v \in \{\{1\}\{0\}^*\{1\}\}^*\}$

Encuentra un DFA que acepte todas las cadenas sobre $\{0,1\}$ excepto las que contengan la subcadena "001"



Demostrar que el lenguaje $L = \{awa, w \in \{a,b\}^*\}$ es regular



22/10/20

Aceptadores Finitos no Deterministas

Un AFN se define como

$M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$

donde Q, Σ, q_0, F son iguales al DFA

$\delta : Q \times (\Sigma \cup \{\lambda\}) \rightarrow 2^Q$

3 diferencias

- El resultado de una función de transición puede ser el conjunto vacío
- El resultado de una función puede ser un conjunto de más de un estado
- En el 2do argumento de la función es posible tener λ (No leo nada)

01 / 09 / 20

Tarea: Lenguajes

1- Resolver los ejercicios e), f), i), j), k), l) de la imagen 1.jpg

Sean

$A = \{0, 1\}$
$B = \{a, b, c\}$
$C = \{0, a, b\}$

encontrar:

e) $A \cap \emptyset$

$A \cap \emptyset = \emptyset$

f) $B \cap A \cap C$

Sea $D = B \cap A$, así la proposición inicial cambia a:

$D \cap C$

Encontremos D

$D = B \cap A = \emptyset$

Así:

$D \cap C = \emptyset \cap C = \emptyset$

$\therefore B \cap A \cap C = \emptyset$

i) $C - (A \cup B)$

$A \cup B = \{0, 1, a, b, c\}$

$C - (A \cup B) = \emptyset$

Si $U = A \cup B \cup C$ encontrar

j) $\overline{A}$

$\overline{A} = \{a, b, c\}$

k) $\overline{C}$

$\overline{C} = \{1, c\}$

l) $\overline{A \cup B}$

Por leyes de De Morgan:

$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$

Ahora determinemos $\overline{A}$ y $\overline{B}$

$\overline{A} = \{a, b, c\}$

$\overline{B} = \{0, 1\}$

$\therefore \overline{A} \cap \overline{B} = \emptyset$

2- Resolver los ejercicios 1 y 2 del enlace dado

1: Exprese los miembros de los siguientes conjuntos:

a) $\{x : x$ es un número real tal que $x^2 = 4\}$

Resolveremos
$$x^2 = 4$$
$$x^2 - 4 = 0$$
$$(x+2)(x-2) = 0$$
$$x+2=0 \qquad x-2=0$$
$$x=-2 \qquad x=2$$

a) $\{-2, 2\}$

b) $\{x : x$ es un entero tal que $x^2 = 2\}$

Resolvemos
$$x^2 = 2$$
$$x^2 - 2 = 0$$
$$(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2}) = 0$$
$$x = -\sqrt{2} \qquad x = \sqrt{2}$$

No existe un entero que cumpla la condición dada

$\therefore$ b) $\varnothing$

2- Determine si cada uno de los pares de conjuntos siguientes son iguales

a) $\{1, 2, 1, 3, 1, 2\}, \{2, 3, 1\}$

Son iguales

b) $\{\{1\}\}, \{1, \{1\}\}$

No son iguales ya que el primero se trata de un conjunto con otro conjunto, en el otro hay dos elementos, símbolo y conjunto

c) $\varnothing, \{\varnothing\}$

No son iguales

3- Resolver todos los ejercicios de las imágenes 4.jpg y 5.jpg

4.jpg

Sean $\Sigma_1 = \{a, b\}$, $\Sigma_2 = \{0, 1\}$ y $\Sigma_3 = \{a, b, c\}$

Encontrar 5 cadenas para

a) Σ_1

a_1 = abaa

a_2 = aaaa

a_3 = baaa

a_4 = ab

a_5 = aabaa

b) Σ_2

$b_1 = 10010$
$b_2 = 11110$
$b_3 = 1100111101101011000$
$b_4 = 11000$
$b_5 = 1000$

c) Σ_3

$c_1 = abcab$
$c_2 = aaabc$
$c_3 = ac$
$c_4 = cbac$
$c_5 = abbbbac$

d) $\Sigma_1 \cup \Sigma_2$

$d_1 = a0b1$
$d_2 = a10010b11110$
$d_3 = a11000b1000$
$d_4 = a10b$
$d_5 = 01ab$

Sean $w_1 = ab$ $w_2 = aa$ $w_3 = aba$, encontrar

e) $w_1 w_2$

$w_1 w_2 = abaa$

f) $w_2 w_1$

$w_2 w_1 = aaab$

g) $w_3 w_1 w_3$

$w_3 w_1 w_3 = abaababa$

h) w_2^R

$w_2^R = aa$

i) $w_3^R w_1^R$

$w_3^R w_1^R = ababa$

j) $|w_1^R|$

$|w_1^R| = 2$

k) $|w_1 w_2|$

$|w_1 w_2| = 4$

l) $|w_2^R w_1|$

$|w_2^R w_1| = 4$

m) w_1^2

$w_1^2 = abab$

n) $w_1 w_2^0$

$w_1 w_2^0 = w_1 \lambda = ab$

o) $w_1^3 w_2^2$

$w_1^3 w_2^2 = abababaaaa$

5. jpg

p) $(w_1^2)^R$

$(w_1^2)^R = baba$

q) $|w_1^5|$

$|w_1^5| = 10$

r) $|w_1^6 w_2^3|$

$|w_1^6 w_2^3| = 18$

s) encuentra Σ_2^*

$\Sigma_2^* = \{\lambda, 0, 1, 00, 01, 10, 11, 000, 001, 010, 011, \ldots\}$

t) Define un lenguaje L_1 para Σ_1

Sea $L_1 = \{abba, abab, a, ab, bbbbbab, abb\}$

u) Define un lenguaje L_2 para Σ_3

Sea $L_2 = \{abac, abcba, ac, abcccc, aabc, a\}$

v) Define un lenguaje L_3 para $\Sigma_3 - \Sigma_1$

Sea $L_3 = \{c, cc, cccccc, ccccccccc\}$

Sean $L_1 = \{a, ab\}$ y $L_2 = \{b, ba\}$, encontrar:

w) $L_1 L_2$

$L_1 L_2 = \{ab, aba, abb, abba\}$

x) $L_2 L_1$

$L_2 L_1 = \{ba, bab, baa, baab\}$

y) $L_1 L_1$

$L_1 L_1 = \{aa, aab, aba, abab\}$

z) L_2^*

$L_2^* = \{\lambda, b, ba, bb, bba, baba, \ldots\}$

11 / 09 / 20

Tarea: Expresiones Regulares

Primera sección (lenguaje asociado)

1.- Expresar el lenguaje que corresponde a cada una de las siguientes expresiones regulares:

a) $(a+(b\cdot c))^*$

$L((a+(b\cdot c))^*)$

$L((a+(b\cdot c)))^*$

$\{L(a)\cup L(bc)\}^*$

$[\{a\}\cup\{b\}\{c\}]^*$

$[\{a\}\cup\{b,c\}]^*$

$\{a, bc\}^*$

$\{\lambda, a, bc, aa, abc, bca, bcbc, aaa, aabc, abca, abcbc, bcaa, bcabc, bcbca, bcbcbc, \ldots\}$

b) $(a+b+c)^*\cdot(c+\emptyset)$

$L((a+b+c)^*\cdot(c+\emptyset))$

$L(a+b+c)^*\ L(c+\emptyset)$

$\{L(a)\cup L(b)\cup L(c)\}^*\ \{L(c)\cup\emptyset\}$

$[\{a\}\cup\{b\}\cup\{c\}]^*\ [\{c\}\cup\emptyset]$

$\{a, b, c\}^*\{c\}$

$\{\lambda, a, b, c, aa, ab, ac, ba, bb, bc, ca, cb, cc, \ldots\}\{c\}$

$\{c, ac, bc, cc, aac, abc, acc, bac, bbc, bcc, cac, cbc, ccc, \ldots\}$

c) $(a+bb)^*(ba^*+\lambda)$

$L(a+bb)^*\ L(b\cdot(a^*)+\lambda)$

$\{L(a)\cup L(bb)\}^*\ \{L(b)\ L(a)^*\cup\lambda\}$

$[\{a\}\cup\{bb\}]^*\ [\{b\}\{a\}^*\cup\{\lambda\}]$

$\{a, bb\}^*[\{b, ba, baa, baaa, \ldots\}\cup\{\lambda\}]$

$\{\lambda, a, bb, aa, abb, bba, bbbb, \ldots\}\{\lambda, b, ba, baa, baaa, \ldots\}$

$\{\lambda, b, ba, baa, baaa, \ldots, a, ab, aba, abaa, abaaa, \ldots, bb, bbb, bbba, bbbaa, bbbaaa, \ldots, aa, aab, aaba, aabaa, aabaaa, \ldots, \ldots\}$

d) $a^*+a^*(a+b)c^*$

$L(a^*+a^*(a+b)c^*)$

$\{L(a)^*\}\cup\{L(a)^*[L(a)\cup L(b)]L(c)^*\}$

$\{a\}^*\cup[\{a\}^*\{a, b\}\{c\}^*]$

$\{\lambda, a, aa, aaa, \ldots\}\cup[\{a, aa, aaa, aaaa, \ldots, b, ab, aab, aaab, \ldots\}\{c\}^*]$

$\{\lambda, a, aa, aaa, \ldots\}\cup\{a, aa, aaa, aaaa, \ldots, b, ab, aab, aaab, \ldots, ac, aac, aaac, aaaac, \ldots, bc, abc, aabc, aaabc, \ldots, acc, \ldots\}$

$\{\lambda, a, aa, aaa, \ldots, b, ab, aab, aaab, \ldots, ac, aac, aaac, aaaac, \ldots, bc, abc, aabc, aaabc, \ldots, acc, \ldots\}$

2- Resolver los ejercicios 1, 7, 8, 24 del libro de Peter Linz de la sección 3.1

1- Encuentra todas las cadenas en $L((a+b)b(a+ab)^*)$ de longitud menor a cuatro

$L(a+b)\ L(b)\ L(a+ab)^*$

$[L(a) \cup L(b)]\ L(b)\ [L(a) \cup L(a)L(b)]^*$

$\{a, b\}\{b\}\{a, ab\}^*$

$\{ab, bb\}\{\lambda, a, ab, aab, aba, abab, aa, aba, aaab, aaba, aabab, abaa, abaab, ababa, ababab\}$

$\{ab, aba, bb, bba\}$

7- ¿Qué lenguajes denotan las expresiones $(\emptyset^*)^*$ y $a\emptyset$?

$(\emptyset^*)^*$ denota

$[\{\}^*]^*$

$\{\lambda\}^*$

$\{\lambda\}$

$a\emptyset$ denota

$\{a\}\{\}$

$\{a\}$

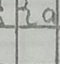
8- Da una descripción verbal simple del lenguaje $L((aa)^*b(aa)^* + a(aa)^*ba(aa)^*)$

$[L(a)L(a)]^*L(b)[L(a)L(a)]^* + L(a)[L(a)L(a)]^*L(b)L(a)[L(a)L(a)]^*$

$\{aa\}^*\{b\}\{aa\}^* \cup \{a\}\{aa\}^*\{ba\}\{aa\}^*$

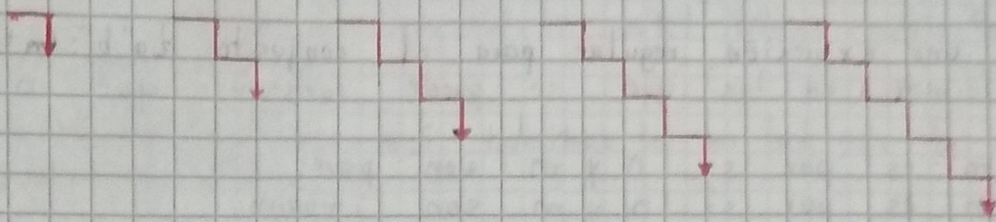
El lenguaje puede estar constituido por cadenas que inicien con un número par de a (incluyendo el 0, es decir que ni inicie con a) seguido de una b y otro número par de a (otra vez incluyendo el 0). Pero también puede estar constituido por un número impar de a (por lo menos una a) seguido de una b y una a y otro número par de a (incluyendo el 0)

24- Los lenguajes formales pueden usarse para describir una variedad de figuras bidimensionales. Los lenguajes código-cadena se definen bajo el alfabeto $\Sigma = \{u, d, r, l\}$ donde estos símbolos denotan la traslación unitaria en líneas rectas en las direcciones arriba, abajo, derecha, izquierda respectivamente.
Un ejemplo de esta notación es urdl el cual es un cuadrado donde sus lados tienen la longitud unitaria.
Dibuja los productos de las figuras denotadas por las expresiones $(rd)^*$, $(urddru)^*$ y $(ruldr)^*$



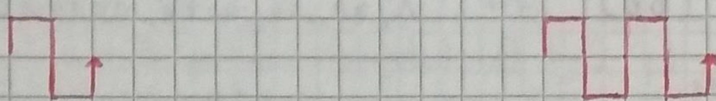
a) Ejemplos de $(rd)^*$

rd rdrd rdrdrd rdrdrdrd rdrdrdrdrd

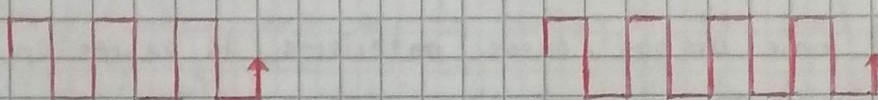


b) Ejemplos de $(urddru)^*$

urddru urddruurddru

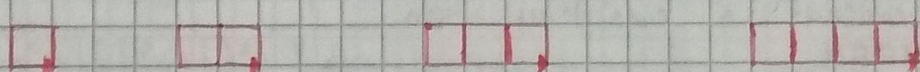


urddruurddruurddru urddruurddruurddruurddru



c) Ejemplos de $(ruldr)^*$

ruldr ruldrruldr ruldrruldrruldr ruldrruldrruldrruldr



Segunda sección (diseño de expresiones regulares)

1.- Resolver los ejercicios 4, 5, 6, 10, 13, 14 y 15 del libro de Peter Linz de la sección 3.1:

NOTA: El ejercicio 6 tiene error de impresión en los incisos a) y b). Después de la llave que abre debe estar escrita una a con el exponente n

4.- Encuentra una expresión regular para el conjunto $\{a^n b^m : n \geq 3, m \text{ es par}\}$

Podemos tener cadenas como

aaa
aaabb
aaabbbb
aaaa
aaaabb
aaaabbbb

De modo que podemos pensar en la expresión
$aaa(a^*)(bb)^*$

5- Encuentra una expresión regular para el conjunto $\{a^n b^m : (n+m) \text{ es par}\}$
Hay dos formas en las que se puede conseguir que $n+m$ sea par

$n+m$ es par si n y m son pares
$n+m$ es par si n y m son impares

Caso 1: n y m pares
Se pueden generar con:
$(aa)^*(bb)^* \Rightarrow \lambda, aa, bb, aabb, aaaabb, \ldots$

Caso 2: n y m impares
Pensando que 1 es el impar mínimo, generamos:
$a(aa)^* b(bb)^* \Rightarrow ab, aaab, aaabbb, aaaaab$

De modo que al unir ambos casos anteriores, la expresión resultante es:
$(aa)^*(bb)^* + a(aa)^* b(bb)^*$

6- Encuentre expresiones regulares para los siguientes lenguajes
a) $L_1 = \{a^n b^m : n \geq 4, m \leq 3\}$
Algunas cadenas a considerar son
aaaa
aaaam
aaaaaaaaaammm
Podemos proponer una expresión por cada m
$aaaa(a^*) + aaaa(a^*)m + aaaa(a^*)mm + aaaa(a^*)mmm$

b) $L_2 = \{a^n b^m : n < 4, m \leq 3\}$
Algunas cadenas que encontramos son:
λ, a, b, aaab, bbb, aaabbb
Proponemos entonces
$\lambda + (a + aa + aaa)(b + bb + bbb)$

c) El complemento de L_1
Escribamos algunas cadenas de $U(\Sigma^*)$ y señalemos las que están en L_1

λ -	aa -	bb -	aba -	bab -	aaaa ✓	aabb -
a -	ab -	aaa -	abb -	bba -	aaab -	abab -
b -	ba -	aab -	baa -	bbb -	aaba -	abab -

Para c) hay que considerar

1: $b(a+b)^*$: Con esto hacemos todas las cadenas empezando con b. Así para cadenas de longitud n, $n \geq 1$ hemos cubierto la mitad de todas esas cadenas

2: $ab(a+b)^*$: Ahora así cubrimos la mitad de la otra mitad faltante de Σ^*

3: $aab(a+b)^*$: Así cubrimos la mitad de la mitad faltante de Σ^*

4: $aaab(a+b)^*$: Así cubrimos la mitad de la mitad faltante de Σ^*

5: Otras cadenas de longitud 0, 1, 2 y 3 no consideradas:
λ, a, aa, aaa

6: $a^*ba(a+b)^*$: La condición de a cumple y la de una b también pero después hay una a (y luego lo que sea)

7: $a^*bba(a+b)^*$: La condición de a cumple, la de dos b también pero luego hay una a (y luego lo que sea

8: $a^*bbba(a+b)^*$: Las condiciones a y tres b se cumplen pero luego hay una a (y luego lo que sea)

9: $a^*bbbb(a+b)^*$: Todas las cadenas de longitud superior que no cumplen

$$\underbrace{\lambda + a + aa + aaa}_{5} + \underbrace{a^*b(a+b)^*}_{1,2,3,4} + \underbrace{a^*bb^*a(a+b)^*}_{6,7,8} + \underbrace{a^*bbbb(a+b)^*}_{9}$$

d) El complemento de L_2

Proponemos

1- $ba(a+b)^*$ Tendremos a después de b (y luego lo que sea)
2- $aba(a+b)^*$ Con una a y b luego a (y luego lo que sea)
3- $aaba(a+b)^*$ Igual razonamiento

$\Big\}\ a^*ba(a+b)^*$

4- $a^*bb^*a(a+b)^*$ 1, 2, 3 generalizadas
5- $aaaa(a+b)^*$
6- $(a+b)^*bbbb$

$$a^*bb^*a(a+b)^* + aaaa(a+b)^* + (a+b)^*bbbb$$

10- Encuentre una expresión regular para $L=\{a^n b^m : n \geq 1, m \geq 1, nm \geq 3\}$

Cadenas a considerar son:

abbb, aaab, abbb, aaaaabbb, aabbbbb

Tenemos entonces:

$$aaaa^*bb^* + aa^*bbbb^* + aaa^*bbb^*$$

13- Encuentre una expresión regular para $L=\{vwv : v, w \in \{a,b\}^*, |v| = 2\}$

v entonces es: aa, ab, ba, bb

Tenemos entonces:

$$aa(a+b)^*aa + ab(a+b)^*ab + ba(a+b)^*ba + bb(a+b)^*bb$$

14- Encuentre una expresión regular para $L=\{vwv : v, w \in \{a,b\}^*, |v| \leq 3\}$

v es: λ, a, b, aa, ab, ba, bb, aaa, aab, aba, abb, baa, bab, bba, bbb

Tenemos entonces:

$(a+b)^*$ ya que este engloba a todo el lenguaje

!

15- Encuentre una expresión regular para

$L=\{w \in \{0,1\}^* : w$ tiene exactamente un par de ceros consecutivos$\}$

Consideremos:

00, 001, 100, 0100101011101

Empecemos por proponer:

$$00(10)^*$$

Mejoremos:

$$00(10)^*1^*$$

Ahora probemos por izquierda:

$$1^*(01)^*00(10)^*1^*$$

Ahora para repetir los prefijos de 00 o sufijos a 00 infinitas veces ponemos:

$$[1^*(01)^*]^*00[(10)^*1^*]^*$$

09/10/20

Tarea: Aceptadores Finitos Deterministas (DFA)

1.- Resolver los ejercicios del m) al r) de la imagen 1.jpg

Sean $A=\{0,1\}$, $B=\{a,b,c\}$ y $C=\{0,a,b\}$, también $U=A\cup B\cup C$, encontrar:

m) $A\times B$

$A\times B=\{(0,a),(0,b),(0,c),(1,a),(1,b),(1,c)\}$

n) $B\times A$

$B\times A=\{(a,0),(a,1),(b,0),(b,1),(c,0),(c,1)\}$

o) $A\times C\times B$

$A\times C\times B=\{(0,0,a),(0,0,b),(0,0,c),(0,a,a),(0,a,b),(0,a,c),$
$(0,b,a),(0,b,b),(0,b,c),(1,0,a),(1,0,b),(1,0,c),$
$(1,a,a),(1,a,b),(1,a,c),(1,b,a),(1,b,b),(1,b,c)\}$

p) 2^A

Como $A=\{0,1\}$

$2^A=\{\emptyset,\{0\},\{1\},\{0,1\}\}$ 4 elementos

q) $2^{B\cap C}$

Como $B\cap C=\{a,b\}$

$2^{B\cap C}=\{\emptyset,\{a\},\{b\},\{a,b\}\}$ 4 elementos

r) $2^{A\times A}$

Como $A\times A=\{(0,0),(0,1),(1,0),(1,1)\}$

$2^{A\times A}=\{\emptyset,\{(0,0)\},\{(0,1)\},\{(1,0)\},\{(1,1)\},\{(0,0),(0,1)\},\{(0,0),(1,0)\},$
$\{(0,0),(1,1)\},\{(0,1),(1,0)\},\{(0,1),(1,1)\},\{(1,0),(1,1)\},$
$\{(0,0),(0,1),(1,0)\},\{(0,0),(0,1),(1,1)\},\{(0,0),(1,0),(1,1)\},$
$\{(0,1),(1,0),(1,1)\},\{(0,0),(0,1),(1,0),(1,1)\}\}$

2.- Resolver el ejercicio 5 del enlace dado

5.- Encuentra el conjunto potencia de cada uno de los conjuntos

a) $\{a\}$

$\{\emptyset,\{a\}\}$

b) $\{a,\{a\}\}$

$\{\emptyset,\{a\},\{\{a\}\},\{a,\{a\}\}\}$

c) $\{\emptyset,\{\emptyset\}\}$

$\{\emptyset,\{\emptyset\},\{\{\emptyset\}\},\{\emptyset,\{\emptyset\}\}\}$

3 - Resolver el ejercicio 2 del enlace dado

2 - ¿Cuántos elementos diferentes tiene $A \times B$ si A tiene m elementos y B tiene n elementos?

Un elemento de A se combinará con cada elemento de B, y como B tiene n elementos un elemento de A generará n elementos. Si esto ocurre con un elemento de A, los m elementos de generarán $n+n+n+n\ldots$ m veces. Tendremos entonces mn elementos

4 - Resolver los ejercicios del s) en adelante de la imagen 1.jpg

Define una función total f para cada caso:

s) $f: A \rightarrow B$

Declaramos que:

$f(0) = a$

$f(1) = b$

t) $f: B \rightarrow A$

Declaramos que

$f(a) = 0$

$f(b) = 0$

$f(c) = 1$

u) $f: A \times B \rightarrow 2^A$

Declaramos que

$f((0,a)) = 0$ $f((0,b)) = 1$ $f((0,c)) = 0$

$f((1,a)) = 1$ $f((1,b)) = 0$ $f((1,c)) = 1$

v) $f: C \rightarrow B \times A$

Declaramos que:

$f(0) = (a,0)$ $f(a) = (a,1)$ $f(b) = (b,1)$

Define una función parcial para cada caso:

w) $g: A \rightarrow C$

Declaramos que:

$f(0) = a$

Los demás casos no están definidos

x) $g: A \times B \times C \rightarrow 2^C$

Declaramos que:

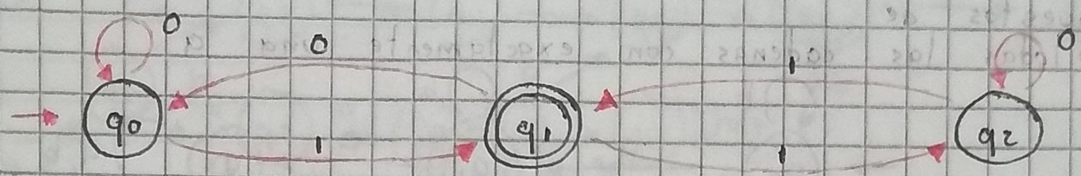
$f((0,a,b)) = 0$

$f((1,a,a)) = a$

Los demás casos no están definidos

5.- Resolver el ejercicio 1 del libro de Peter Linz sección 2.1

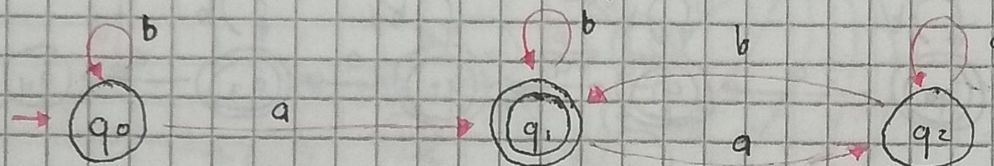
1- De las cadenas 0001, 01001, 0000110 ¿cuáles serán aceptadas por el DFA?



La cadena 0001 será aceptada
La cadena 01001 será aceptada
La cadena 0000110 no será aceptada

6.- Resolver el ejercicio de la imagen DFA6.jpg

6- Da una descripción en notación de conjuntos del lenguaje aceptado por el siguiente autómata. ¿Puedes pensar en una adecuación verbal simple del lenguaje?



Algunas cadenas aceptadas son:
a, ab, ba, bab, baab

b^*ab^* ✓
$b^*aa^*bb^*$
$b^*a((aa^*)(bb^*))^*$

Así obtenemos:

$\{wawv : w \in \{b\}^*, v \in \{\{a\}\{a\}^*\{b\}\{b\}^*\}^*\}$

Una descripción verbal:

- n cantidad de b $n \geq 0$
- Una a
- m veces la estructura:
  - k cantidad de a $a \geq 1$
  - j cantidad de b $b \geq 1$

$m \geq 0$

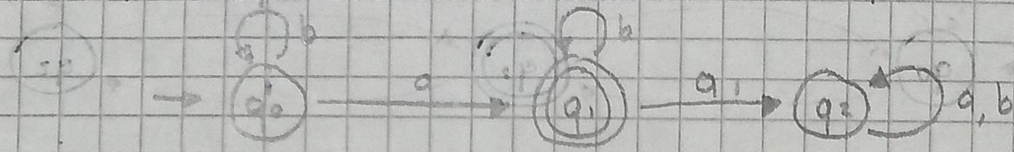
- i cantidad de b $i \geq 0$

8.-

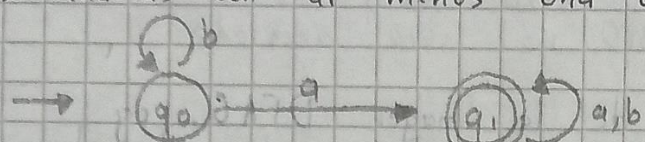
8.- Resolver los ejercicios 2, 11, 12 y 13 del libro de Peter Linz sección 2.1

2.- Para $\Sigma = \{a, b\}$ construya un DFA que acepte conjuntos compuestos de

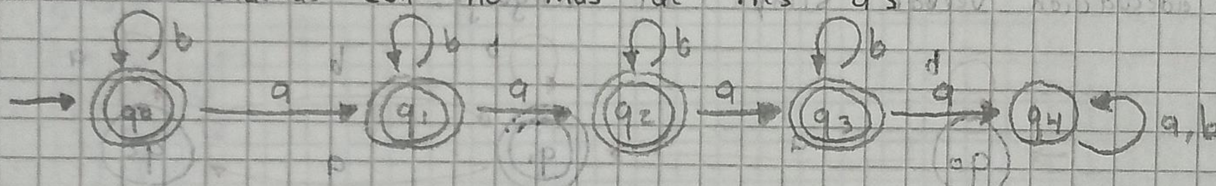
a) todas las cadenas con exactamente una a



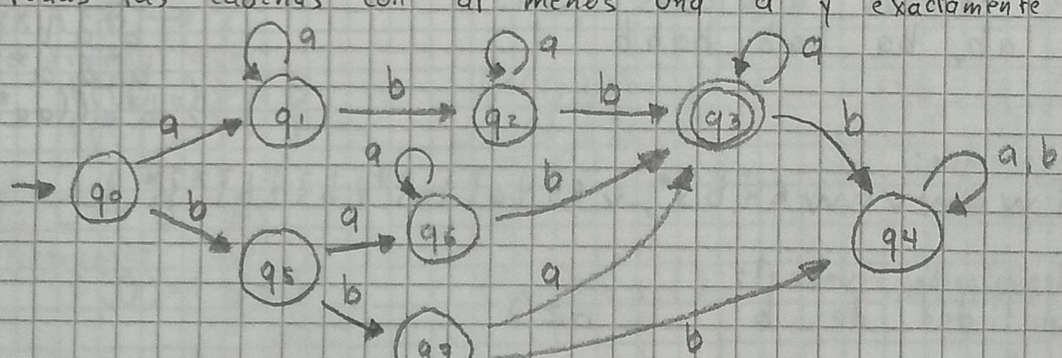
b) todas las cadenas con al menos una a



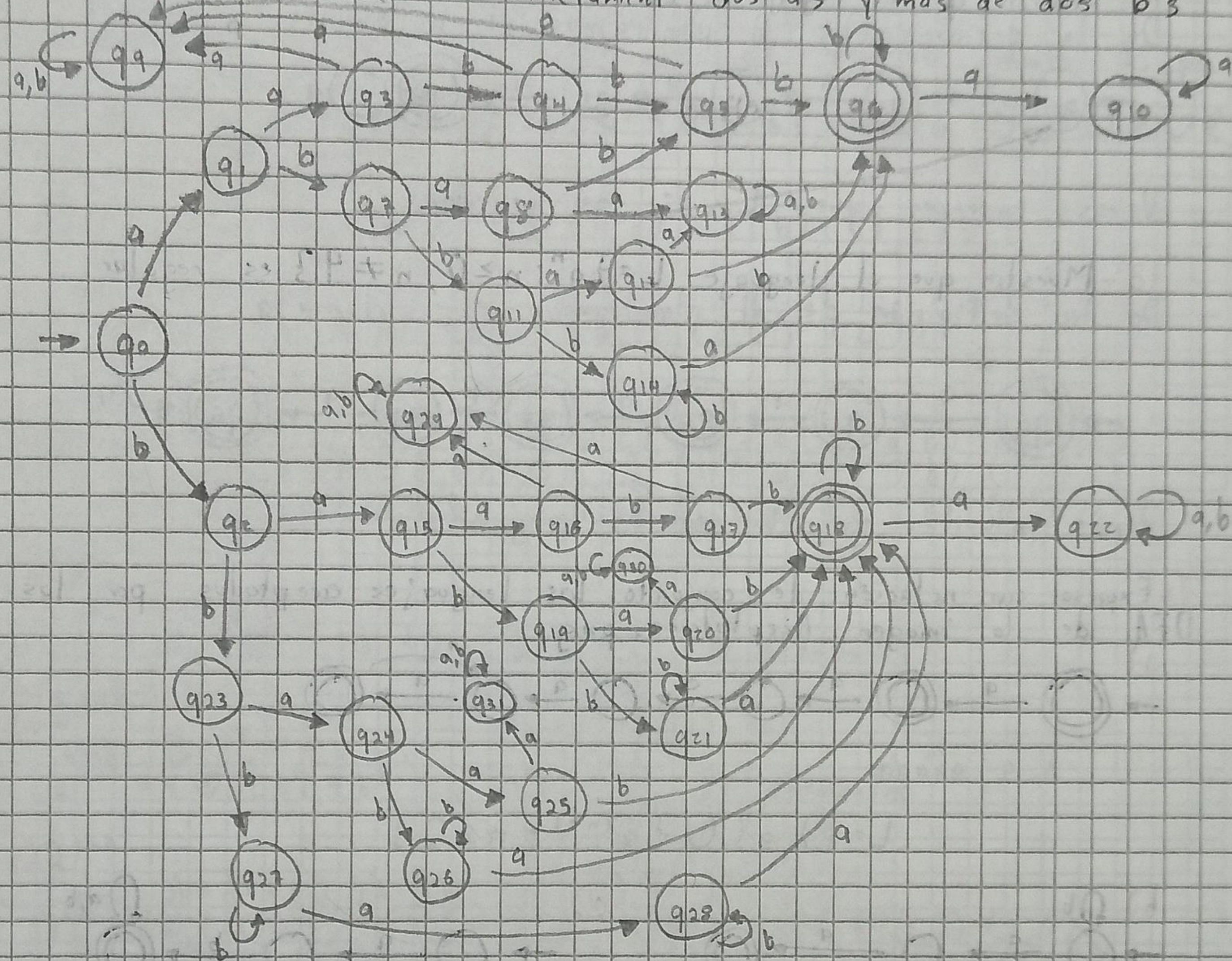
c) todas las cadenas con no más de tres a's



d) todas las cadenas con al menos una a y exactamente dos b's



e) todas las cadenas con exactamente dos a's y más de dos b's



11- Muestre que el lenguaje $L = \{vwv : v, w \in \{a,b\}^*, |v| = 2\}$ es regular

Se dice que un lenguaje es regular si y sólo si se cumple cualquiera de las siguientes características:

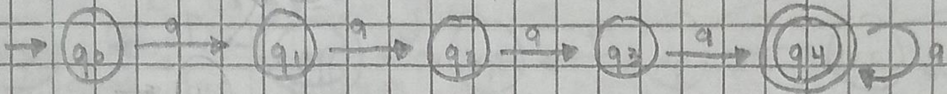
- Tiene al menos una gramática regular G que lo produce
- Puede ser reconocido por un autómata finito A
- Existe una expresión regular Er que represente a todas las cadenas de L

Observemos que la siguiente expresión regular expresa al lenguaje dado:

$$(aa+ab+ba+bb)(a+b)^*(aa+ab+ba+bb)$$

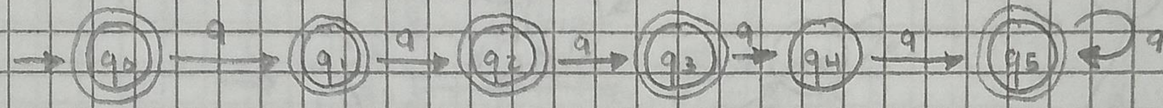
Por lo tanto L sí es regular

12- Muestre que el lenguaje $L=\{a^n : n \geq 4\}$ es regular
De la definición de 11 planteamos el automata



Vemos entonces que L sí es regular

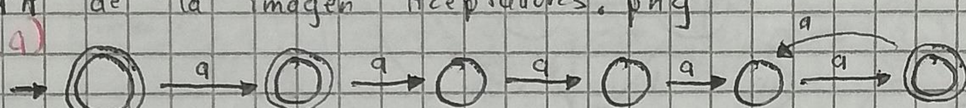
13- Muestre que el lenguaje $L=\{a^n : n \geq 0, n \neq 4\}$ es regular
De la definición de 11 planteamos el automata



Vemos entonces que L sí es regular

7- Expresar con notación de conjunto los lenguajes aceptados por los DFA de la imagen Aceptadores.png

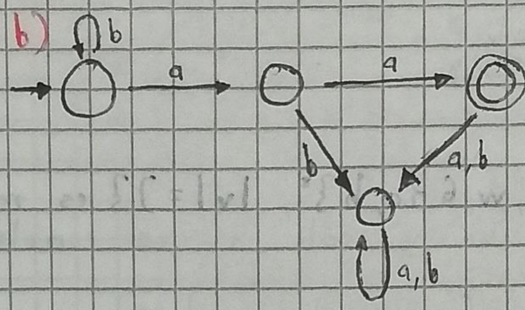
a)



λ, a, aaaaa,

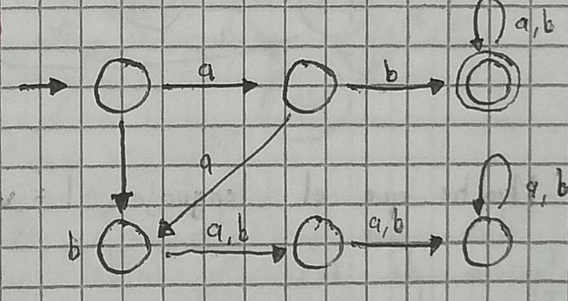
$$L=\{\lambda, a\} \cup \{a^{2n+1} : n \geq 2\}$$

b)



$$L=\{w\,aa : w \in \{b\}^*\}$$

c)



$$L=\{abw : w \in \{a,b\}^*\}$$

05 / 11 / 20

Tarea 2: Aceptadores finitos no deterministas (NFA)

1.- Resolver los ejercicios 2, 4, 5, 6, 7, 8, 11, 12, 14, 16 y 21 del libro de Peter Linz sección 2.2

2.- Encuentra un DFA que acepte el lenguaje definido por el NFA:

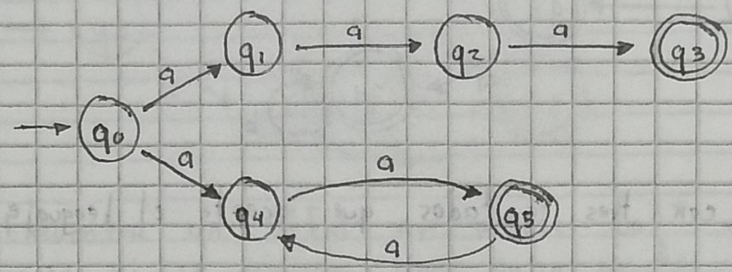


Figura 2.8

$L = \{aaa\} \cup \{a^{2n} : n \geq 1\}$

4.- En

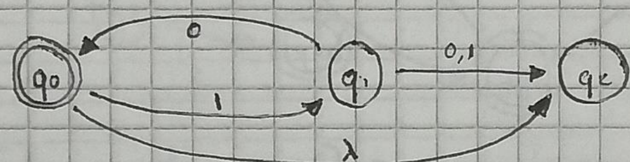


Figura 2.9

encuentra $\delta^*(q_0, 1011)$ y $\delta^*(q_1, 01)$

Para $\delta^*(q_0, 1011)$

$q_0 \xrightarrow{1} q_1 \xrightarrow{0} q_0 \xrightarrow{1} q_1 \xrightarrow{q_2} q_2$

$q_1 \rightarrow q_2$

$\delta^*(q_0, 1011) = \{q_2\}$

Para $\delta^*(q_0, 01)$

$q_0 \rightarrow ?$

Como $\delta(q_0, 0) = \emptyset$

$\delta^*(q_0, 01) = \emptyset$!

5.- En

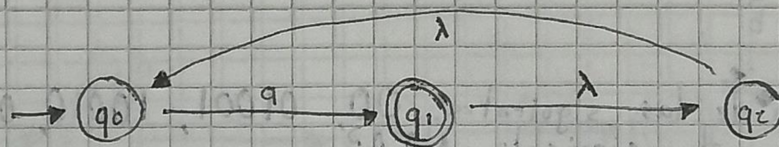


Figura 2.10

encuentra $\delta^*(q_0, a)$ y $\delta^*(q_1, \lambda)$

$\delta^*(q_0, a) = \{q_0, q_1, q_2\}$

$\delta^*(q_1, \lambda) = \{q_0, q_2\}$

6.- Para el NFA de la figura 2.9 encuentra $\delta^*(q_0, 1010)$ y $\delta^*(q_1, 00)$

$q_0 \xrightarrow{1} q_1 \xrightarrow{0} q_0 \xrightarrow{1} q_1 \xrightarrow{0} q_0$

$q_1 \rightarrow q_2$; $q_1 \rightarrow q_2$

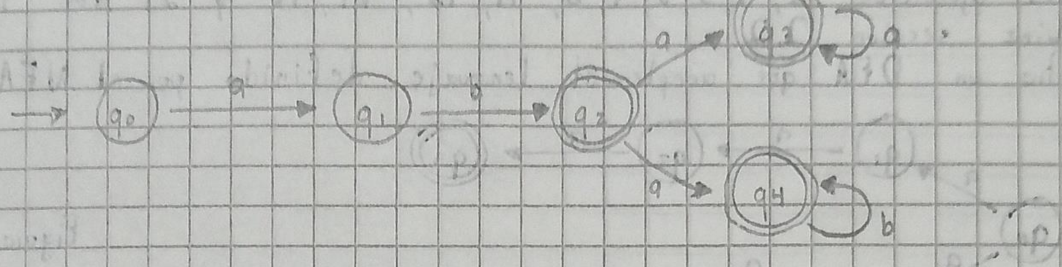
$\delta^*(q_0, 1010) = \{q_0, q_2\}$

$q_1 \xrightarrow{0} q_0 \xrightarrow{0} ?$

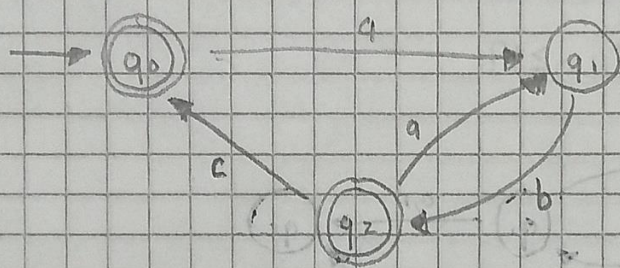
$q_1 \rightarrow q_2 \rightarrow ?$

$\delta^*(q_1, 00) = \emptyset$!

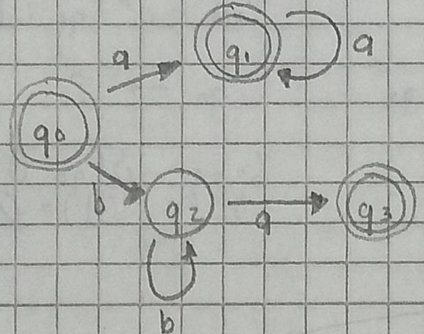
7- Diseña un NFA con no más de cinco estados para el conjunto $\{abab^n : n > 0\} \cup \{aba^n : n \geq 0\}$



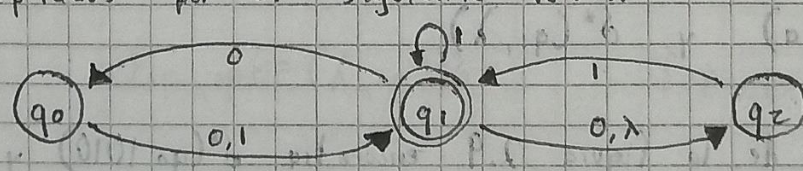
8- Construye un NFA con tres estados que acepte el lenguaje $\{ab, abc\}^*$



11- Encuentra un NFA con cuatro estados para $L = \{a^n : n \geq 0\} \cup \{b^n a : n \geq 1\}$

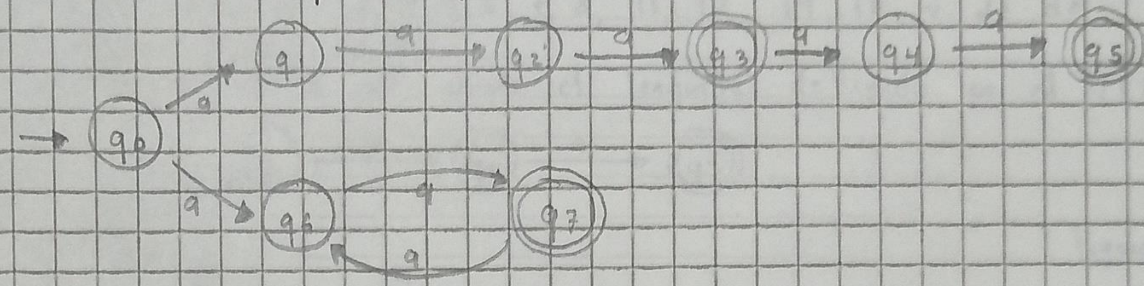


12- ¿Cuáles cadenas de las siguientes: 00, 01001, 10010, 000, 0000 son aceptados por el siguiente NFA?

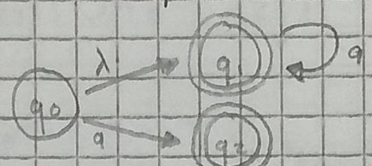


00 no se acepta
01001 sí se acepta
10010 no se acepta
000 sí se acepta
0000 no se acepta

14 - Sea L el lenguaje aceptado por el NFA de la figura 2.8. Encuentra un NFA que acepte $L \cup \{a^5\}$

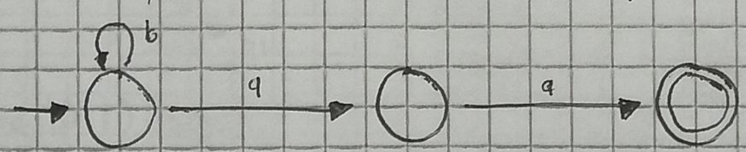


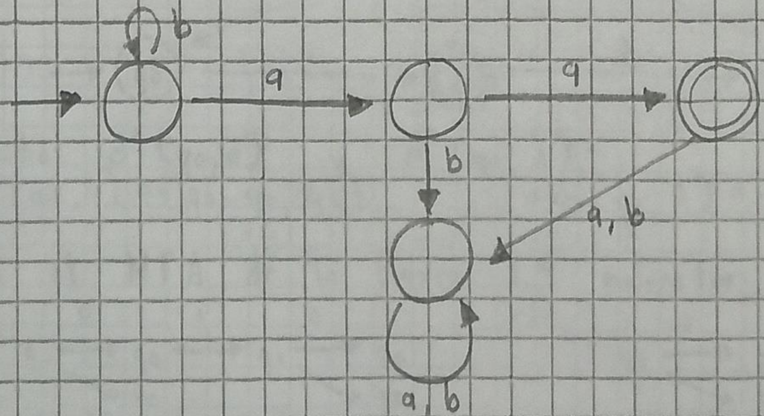
16 - Encuentra un NFA que acepte $\{a\}^*$ y que en su grafo de transición si se remueve una única arista (sin otros cambios) el autómata resultante acepte $\{a\}$



Eliminaríamos la transición λ

21 - Un NFA en el que a) no hay transiciones λ y b) para todo $q \in Q$ y toda $a \in \Sigma$, $\delta(q,a)$ contiene a lo sumo un elemento, es a veces llamado un DFA incompleto. Esto es lógico ya que las condiciones causan que nunca haya alguna elección en el movimiento. Para $\Sigma = \{a, b\}$, convierte el DFA incompleto siguiente a DFA estándar





07/12/20

Tarea: Aceptadores no deterministas de pila

1- Resolver los ejercicios 10, 11, 12, 4a, 4b y 4c del libro de Peter Linz sección 7.1

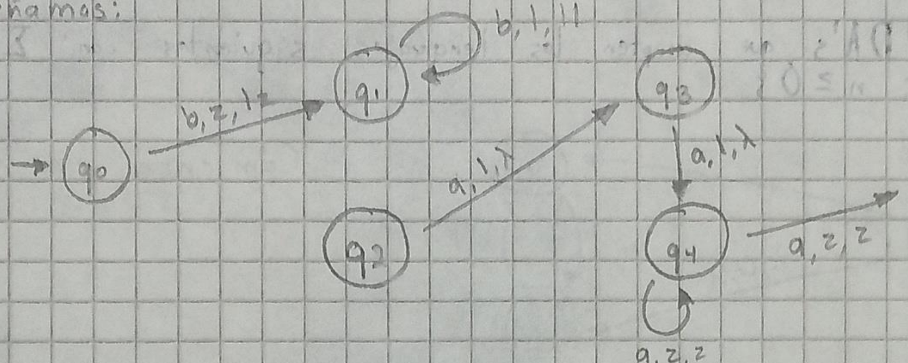
10- ¿Cuál lenguaje es aceptado por el PDA?

$$M=(\{q_0, q_1, q_2, q_3, q_4, q_5\}, \{a,b\}, \{0,1,a,z\}, \delta, z, q_0, \{q_5\})$$

con:

$$\delta(q_0, b, z) = \{(q_1, 1z)\}$$
$$\delta(q_1, b, 1) = \{(q_1, 11)\}$$
$$\delta(q_2, a, 1) = \{(q_3, \lambda)\}$$
$$\delta(q_3, a, 1) = \{(q_4, \lambda)\}$$
$$\delta(q_4, a, z) = \{(q_4, z), (q_5, z)\}$$

Diseñamos:



No hay forma de llegar a q_5

Por lo tanto no existe lenguaje para M

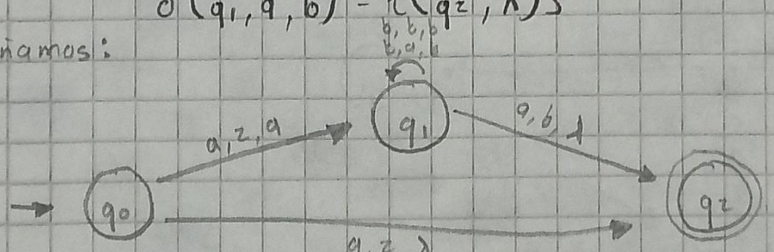
11- ¿Qué lenguaje es aceptado por el siguiente NPDA?

$$M=(\{q_0, q_1, q_2\}, \{a,b\}, \{a,b,z\}, \delta, q_0, z, \{q_2\})$$

con

$$\delta(q_0, a, z) = \{(q_1, a), (q_2, \lambda)\}$$
$$\delta(q_1, b, a) = \{(q_1, b)\}$$
$$\delta(q_1, b, b) = \{(q_1, b)\}$$
$$\delta(q_1, a, b) = \{(q_2, \lambda)\}$$

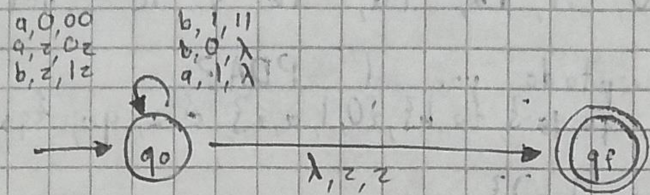
Diseñamos:



Vemos que se acepta a, aba, abba

$$L=\{awa : w \in \{b\}^*\}$$

12 - ¿Qué lenguaje es aceptado por el NPDA en el ejemplo 7.4 si usamos como $F = \{q_0, q_f\}$?



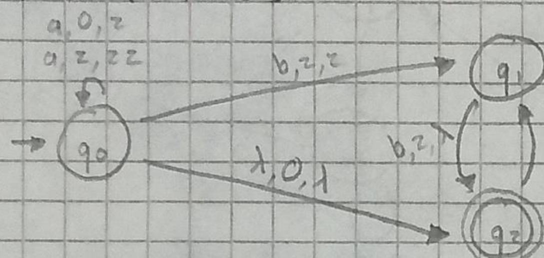
Aceptamos λ

a aa ab

$L = \{w : w \in \{a,b\}^*\}$

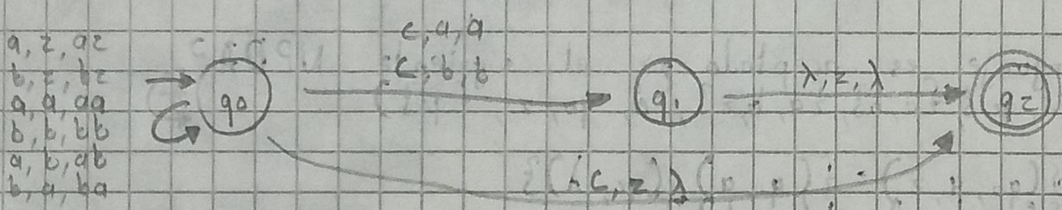
4 - Construye NPDA's que acepten los lenguajes siguientes con $\Sigma = \{a, b, c\}$

a) $L = \{a^n b^{2n} : n \geq 0\}$



Comienza en 0

b) $L = \{wcw^R : w \in \{a,b\}^*\}$



Comienza en Z

c) $L = \{a^n b^m c^{n+m} : n \geq 0, m \geq 0\}$