0: Preliminares

Contenido:
- Números reales, estimación y lógica
- Desigualdades y valor absoluto
- El sistema de coordenadas rectangulares
- Gráficas de ecuaciones
- Funciones y sus gráficas
- Operaciones con funciones
- Funciones trigonométricas

0.1 Números reales estimación y lógica

Ejemplo 1: Los decimales periódicos son racionales

Demuestre que $x = 0.136136136...$ representa un número racional

Como $x = 0.136136136...$ entonces $136.136136... = 1000x$

Ahora, restando:

$$\begin{aligned} 1000x &= 136.136136136... \\ - \quad x &= 0.136136136... \\ \hline 999x &= 136 \end{aligned}$$

$$\therefore \quad x = \frac{136}{999}$$

$\boxed{//}$

Ejemplo 2: Estimación

Calcular $(\sqrt{430} + 72 + \sqrt[3]{7.5})/2.75$

$$\frac{\sqrt{430} + 72 + \sqrt[3]{7.5}}{2.75} = 34.434$$

Ejemplo 4:

Demuestre que si n^2 es par, entonces n es par

Usando la contrapositiva del enunciado, proponemos:

Si n^2 no es par, entonces n no es par

Así, si n es impar, existe un entero k tal que $n = 2k+1$

$$\begin{aligned} \rightarrow n^2 &= (2k+1)^2 \\ &= 4k^2 + 4k + 1 \\ &= 2(2k^2 + 2k) + 1 \end{aligned}$$ $\rightarrow$ este número es impar

Por lo tanto, n^2 es igual a uno más que el doble de un entero y demostramos la contrapositiva. Al hacerlo, demostramos también la original $\boxed{//}$

Ejemplo 5:

¿Cuál de las siguientes proposiciones son verdaderas?

a) Para toda x, $x^2 > 0$

Falsa, basta con encontrarse con $x = 0$, donde $x^2 = 0$ que incumple la proposición anterior

b) Para toda x, $x < 0 \rightarrow x^2 > 0$
Verdadero. Si x es negativa, x^2 será positivo

c) Para cada x, existe una y tal que $y > x$
Verdadero. ¿Existe un número mayor que x? Basta con elegir a y como $x+1$

d) Existe una y tal que, para toda x, $y > x$
Falso. El enunciado dice que existe un número real que es mayor que todos los números reales, esto es falso y puede demostrarse fácilmente por contradicción

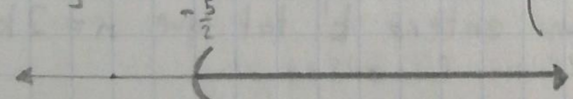
Suponemos que existe un número real mayor que todos, y.
Sea $x = y+1$, entonces $x > y$, lo cual es contrario a la suposición de que y es el mayor número real

0.2 Desigualdades y valor absoluto

Ejemplo 1:
Resuelva la desigualdad $2x-7 < 4x-2$ y muestre la gráfica de su conjunto solución

$$2x-7 < 4x-2$$
$$-7 < 2x-2$$
$$-5 < 2x$$
$$\therefore -\frac{5}{2} < x$$

El conjunto solución de x es $\left(-\frac{5}{2}, \infty\right)$

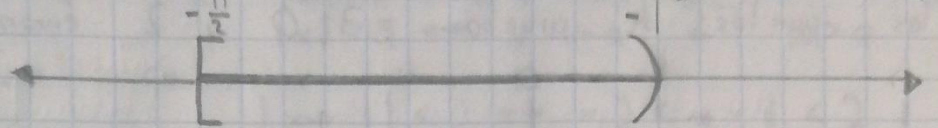


Ejemplo 2:
Resuelva $-5 \leq 2x+6 < 4$
Separamos

$$-5 \leq 2x+6 \qquad\qquad 2x+6 < 4$$
$$-11 \leq 2x \qquad\qquad 2x < -2$$
$$-\frac{11}{2} \leq x \qquad\qquad x < -1$$

$$\therefore -\frac{11}{2} \leq x < -1$$

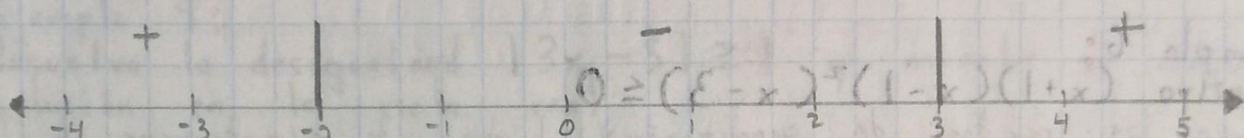
El conjunto solución de x es $\left[-\frac{11}{2}, -1\right)$



Ejemplo 3:
Resuelva la desigualdad cuadrática $x^2 - x < 6$

$$x^2 - x < 6$$
$$x^2 - x - 6 < 0$$
$$(x-3)(x+2) < 0$$

Vemos que -2 y 3 son los puntos de separación que dividen la recta en tres intervalos: $(-\infty, -2)$, $(-2, 3)$ y $(3, \infty)$



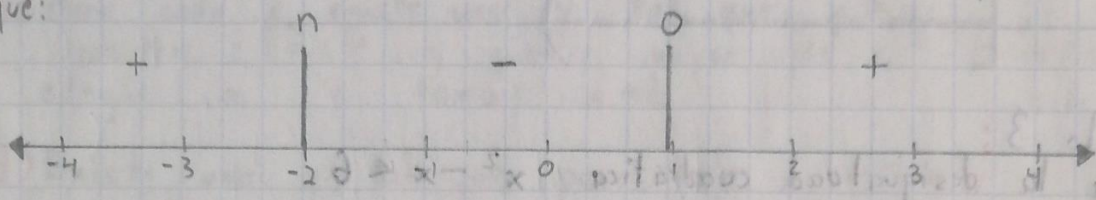
La información que hemos obtenido nos permite concluir que el conjunto solución para $(x-3)(x+2) < 0$ es el intervalo $(-2, 3)$

Ejemplo 4:
Resuelva $3x^2 - x - 2 > 0$
Ya que:
$$3x^2 - x - 2 = (3x+2)(x-1)$$
$$= 3\left(x + \tfrac{2}{3}\right)(x-1)$$
Los puntos de separación son $-\frac{2}{3}$ y 1 y notamos que en el intervalo $\left(-\infty, -\frac{2}{3}\right)$ la ecuación es positiva. En el intervalo $\left(-\frac{2}{3}, 1\right)$ la ecuación es negativa, y en el intervalo $(1, \infty)$ la ecuación es positiva. Encontramos que el primer y tercer intervalo son los que cumplen y expresamos que la solución es:
$$\left(-\infty, -\frac{2}{3}\right) \cup (1, \infty)$$

Ejemplo 5:
Resuelva $$\frac{x-1}{x+2} \geq 0$$

Podríamos pensar en multiplicar ambos lados por $x+2$ pero esto conduce a un dilema inmediato dado que $x+2$ puede ser positivo o negativo.
Para evitar este problema, observamos que este cociente

puede cambiar de signo en los puntos de separación del numerador y del denominador, esto es en 1 y -2.
A partir de los puntos de prueba $-3, 0$ y 2 encontramos que:

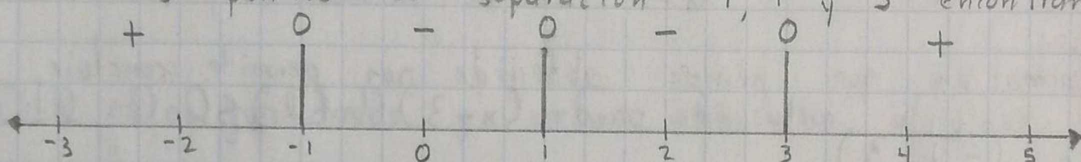


En este caso denotamos como n al cociente que no está definido en -2.
Concluimos que el conjunto solución es:

$$(-\infty, -2) \cup [1, \infty)$$

Ejemplo 6:
Resuelva $(x+1)(x-1)^2(x-3) \leq 0$

Con los puntos de separación -1, 1 y 3 encontramos:



Concluimos que el conjunto solución es: $[-1, 3]$

Ejemplo 7:
Resuelva $2.9 < \dfrac{1}{x} < 3.1$

Rápidamente podemos multiplicar la desigualdad por x, ya que $\frac{1}{x}$ debe estar entre 2.9 y 3.1, lo que garantiza que x será positivo

$$2.9x < 1 < 3.1x$$

$$2.9x < 1 \qquad\qquad 1 < 3.1x$$

$$x < \frac{1}{2.9} \qquad\qquad \frac{1}{3.1} < x$$

Así:

$$\frac{1}{3.1} < x < \frac{1}{2.9} \rightarrow \frac{10}{31} < x < \frac{10}{29}$$

Concluimos que el conjunto solución es:

$$\left(\frac{10}{31}, \frac{10}{29}\right)$$

Ejemplo 8:
Resuelva la desigualdad $|x-4| < 2$ y muestre el conjunto solución en la recta real. Interprete el valor absoluto como una distancia.

Sabemos que:

$$|x| < a \leftrightarrow -a < x < a$$
$$|x| > a \leftrightarrow x < -a \quad ó \quad x > a$$

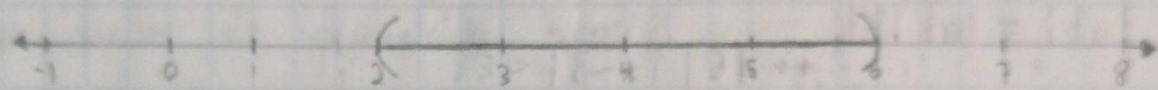
Sustituyendo:

$$|x-4| < 2 \leftrightarrow -2 < x-4 < 2$$

Obtenemos:

$$2 < x < 6$$

El conjunto solución es $(2, 6)$



Ejemplo 9:

Resuelva la desigualdad $|3x-5| \geq 1$ y muestre su conjunto solución en la recta real

Dado que $|x| > a \leftrightarrow x < -a \quad ó \quad x > a$

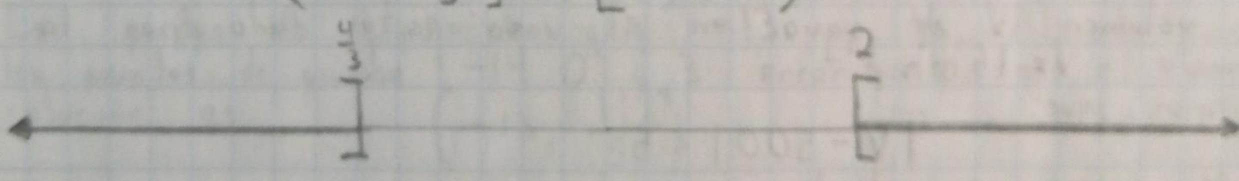
Sustituimos

$$|3x-5| \geq 1 \leftrightarrow 3x-5 \leq -1 \quad ó \quad 3x-5 \geq 1$$

$$3x \leq 4 \qquad\qquad 3x \geq 6$$
$$x \leq \frac{4}{3} \qquad\qquad x \geq \frac{6}{3}$$

El conjunto solución es:

$$\left(-\infty, \frac{4}{3}\right] \cup [2, \infty)$$



Ejemplo 10:

Sea ε (épsilon) un número positivo. Demuestre que

$$|x-2| < \frac{\varepsilon}{5} \leftrightarrow |5x-10| < \varepsilon$$

En términos de distancia, lo anterior quiere decir que la distancia entre x y 2 es menor a $\frac{\varepsilon}{5}$ si y sólo si la distancia entre $5x$ y 10 es menor que ε

$$|x-2| < \frac{\varepsilon}{5} \leftrightarrow |5x-10| < \varepsilon$$

Multiplicamos la primera parte por 5

$$5|x-2| < \varepsilon \leftrightarrow$$

Como $|5| = 5$

$$|5||x-2| < \varepsilon \leftrightarrow$$

$$|5(x-2)| < \varepsilon \leftrightarrow$$
$$|5x-10| < \varepsilon \leftrightarrow |5x-10| < \varepsilon$$

$\boxed{//}$

Ejemplo 11:
Sea ε un número positivo. Encuentre un número positivo δ (delta) tal que
$$|x-3| < \delta \rightarrow |6x-18| < \varepsilon$$

$$|6x-18| < \varepsilon \leftrightarrow |6(x-3)| < \varepsilon$$
Como $|ab| = |a|\,|b|$
$$\leftrightarrow |6|\,|x-3| < \varepsilon$$
Como $|6| = 6$
$$\leftrightarrow 6|x-3| < \varepsilon$$
$$\leftrightarrow |x-3| < \frac{\varepsilon}{6}$$

Y como $|x-3| < \delta$ implica $|6x-18| < \varepsilon$ también implica $|x-3| < \frac{\varepsilon}{6}$, por lo tanto, elegimos $\delta = \frac{\varepsilon}{6}$, aunque también cualquier número positivo δ más pequeño que $\frac{\varepsilon}{6}$ es aceptable

Ejemplo 12:
Un vaso de precipitados de medio litro ($500\ cm^3$) tiene un radio interno de 4 cm. ¿Con qué exactitud debemos medir la altura h del agua en el vaso para asegurar que tenemos medio litro de agua con un error de menos del 1%, esto es, un error de menos de $5\ cm^3$?
El volumen V de agua en el vaso está dado por la fórmula $V = 16\pi h$
Queremos que:
$$|V-500| < 5$$
O de manera equivalente
$$|16\pi h - 500| < 5$$
Ahora:
$$|V-500| < 5 \leftrightarrow |16\pi h - 500| < 5$$
$$\leftrightarrow 16\pi \left| h - \frac{500}{16\pi} \right| < 5$$
$$\leftrightarrow \left| h - \frac{500}{16\pi} \right| < \frac{5}{16\pi}$$
$$\leftrightarrow |h - 9.947| < 0.09947$$
$$\leftrightarrow -0.09947 < h - 9.947 < 0.09947$$
$$\leftrightarrow 9.89523 < h < 10.04647$$
h puede estar entre esos valores
$10.04647 - 9.89523 = 0.15124 \Rightarrow$ debemos medir la altura con

una precisión de alrededor 1 milímetro

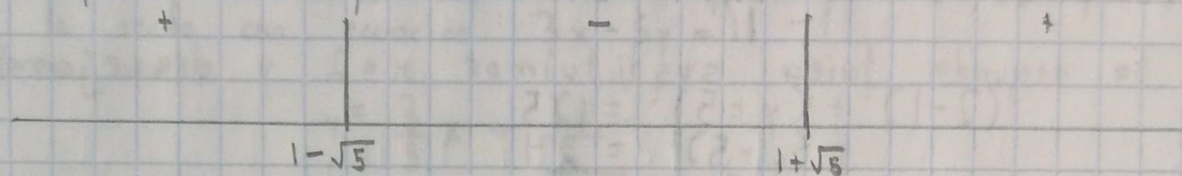
Ejemplo 13:
Resuelva $x^2 - 2x - 4 \leq 0$
Las dos soluciones son

$$x_1 = \frac{-(-2) - \sqrt{4+16}}{2} = 1 - \sqrt{5} = -1.236$$

y

$$x_2 = \frac{-(-2) + \sqrt{4+16}}{2} = 1 + \sqrt{5} = 3.236$$

Los puntos de separación son:



Así el conjunto solución es

$$\left[1-\sqrt{5},\ 1+\sqrt{5}\right]$$

Ejemplo 14:
Resuelva la desigualdad $|3x+1| < 2|x-6|$

$$\begin{aligned}
|3x+1| < 2|x-6| &\leftrightarrow |3x+1| < |2x-12| \\
&\leftrightarrow (3x+1)^2 < (2x-12)^2 \\
&\leftrightarrow 9x^2 + 6x + 1 < 4x^2 - 48x + 144 \\
&\leftrightarrow 5x^2 + 54x - 143 < 0 \\
&\quad (x+13)(5x-11) < 0
\end{aligned}$$

Los puntos de separación son -13 y $\frac{11}{5}$. Al utilizar los puntos de quiebra -14, 0 y 3 encontramos que el conjunto solución es:

$$\left(-13,\ \frac{11}{5}\right)$$

0.3 El Sistema de coordenadas rectangulares

Ejemplo 1:
Encuentre la distancia entre
a) $P(-2, 3)$ y $Q(4, -1)$
b) $P(\sqrt{2}, \sqrt{3})$ y $Q(\pi, \pi)$
a)

$$\begin{aligned}
d(P, Q) &= \sqrt{(4-(-2))^2 + (-1-3)^2} \\
&= \sqrt{36+16} \\
&= \sqrt{52} \\
&= 7.21
\end{aligned}$$

b)

$$d(P,Q)=\sqrt{(\pi-\sqrt{2})^2+(\pi-\sqrt{3})^2}$$
$$=\sqrt{4.971}$$
$$=2.23$$

Ejemplo 2:

Determine la ecuación estándar de una circunferencia de radio 5 y centro en $(1,-5)$. También encuentre las ordenadas de los dos puntos en ésta circunferencia con abscisa 2

La ecuación es:

$$(x-1)^2+(y+5)^2=25$$

Para la segunda tarea sustituimos $x=2$ y despejamos

$$(2-1)^2+(y+5)^2=25$$
$$(y+5)^2=24$$
$$y+5=\pm\sqrt{24}$$
$$y=-5\pm\sqrt{24}$$

Así:

$$y=-5\pm\sqrt{24}$$

Ejemplo 3:

Demuéstre que la ecuación

$$x^2-2x+y^2+6y=-6$$

representa una circunferencia y determine su centro y su radio

Completamos el cuadrado en el caso de x:

$$x^2-2x+1+y^2+6y=-6+1$$

Completamos el cuadrado para el caso de y:

$$x^2-2x+1+y^2+6y+9=-6+1+9$$
$$(x-1)^2+(y+3)^2=4$$

La última ecuación está en forma estándar. Es una circunferencia con centro en $(1,-3)$ y radio $r=2$. $\boxed{//}$

Ejemplo 4:

Determine la ecuación de la circunferencia que tiene como un diámetro el segmento que va de $(1,3)$ a $(7,11)$

El centro tiene coordenadas:

$$\left(\frac{1+7}{2},\frac{3+11}{2}\right)=(4,7)$$

Por medio de la fórmula de la distancia, la longitud del diametro es:

$$\sqrt{(7-1)^2+(11-3)^2}=\sqrt{36+64}=10$$

Así que el radio es 5. La ecuación completa es:

$$(x-4)^2+(y-7)^2=25$$

Ejemplo 5:
Determine una ecuación de la recta que pasa por $(-4,2)$ y $(6,-1)$
La pendiente es:

$$m = \frac{-1-2}{6+4} = -\frac{3}{10}$$

Si usamos $(-4,2)$ como punto fijo, obtenemos:

$$y-2 = -\frac{3}{10}(x+4)$$

Ejemplo 6:
Encuentre la ecuación de la recta que pasa por $(6,8)$ y es paralela a la recta con ecuación $3x-5y=11$
Reescribimos:

$$y = \frac{3}{5}x + \frac{11}{5}$$

A partir de aquí, usamos la ecuación punto pendiente:

$$y-8 = \frac{3}{5}(x-6)$$

Desarrollamos:

$$y = \frac{3}{5}x + \frac{22}{5}$$

Ejemplo 7:
Encuentre la ecuación de la recta que pasa por el punto de intersección de las rectas con ecuaciones $3x+4y=8$ y $6x-10y=7$ y que es perpendicular a la primera de estas rectas
Multiplicamos la primera ecuación por -2 y le sumamos la segunda ecuación:

$$\begin{array}{r} -6x-8y=-16 \\ 6x-10y=7 \\ \hline -18y=-9 \\ y=\frac{1}{2} \end{array}$$

Al sustituir y en cualquier ecuación hallamos $x=2$, así el punto de intersección será:

$$P\left(2,\frac{1}{2}\right)$$

Despejamos la primera ecuación:

$$y = -\frac{3}{4}x + 2$$

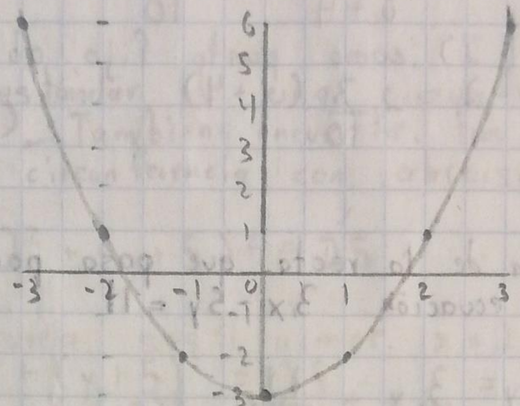
Una recta perpendicular a esta tiene por $m = 4/3$. La ecuación es:

$$y-\frac{1}{2} = \frac{4}{3}(x-2) \Rightarrow y = \frac{4}{3}x - \frac{13}{6}$$

0.4 Gráficas de ecuaciones

Ejemplo 1:
Haga la gráfica de $y = x^2 - 3$

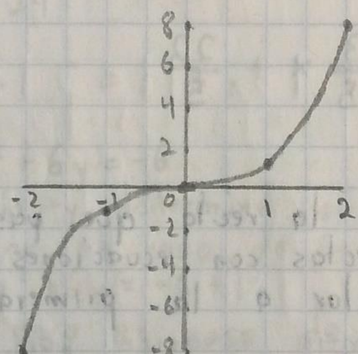
x	y
-3	6
-2	1
-1	-2
0	-3
1	-2
2	1
3	6



Ejemplo 2:
Haga un bosquejo de la gráfica $y = x^3$
La gráfica será simétrica con respecto al origen

x	y
0	0
1	1
2	8

Así sabemos de la existencia de $P(-2,-8)$



Ejemplo 3:
Determine todas las intersecciones con los ejes coordenados de la gráfica $y^2 - x + y - 6 = 0$

Haciendo $y = 0$ observamos fácilmente que $x = -6$

Haciendo $x = 0$ tenemos

$$y^2 + y - 6 = 0$$
$$(y+3)(y-2) = 0$$

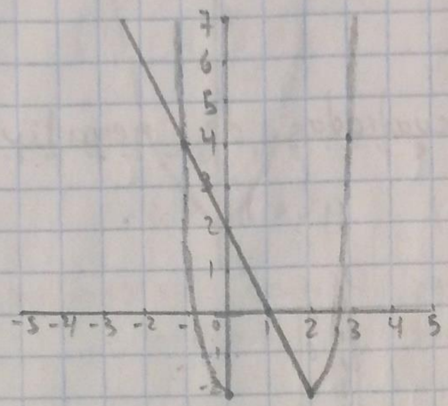
Encontramos $y = -3,\ y = 2$

Ejemplo 4:
Determine los puntos de intersección de la recta $y = -2x + 2$ y la parábola $y = 2x^2 - 4x - 2$ y bosqueje ambas gráficas en un mismo plano cartesiano

$$-2x + 2 = 2x^2 - 4x - 2$$
$$0 = 2x^2 - 2x - 4$$

$0 = 2(x+1)(x-2)$

$x = -1, \quad x = 2$



0.5 Funciones y sus gráficas

Ejemplo 1:

Para $f(x) = x^2 - 2x$ determine y simplifique

a) $f(4)$

b) $f(4+h)$

c) $f(4+h) - f(4)$

d) $\dfrac{f(4+h) - f(4)}{h}$

a) $(4)^2 - 2(4)$

$16 - 8$

8

b) $(4+h)^2 - 2(4+h)$

$16 + 8h + h^2 - 8 - 2h$

$8 + 6h + h^2$

c) $(8 + 6h + h^2) - 8$

$6h + h^2$

d) $\dfrac{6h + h^2}{h}$

$\dfrac{\cancel{h}(6+h)}{\cancel{h}}$

$6 + h$

Ejemplo 2:

Determine los dominios naturales para

a) $f(x) = \dfrac{1}{x-3}$

b) $g(t) = \sqrt{9 - t^2}$

c) $h(w) = \dfrac{1}{\sqrt{9 - w^2}}$

a) Debemos evitar la división entre cero, es decir:

$$x - 3 \neq 0$$
$$\therefore x \neq 3$$
$$\therefore D = \{x : x \neq 3\}$$

b) Debemos evitar las raíces cuadradas de negativos:

$$9 - t^2 \geq 0$$
$$9 \geq t^2$$
$$\sqrt{9} \geq \sqrt{t^2}$$

Como $\sqrt{x^2} = |x|$

$$3 \geq |t|$$
$$\therefore D = \{t : |t| \leq 3\}$$

c) Evitaremos negativos y el cero:

$$9 - w^2 > 0$$
$$9 > w^2$$
$$\sqrt{9} > \sqrt{w^2}$$
$$3 > |w|$$
$$\therefore D = \{w : |w| < 3\}$$

Ejemplo 3:

Denótese con $V(x, d)$ el volumen de una varilla cilíndrica de longitud x y diámetro d. Determine

a) una fórmula para $V(x, d)$

b) el dominio y rango de V

c) $V(4, 0.1)$

a) $$\text{Volumen} = \left[\pi\left(\frac{d}{2}\right)^2\right]x$$

$$V(x, d) = \frac{\pi x d^2}{4}$$

b) $$D = \{x : x > 0,\ d : d > 0\}$$

c) $$V(4, 0.1) = \frac{\pi(4)(0.1)^2}{4}$$
$$= \frac{\pi}{100}$$
$$\approx 0.031416$$

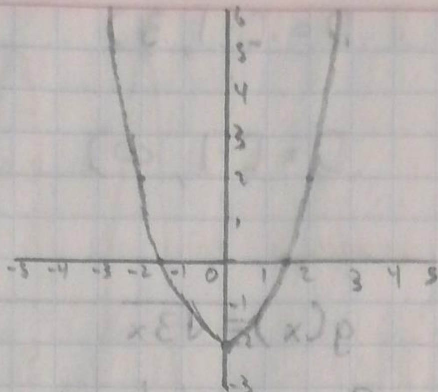
Ejemplo 4:

Bosqueje las gráficas de:

a) $f(x) = x^2 - 2$

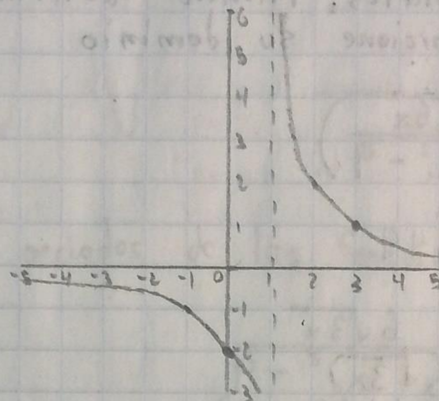
b) $g(x) = \dfrac{2}{x-1}$

a)



$D = \mathbb{R}$

b)



$D = \{x : x \neq 1\}$

Ejemplo 5:
¿La función
$$f(x) = \frac{x^3 + 3x}{x^4 - 3x^2 + 4}$$
es par, impar o ninguna de éstas?

Al graficarse esta función, se ve la simetría respecto al origen. Es una función impar

0.6 Operaciones con funciones

Ejemplo 1:
Sean $F(x) = \sqrt[4]{x+1}$ y $G(x) = \sqrt{9 - x^2}$ con dominios naturales respectivos $[-1, \infty)$ y $[-3, 3]$. Determine fórmulas para $F+G$, $F-G$, $F \cdot G$, F/G y F^5 y proporcione sus dominios naturales

$(F+G)(x) = \sqrt[4]{x+1} + \sqrt{9-x^2}$ $\quad D = [-1, 3]$

$(F-G)(x) = \sqrt[4]{x+1} + \sqrt{9-x^2}$ $\quad D = [-1, 3]$

$(F \cdot G)(x) = \sqrt[4]{x+1}\,\sqrt{9-x^2}$ $\quad D = [-1, 3]$

$\left(\frac{F}{G}\right)(x) = \frac{\sqrt[4]{x+1}}{\sqrt{9-x^2}}$ $\qquad D = [-1, 3)$

$F^5(x) = (\sqrt[4]{x+1})^5$ $\qquad D = [-1, \infty)$

Ejemplo 2:
Sean

$$f(x) = \frac{6x}{x^2-9} \quad y \quad g(x) = \sqrt{3x}$$

con sus dominios naturales. Pimero determine $(g \circ f)(12)$; luego $(f \circ g)(x)$ y proporcione su dominio

$$g(f(x))$$
$$\sqrt{3\left(\frac{6x}{x^2-9}\right)}$$

Evaluando en 12:

$$1.2649$$

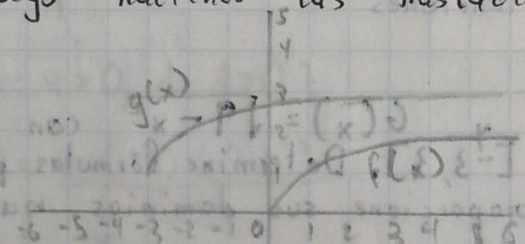
Ahora

$$(f \circ g)(x) = \frac{6\sqrt{3x}}{(\sqrt{3x})^2 - 9}$$
$$D = [0, 3) \cup (3, \infty)$$

Ejemplo 3:
Escriba la función $p(x) = (x+2)^5$ como una función compuesta $g \circ f$
Si $g \circ f$ es $p = g(f(x))$
podemos hacer:

$$g(x) = x^5 \quad y \quad f(x) = x + 2$$

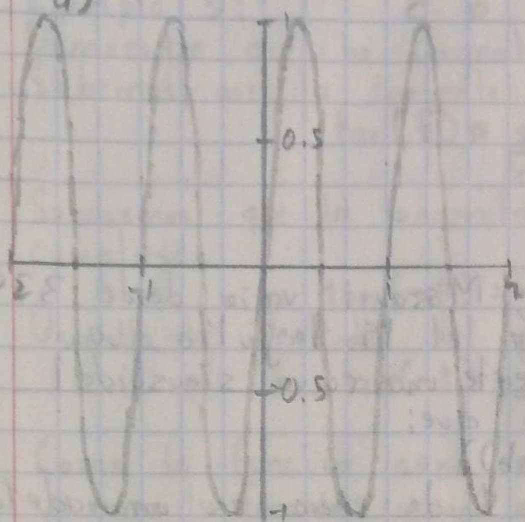
Ejemplo 4:
Bosqueje la gráfica de $g(x) = \sqrt{x+3} + 1$ graficando primero $f(x) = \sqrt{x}$ y luego haciendo las traslaciones adecuadas



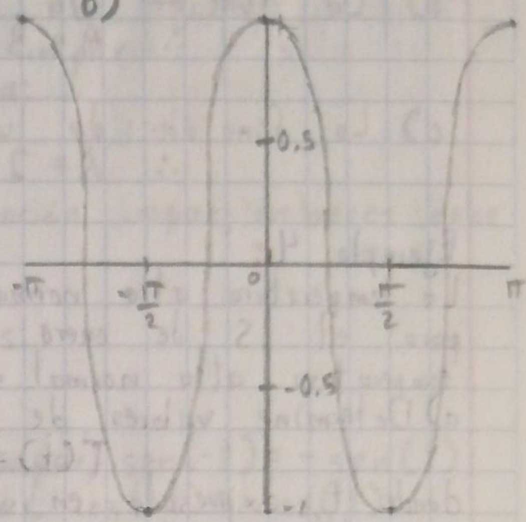
0.7 Funciones trigonométricas

Ejemplo 1:
Bosqueje las gráficas de
a) $y = \text{sen}(2\pi t)$
b) $y = \cos(2t)$

a)



b)



Ejemplo 2:

¿Cuáles son los periodos de las funciones siguientes?

a) $\text{sen}(2\pi t)$

b) $\cos(2t)$

c) $\text{sen}\left(\frac{2\pi t}{12}\right)$

a) Si tenemos $\text{sen}(2t)$ el periodo se reduce a la mitad, así $\frac{360}{2} = 180$ para

$\therefore \quad \frac{2\pi}{2\pi} = 1 \longrightarrow p = 1$

b) $\frac{2\pi}{2} = \pi \quad \therefore \quad p = \pi$

c) $\frac{\frac{2\pi}{1}}{\frac{2\pi}{12}} = \frac{2\pi(12)}{(1)2\pi} = 12 \quad \therefore \quad p = 12$

Ejemplo 3:

Determine la amplitud de las siguientes funciones periódicas

a) $\text{sen}\left(\frac{2\pi t}{12}\right)$

b) $3\cos(2t)$

c) $50 + 21\,\text{sen}\left(\frac{2\pi t}{12} + 3\right)$

a) La función da valores de -1 a 1

$\therefore \quad A = 1$

b) La función da valores de -3 a 3
$\therefore A = 3$

c) La función da valores de 29 a 71
$\therefore A = 21$

Ejemplo 4:
La temperatura alta normal para San Luis, Missouri varía desde $37°F$ para el 15 de enero hasta $89°F$ para el 15 de julio. La temperatura alta normal sigue aproximadamente una curva sinusoidal
a) Determine valores de C, A, a, b tales que:

$$T(t) = C + A \operatorname{sen}(a(t+b))$$

donde t, expresada en meses desde el 1 de enero es un modelo razonable para la temperatura alta normal
b) Utilice este modelo para aproximar la temperatura alta normal para el 15 de mayo

a)
La función debe tener periodo $t=12$, ya que al repetirse anualmente y expresarse en meses, se deduce el número $a = \frac{2\pi}{12}$
Para A:

$$89 - 37 = 52, \quad \frac{52}{2} = 26 \quad \therefore A = 26$$

Para C:

$$C = \frac{89+37}{2} = 63$$

Entonces:

$$T(t) = 63 + 26 \operatorname{sen}\left[\frac{2\pi}{12}(t+b)\right]$$

Para b:
Como la TNA inferior se da a mediados del primer mes, debemos satisfacer que

$$T(1/2) = 37$$

La función alcanza un mínimo en $t=-3$ y para recorrerlo a la derecha, $b = -7/2$
Así:

$$T(t) = 63 + 26 \operatorname{sen}\left[\frac{2\pi}{12}\left(t - \frac{7}{2}\right)\right]$$

b)

$$T(4.5) = 63 + 26 \operatorname{sen}\left[\frac{2\pi}{12}\left(4.5 - \frac{7}{2}\right)\right]$$

$$\therefore T(4.5) = 76°F$$

Ejemplo 5:

Demuestre que la tangente es una función impar

Sabemos que la tangente es equivalente a:

$$\tan(x) = \frac{\operatorname{sen}(x)}{\cos(x)}$$

Suponemos que la tangente sí es una función impar, entonces debe cumplirse:

$$\tan(-t) = -\tan(t)$$

Usando la identidad del principio, igualamos:

$$\tan(-t) = \frac{\operatorname{sen}(-t)}{\cos(-t)}$$

Como la función seno es una función impar, $\operatorname{sen}(-t) = -\operatorname{sen}(t)$
y como la función coseno es una función par, $\cos(-t) = \cos(t)$

$$\tan(-t) = \frac{-\operatorname{sen}(t)}{\cos(t)}$$
$$= -\frac{\operatorname{sen}(t)}{\cos(t)}$$
$$= -\tan(t)$$

Por lo tanto, $\tan(-t) = -\tan(t)$ lo que indica que es una función impar

$\boxed{/\!/}$

Ejemplo 6:

Verifique que las siguientes son identidades

a) $1 + \tan^2 t = \sec^2 t$

b) $1 + \cot^2 t = \csc^2 t$

a)
$$1 + \tan^2 t = 1 + \frac{\operatorname{sen}^2 t}{\cos^2 t}$$
$$= \frac{\cos^2 t + \operatorname{sen}^2 t}{\cos^2 t}$$
$$= \frac{1}{\cos^2 t}$$
$$= \sec^2 t$$

b)
$$1 + \cot^2 t = 1 + \frac{\cos^2 t}{\operatorname{sen}^2 t}$$
$$= \frac{\operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t}{\operatorname{sen}^2 t}$$
$$= \frac{1}{\operatorname{sen}^2 t}$$
$$= \csc^2 t$$

Ejemplo 7:
Determine la distancia recorrida por una bicicleta, cuyas ruedas tienen un radio de 30 cm cuando éstas han girado 100 revoluciones

1 revolución representan 188.495 cm

Así, sabemos que recorrió 18,849.556 cm

1: Límites

Contenido:
- Introducción a límites
- Estudio riguroso (formal) de los límites
- Teoremas de límites
- Límites que involucran funciones trigonométricas
- Límites al infinito; límites infinitos
- Continuidad de funciones

1.1 Introducción a límites

Ejemplo 1:
Determine $\lim_{x \to 3} (4x-5)$

Claramente, cuando x está cerca de 3, $4x-5$ está cerca de $(4)(3)-5=7$
Entonces escribimos:

$$\lim_{x \to 3} (4x-5) = 7$$

Ejemplo 2:
Encuentre:

$$\lim_{x \to 3} \frac{x^2-x-6}{x-3}$$

Vemos que para $x=3$, $\frac{x^2-x-6}{x-3}$ no está definida. Pero usando álgebra.
Simplificamos:

$$\lim_{x \to 3} \frac{x^2-x-6}{x-3} = \lim_{x \to 3} \frac{(x-3)(x+2)}{x-3} = \lim_{x \to 3} (x+2) = 3+2=5$$

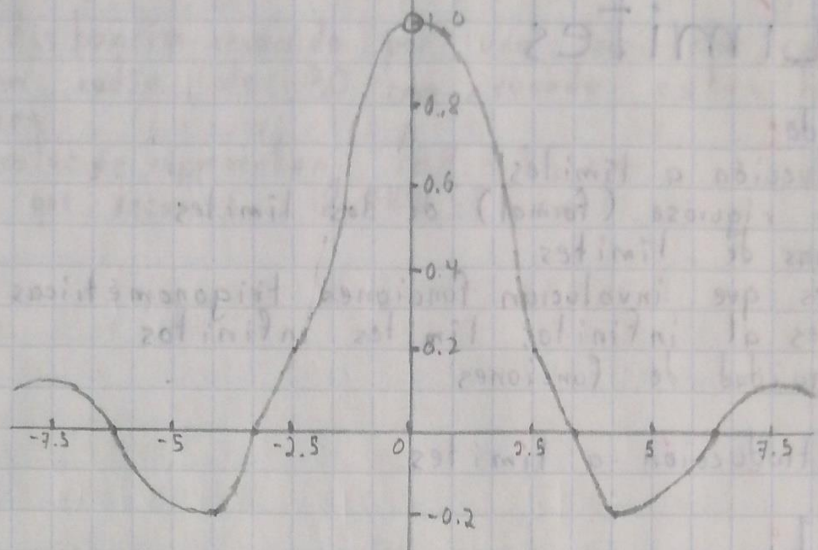
La cancelación de $x-3$ es válida mientras $x \neq 3$

Ejemplo 3:
Determine:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x}$$

Ningún truco algebraico simplificará la expresión.
Puede tabularse o graficarse con radianes
Obtendremos respectivamente:

x	$\frac{sen(x)}{x}$
1.0	0.84147
0.1	0.99833
0.01	0.99998
↓	↓
0	?
↑	↑
-0.01	0.99998
-0.1	0.99833
-1.0	0.84147



Nuestra conclusión, aunque poco firme, es que:

$$\lim_{x \to 0} \frac{sen(x)}{x} = 1$$

Ejemplo 4: Su calculadora puede engañarlo
Determine:

$$\lim_{x \to 0} \left[x^2 - \frac{\cos(x)}{10{,}000} \right]$$

$$\lim_{x \to 0} \left[x^2 - \frac{\cos(x)}{10{,}000} \right] = 0^2 - \frac{1}{10{,}000} = -\frac{1}{10{,}000}$$

Ejemplo 5: No hay límite en un salto
Determine: $\lim_{x \to 2} [\![x]\!]$

Recordemos que $[\![x]\!]$ denota al entero más grande que es menor o igual a x.
Observemos:

Para todos los números x menores a 2 pero cercanos a 2:

$$[\![x]\!] = 1$$

Para todos los números x mayores que 2 pero cercanos a 2:

$$[\![x]\!] = 2$$

No importa qué número propongamos para L, habrá x arbitrariamente cercanas a 2 a cada lado.
Concluimos que este límite no existe

Ejemplo 6: Demasiadas oscilaciones
Determine:

$$\lim_{x \to 0} \left[sen\left(\frac{1}{x}\right) \right]$$

Tabulamos:

x	$\text{sen}\left(\frac{1}{x}\right)$
$2/\pi$	1
$2/(2\pi)$	0
$2/(3\pi)$	-1
$2/(4\pi)$	0
$2/(5\pi)$	1
$2/(6\pi)$	0
$2/(7\pi)$	-1
$2/(8\pi)$	0
$2/(9\pi)$	1
$2/(10\pi)$	0
$2/(11\pi)$	-1
$2/(12\pi)$	0
$\downarrow$	$\downarrow$
0	?

Tras ver la tabla y luego de graficarla, concluimos que este límite no existe

1.2 Estudio riguroso (formal) de límites

Ejemplo 1:
Utilice la gráfica de $y = f(x) = 3x^2$ para determinar qué tan cercana debe estar x de 2 para garantizar que $f(x)$ esté a no menos de 0.05 de 12

Debemos tener:

$$11.95 < f(x) < 12.05$$

Despejando:

$$y = 3x^2$$
$$\rightarrow x = \sqrt{\frac{y}{3}}$$

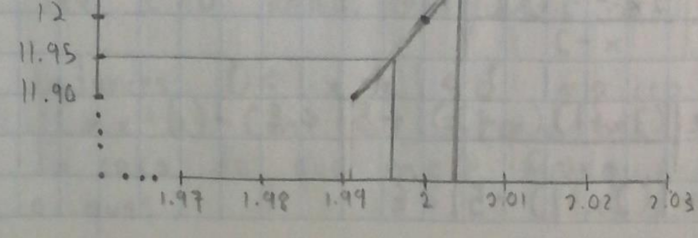
Sabemos así que, si se cumple:

$$\sqrt{\frac{11.95}{3}} < x < \sqrt{\frac{12.05}{3}}$$

entonces también se satisface:

$$11.95 < y < 12.05$$

Esto se ve a continuación:



Entonces:

$$1.99583 < x < 2.00416$$

De los dos extremos, el más cercano a 2 es el superior y se encuentra a 0.00416 de 2.

Ejemplo 2:

Demuestre que

$$\lim_{x \to 4} (3x-7) = 5$$

Análisis preliminar:

Sea ε cualquier número positivo. Debemos producir una $\delta > 0$ tal que:

$$0 < |x-4| < \delta \to |(3x-7)-5| < \varepsilon$$

Consideremos la desigualdad de la derecha:

$$\begin{aligned} |(3x-7)-5| < \varepsilon &\leftrightarrow |3x-12| < \varepsilon \\ &\leftrightarrow |3(x-4)| < \varepsilon \\ &\leftrightarrow |3|\,|x-4| < \varepsilon \\ &\leftrightarrow |x-4| < \frac{\varepsilon}{3} \end{aligned}$$

Ahora vemos cómo elegir δ; que es como $\delta = \varepsilon/3$. Claro, cualquier δ más pequeña funcionará.

Demostración formal:

Sea $\varepsilon > 0$ dada. Seleccionamos $\delta = \varepsilon/3$

Entonces $0 < |x-4| < \delta$ implica que

$$|(3x-7)-5| = |3x-12| = |3(x-4)| = 3|x-4| < 3\delta = \varepsilon$$

Por transitividad:

$$|(3x-7)-5| < \varepsilon$$

$\boxed{//}$

Ejemplo 3:

Demuestre que

$$\lim_{x \to 2} \frac{2x^2-3x-2}{x-2} = 5$$

Análisis preliminar:

Buscamos una δ tal que

$$0 < |x-2| < \delta \to \left| \frac{2x^2-3x-2}{x-2} \right| < \varepsilon$$

Ahora, para $x \neq 2$:

$$\left| \frac{2x^2-3x-2}{x-2} - 5 \right| < \varepsilon \leftrightarrow \left| \frac{(2x+1)(x-2)}{x-2} - 5 \right| < \varepsilon$$

$$\leftrightarrow |(2x+1)-5| < \varepsilon$$

$$\leftrightarrow |(2x-4)| < \varepsilon$$
$$\leftrightarrow |2(x-2)| < \varepsilon$$
$$\leftrightarrow |2|\,|x-2| < \varepsilon$$
$$\leftrightarrow |x-2| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Esto indica que $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$ funcionará

Demostración formal:

Sea $\varepsilon > 0$ dada. Elegimos $\delta = \varepsilon/2$

Así $0 < |x-2| < \delta$ implica que

$$\left|\frac{2x^2-3x-2}{x-2} - 5\right| = \left|\frac{(2x+1)(x-2)}{x-2} - 5\right| = |2x+1-5|$$
$$= |2(x-2)| = 2|x-2| < 2\delta = \varepsilon$$

La cancelación del factor $x-2$ es válida porque $0 < |x-2|$ implica que $x \neq 2$ y $\frac{x-2}{x-2} = 1$ siempre que $x \neq 2$

$\boxed{//}$

Ejemplo 4:

Demuestre que

$$\lim_{x \to c} (mx+b) = mc+b$$

Análisis preliminar:

Queremos encontrar una δ tal que

$$0 < |x-c| < \delta \rightarrow |(mx+b)-(mc+b)| < \varepsilon$$

Ahora:

$$|(mx+b)-(mc+b)| = |mx-mc|$$
$$= |m(x-c)|$$
$$= |m|\,|x-c|$$

Parece que $d = \frac{\varepsilon}{|m|}$ funciona, con tal que $m \neq 0$

Nótese que m podría ser positiva o negativa, por lo tanto se mantendrá el valor absoluto

---

Demostración formal:

Sea $\varepsilon > 0$ dada. Elegimos $\delta = \frac{\varepsilon}{|m|}$

Entonces $0 < |x-c| < \delta$ implica que

$$|(mx+b)-(mc+b)| = |mx-mc| = |m|\,|x-c| < |m|\,\delta = \varepsilon$$

En caso de que $m=0$, cualquier δ funcionará bien, debido a que:

$$|(0x-b)-(0c-b)|=|0|=0$$

Esto último es menor que ε para toda x $\blacksquare$

Ejemplo 5:

Demuestre que si $c>0$ entonces
$$\lim_{x \to c} \sqrt{x} = \sqrt{c}$$

Análisis preliminar:

Debemos determinar una δ tal que
$$0<|x-c|<\delta \to |\sqrt{x}-\sqrt{c}|<\varepsilon$$

Ahora:
$$|\sqrt{x}-\sqrt{c}| = \left|\frac{(\sqrt{x}-\sqrt{c})(\sqrt{x}+\sqrt{c})}{\sqrt{x}+\sqrt{c}}\right| = \left|\frac{x-c}{\sqrt{x}+\sqrt{c}}\right|$$
$$= \frac{|x-c|}{\sqrt{x}+\sqrt{c}} \le \frac{|x-c|}{\sqrt{c}}$$

Para hacer lo último menor que ε se requiere que tengamos $|x-c|<\varepsilon\sqrt{c}$

Demostración formal:

Sea $\varepsilon>0$ dada. Elegimos $\delta=\varepsilon\sqrt{c}$.
Entonces $0<|x-c|<\delta$ implica que
$$|\sqrt{x}-\sqrt{c}| = \left|\frac{(\sqrt{x}-\sqrt{c})(\sqrt{x}+\sqrt{c})}{\sqrt{x}+\sqrt{c}}\right| = \left|\frac{x-c}{\sqrt{x}+\sqrt{c}}\right| = \frac{|x-c|}{\sqrt{x}+\sqrt{c}} \le \frac{|x-c|}{\sqrt{c}} < \frac{\delta}{\sqrt{c}} = \varepsilon$$

Debido a que puede suceder que c esté muy cerca a 0 sobre el eje x, elegimos δ como el más pequeño entre c y $\varepsilon\sqrt{c}$ $\blacksquare$

Ejemplo 6:

Demuestre que
$$\lim_{x \to 3} (x^2+x-5) = 7$$

Análisis preliminar:

Hay que hallar una δ tal que
$$0<|x-3|<\delta \to |(x^2+x-5)-7|<\varepsilon$$

Ahora
$$|(x^2+x-5)-7| = |x^2+x-12| = |x+4|\,|x-3|$$

El factor $|x-3|$ puede hacerse tan pequeño como queramos y sabemos que $|x+4|$ estará alrededor de 7. Por ello buscamos una cota superior para $|x+4|$. Para hacer esto convenimos en hacer $\delta \leq 1$. Así $|x-3|<\delta$ implica que:

$$|x+4| = |x-3+7|$$

Por desigualdad del triángulo:

$$|x+4| \leq |x-3| + |7|$$
$$< 1+7 = 8$$

Entonces $\delta = \frac{\varepsilon}{8}$

Demostración formal:

Sea $\varepsilon > 0$ dado. Elegimos a $\delta = \min\{1, \varepsilon/8\}$

Entonces $0<|x-3|<\delta$ implica que:

$$|(x^2+x-5)-7| = |x^2+x-12| = |x+4||x-3| < 8 \cdot \frac{\varepsilon}{8} = \varepsilon$$

$\boxed{//}$

Ejemplo 7:

Demuestre que

$$\lim_{x \to c} x^2 = c^2$$

Sea $\varepsilon > 0$ dada. Elegimos como $\delta = \min\{1, \varepsilon/(1+2|c|)\}$

Entonces $0<|x-c|<\delta$ implica que

$$|x^2-c^2| = |x+c|\,|x-c| = |x-c+2c|\,|x-c|$$
$$\leq (|x-c|+2|c|)\,|x-c| \leftarrow \text{Desigualdad del triángulo}$$
$$< (1+2|c|)\,|x-c| < \frac{(1+2|c|)\cdot\varepsilon}{1+2|c|} = \varepsilon$$

$\boxed{//}$

Ejemplo 8:

Demuestre que

$$\lim_{x \to c}\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{c}, \quad c \neq 0$$

Análisis preliminar:

Debemos determinar una δ tal que

$$0<|x-c|<\delta \rightarrow \left|\frac{1}{x} - \frac{1}{c}\right| < \varepsilon$$

Ahora

$$\left|\frac{1}{x} - \frac{1}{c}\right| = \left|\frac{c-x}{xc}\right| = \frac{1}{|x|}\cdot\frac{1}{|c|}\cdot|x-c|$$

El factor $1/|x|$ es problemático en especial si x está cerca de 0. Podemos acotar este factor si podemos mantener a x alejado de 0. Con este fin notemos que:

$$|c| = |c-x+x| \leq |c-x| + |x| \leftarrow \text{Desigualdad del triángulo}$$

de modo que:

$$|x| \geq |c| - |x-c|$$

Así, si elegimos $\delta \leq |c|/2$ tenemos éxito en hacer $|x| \geq |c|/2$. También si pedimos que $\delta \leq \varepsilon c^2/2$, entonces

$$\frac{1}{|x|} \cdot \frac{1}{|c|} \cdot |x-c| < \frac{1}{|c|/2} \cdot \frac{1}{|c|} \cdot \frac{\varepsilon c^2}{2} = \varepsilon$$

Demostración formal:

Sea $\varepsilon > 0$ dada. Elegimos $\delta = \min\left\{\frac{|c|}{2}, \frac{\varepsilon c^2}{2}\right\}$

Entonces $0 < |x-c| < \delta$ implica que

$$\left|\frac{1}{x} - \frac{1}{c}\right| = \left|\frac{c-x}{xc}\right| = \frac{1}{|x|} \cdot \frac{1}{|c|} \cdot |x-c| < \frac{1}{|c|/2} \cdot \frac{1}{|c|} \cdot \frac{\varepsilon c^2}{2} = \varepsilon$$

$\boxed{//}$

1.3 Teoremas de límites

Ejemplo 1:
Determine

$$\lim_{x \to 3} 2x^4$$

$$\lim_{x \to 3} 2x^4 = 2 \lim_{x \to 3} x^4 = 2\left[\lim_{x \to 3} x\right]^4 = 2[3]^4 = 162$$

Ejemplo 2:
Encuentre

$$\lim_{x \to 4} (3x^2 - 2x)$$

$$\lim_{x \to 4} 3x^2 - \lim_{x \to 4} 2x = 3 \lim_{x \to 4} x^2 - 2 \lim_{x \to 4} x = 48 - 8 = 40$$

Ejemplo 3:
Determine

$$\lim_{x \to 4} \frac{\sqrt{x^2-9}}{x}$$

$$\frac{\lim_{x \to 4} \sqrt{x^2-9}}{\lim_{x \to 4} x} = \frac{\sqrt{\lim_{x \to 4} (x^2-9)}}{4} = \frac{\sqrt{\lim_{x \to 4} x^2 - \lim_{x \to 4} 9}}{4} = \frac{\sqrt{16-9}}{4} = \frac{5}{4}$$

Ejemplo 4:
Si $\lim_{x \to 3} f(x) = 4$ y $\lim_{x \to 3} g(x) = 8$, encuentre $\lim_{x \to 3} [f^2(x) \cdot \sqrt[3]{g(x)}]$

$$\lim_{x\to 3} f^2(x) \cdot \lim_{x\to 3} \sqrt[3]{g(x)}$$
$$= \left[\lim_{x\to 3} f(x)\right]^2 \cdot \sqrt{\lim_{x\to 3} g(x)}$$
$$= [4]^2 \cdot \sqrt[3]{8} = 32$$

Ejemplo 5:
Encuentra

$$\lim_{x\to 2} \frac{7x^5 - 10x^4 - 13x + 6}{3x^2 - 6x - 8}$$

Por el teorema de sustitución y como $f(2)$ sí está definida;

$$\frac{7(2)^5 - 10(2)^4 - 13(2) + 6}{3(2)^2 - 6(2) - 8} = -\frac{11}{2}$$

Ejemplo 6:
Determine

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^3 + 3x + 7}{x^2 - 2x + 1} = \lim_{x\to 1} \frac{x^3 + 3x + 7}{(x-1)^2}$$

El límite es 11 para el numerador. Estamos tratando de dividir un número cercano a 11 entre un número cercano a 0

Nos permitiremos decir que el límite es $+\infty$

Ejemplo 7:
Determine

$$\lim_{x\to 1} \frac{x - 1}{\sqrt{x} - 1}$$

$$\lim_{x\to 1} \frac{x-1}{\sqrt{x}-1} = \lim_{x\to 1} \frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x}-1} = \lim_{x\to 1} (\sqrt{x}+1) = \sqrt{1} + 1 = 2$$

Ejemplo 8:
Determine

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2 + 3x - 10}{x^2 + x - 6}$$

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2 + 3x - 10}{x^2 + x - 6} = \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)(x+5)}{(x-2)(x+3)} = \lim_{x\to 2} \frac{x+5}{x+3} = \frac{7}{5}$$

Ejemplo 9:
Sabemos que $1 - \frac{x^2}{6} \leq \frac{\text{sen}(x)}{x} \leq 1$ para toda x cercana pero distinta de 0.

¿Qué podemos concluir acerca de $\lim_{x\to 0} \frac{\text{sen}(x)}{x}$?

Vemos que
$$1-\frac{(0)^2}{6}=1$$
y $1=1$

Por el teorema del emparedado sabiemos entonces que:
$$\lim_{x\to 0}\frac{sen(x)}{x}=1$$

1.4 Limites que involucran funciones trigonométricas

Ejemplo 1:
Encuentre
$$\lim_{t\to 0}\frac{t^2\cos(t)}{t+1}$$
$$\lim_{t\to 0}\frac{t^2}{t+1}\cdot\cos(t)=\lim_{t\to 0}\frac{t^2}{t+1}\cdot\lim_{t\to 0}\cos(t)=0\cdot 1=0$$

Ejemplo 2:
Encuentre cada límite

a) $\lim_{x\to 0}\frac{sen(3x)}{x}$ b) $\lim_{t\to 0}\frac{1-\cos(t)}{sen(t)}$ c) $\lim_{x\to 0}\frac{sen(4x)}{\tan(x)}$

a) Como $\lim_{t\to 0}\frac{sen(t)}{t}$

Tomando t como $3x$ completamos:
$$\lim_{x\to 0}\frac{sen(3x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{3\,sen(3x)}{3x}=3\lim_{x\to 0}\frac{sen(3x)}{3x}=3\cdot 1=3$$

b)
$$\lim_{t\to 0}\frac{1-\cos(t)}{sen(t)}=\lim_{t\to 0}\frac{\frac{1-\cos(t)}{t}}{\frac{sen(t)}{t}}=\frac{\lim_{t\to 0}\frac{1-\cos(t)}{t}}{\lim_{t\to 0}\frac{sen(t)}{t}}=\frac{0}{1}=0$$

c)
$$\lim_{x\to 0}\frac{sen(4x)}{\tan(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{4\,sen(4x)}{4x}}{\frac{sen(x)}{x\cos(x)}}=\frac{4\lim_{x\to 0}\frac{sen(4x)}{4x}}{\left(\lim_{x\to 0}\frac{sen(x)}{x}\right)\left(\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos(x)}\right)}=\frac{4}{1\cdot 1}=4$$

Ejemplo 3:
Dadas las funciones $u(x)=|x|$, $l(x)=-|x|$ y $f(x)=x\cos(\frac{1}{x})$, utilice el teorema del emparedado para determinar $\lim_{x\to 0}f(x)$

$\cos(\frac{1}{x})$ siempre estará entre -1 y 1, por lo tanto $x\cos(\frac{1}{x})$ siempre estará entre $-x$ y x.

Sabemos que:

$$\lim_{x\to 0} |x| = \lim_{x\to 0}(-|x|) = 0$$

Entonces $f(x)$ está entre $u(x)$ y $l(x)$, ambas tienden a cero cuando $x \to 0$

Concluimos que

$$\lim_{x\to 0} f(x) = 0$$

1.5 Límites al infinito; límites infinitos

Ejemplo 1:

Demuestre que si k es un entero positivo, entonces:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^k} = 0 \quad y \quad \lim_{x\to -\infty} \frac{1}{x^k} = 0$$

Sea $\varepsilon > 0$ dado. Después de un análisis preliminar elegimos $M = \sqrt[k]{\frac{1}{\varepsilon}}$

Entonces $x > M$ implica que:

$$\left|\frac{1}{x^k} - 0\right| = \frac{1}{x^k} < \frac{1}{M^k} = \varepsilon$$

La demostración de la segunda proposición es similar

Ejemplo 2:

Demuestre que

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x}{1+x^2} = 0$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x}{1+x^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{x}{x^2}}{\frac{1+x^2}{x^2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x^2}+1} = \frac{\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x}}{\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^2} + \lim_{x\to\infty} 1} = \frac{0}{0+1} = 0$$

Ejemplo 3:

Encuentre

$$\lim_{x\to -\infty} \frac{2x^3}{1+x^3}$$

$$\lim_{x\to -\infty} \frac{2x^3}{1+x^3} = \lim_{x\to -\infty} \frac{\frac{2x^3}{x^3}}{\frac{1+x^3}{x^3}} = \lim_{x\to -\infty} \frac{\frac{2}{1}}{\frac{1}{x^3}+1} = \frac{\lim_{x\to -\infty} 2}{\lim_{x\to -\infty} \frac{1}{x^3} + \lim_{x\to +\infty} 1} = \frac{2}{0+1} = 2$$

Ejemplo 4:
Determine

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{n+1}{n+2}}$$

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{n+1}{n+2}}=\left(\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n+2}\right)^{1/2}=\left(\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n+1}{n}}{\frac{n+2}{n}}\right)^{1/2}=\left(\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{n}}{1+\frac{2}{n}}\right)^{1/2}=\left(\frac{1+0}{1+0}\right)^{1/2}=1$$

Ejemplo 5:
Encuentre

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{1}{(x-1)^2} \quad y \quad \lim_{x\to 1^+}\frac{1}{(x-1)^2}$$

Como

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{1}{(x-1)^2}=+\infty \quad y \quad \lim_{x\to 1^+}\frac{1}{(x-1)^2}=+\infty$$

Podemos escribir

$$\lim_{x\to 1}\frac{1}{(x-1)^2}=+\infty$$

Ejemplo 6:
Encuentre

$$\lim_{x\to 2^+}\frac{x+1}{x^2-5x+6}$$

$$\lim_{x\to 2^+}\frac{x+1}{x^2-5x+6}=-\infty$$

Ejemplo 7:
Encuentre las asintotas horizontales y verticales de $y=f(x)$ si

$$f(x)=\frac{2x}{x-1}$$

Con frecuencia tenemos una asintota vertical donde el denominador es cero, es decir en $x=1$ en este caso
Por otra parte,

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x}{x-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{2}{1-\frac{1}{x}}=2 \Rightarrow$$ la asintota horizontal está en $y=2$

1.6 Continuidad de funciones

Ejemplo 1:
Sea $f(x)=\dfrac{x^2-4}{x-2},\ x\neq 2$

¿Cómo debe definirse f en $x=2$ para hacer que sea continua allí?

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{(x+2)(x-2)}{x-2}=\lim_{x\to 2} x+2=4$$

Entonces definimos $f(2)=4$

Ejemplo 2:

¿En qué números

$$F(x)=\frac{(3|x|-x^2)}{(\sqrt{x}+\sqrt[3]{x})}$$

es continua?

La función es continua en cada número positivo

Ejemplo 3:

Determine todos los puntos de discontinuidad de

$$f(x)=\frac{sen(x)}{x(1-x)},\quad x\neq 0,1$$

Clasifique cada punto de discontinuidad como removible o no removible

La función no es continua en $x=0$ y $x=1$

Como

$$\lim_{x\to 0}\frac{sen(x)}{x(1-x)}=\lim_{x\to 0}\frac{sen(x)}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{1-x}=1\cdot 1=1$$

podríamos definir $f(0)=1$ y allí la función sería continua

Pero

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{sen(x)}{x(1-x)}=-\infty \quad y \quad \lim_{x\to 1^-}\frac{sen(x)}{x(1-x)}=\infty$$

no existe forma de definir $f(1)$

Ejemplo 4:

Demuestre que $h(x)=|x^2-3x+6|$ es continua en todo número real

Sea $f(x)=|x|$ y $g(x)=x^2-3x+6$

Ambas son continuas en cada número real y por lo tanto su composición también lo es

Ejemplo 5:

Demuestre que

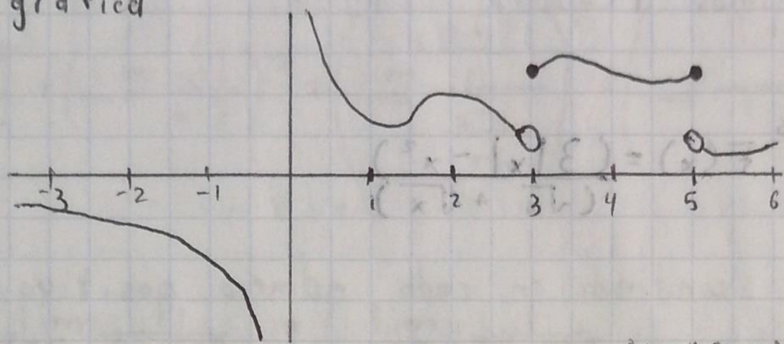
$$h(x)=sen\left(\frac{x^4-3x+1}{x^2-x-6}\right)$$

es continua excepto en 3 y -2

$x^2-x-6=(x-3)(x+2)$. Esta función racional es continua excepto en 3 y -2

Como la función seno es continua en todo número real, concluimos que $h(x)$ también es continua excepto en 3 y -2

Ejemplo 6:
Mediante la definición de continuidad en un intervalo describa las propiedades de la continuidad de la función de la siguiente gráfica



La función parece que es continua en $(-\infty, 0)$, $(0,3)$, $[3,5]$ y $(5,\infty)$

Ejemplo 7:
¿Cuál es el intervalo más grande sobre el cual la función definida por $g(x) = \sqrt{4-x^2}$ es continua?
g es continua en su dominio: $[-2,2]$

Ejemplo 8:
Utilice el teorema del valor intermedio para demostrar que la ecuación $x - \cos(x) = 0$ tiene una solución entre $x=0$ y $x=\pi/2$
Sea $f(x) = x - \cos(x)$ y sea $W=0$
Entonces $f(0) = 0 - \cos(0) = -1$ y $f(\frac{\pi}{2}) = \frac{\pi}{2} - \cos(\frac{\pi}{2}) = \frac{\pi}{2}$
Como f es continua en $[0, \frac{\pi}{2}]$ y puesto que $W=0$ está entre $f(0)$ y $f(\frac{\pi}{2})$, el teorema del valor intermedio implica la existencia de una c en $(0, \frac{\pi}{2})$ donde $f(c)=0$. Tal c es una solución para la ecuación $x - \cos(x) = 0$

Ejemplo 9:
Utilice el teorema del valor intermedio para demostrar que en un anillo circular siempre existen dos puntos opuestos con la misma temperatura
Se eligen coordenadas para este problema de modo que el centro del anillo sea el origen y sea r el radio del anillo
Definimos $T(x,y)$ como la temperatura en el punto (x,y)
Consideremos un diámetro del círculo que forma un ángulo θ con el eje x y definimos $f(\theta)$ como la diferencia de temperaturas entre los puntos que forman los ángulos θ y $\pi+\theta$, es decir,
$$f(\theta) = T(r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta) - T(r\cos(\pi+\theta), r\operatorname{sen}(\pi+\theta))$$
Así $f(0)$ y $f(\pi)$ son cero o una es positiva y otra negativa

2: La Derivada

Contenido:
- Dos problemas con el mismo tema
- La derivada
- Reglas para encontrar derivadas
- Derivadas de funciones trigonométricas
- La regla de la cadena
- Derivadas de orden superior
- Derivación implícita
- Tasas de cambio relacionadas
- Diferenciales y aproximaciones

2.1 Dos problemas con el mismo tema

Ejemplo 1:
Encuentre la pendiente de la recta tangente a la curva $y = f(x) = x^2$ en el punto $(2,4)$

$$m_{tan} = \lim_{h \to 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h}$$
$$= \lim_{h \to 0} \frac{(2+h)^2 - (2)^2}{h}$$
$$= \lim_{h \to 0} \frac{4 + 4h + h^2 - 4}{h}$$
$$= \lim_{h \to 0} \frac{h(4+h)}{h}$$
$$= 4$$

Ejemplo 2:
Encuentre las pendientes de las rectas tangentes a la curva $y = f(x) = -x^2 + 2x + 2$ en los puntos con abscisas $-1, \frac{1}{2}, 2$ y 3

$$m_{tan} = \lim_{h \to 0} \frac{f(c+h) + f(c)}{h}$$
$$= -2c + 2$$

Las cuatro pendientes deseadas para $c = -1, \frac{1}{2}, 2, 3$ son $4, 1, -2, -4$

Ejemplo 3:
Encuentre la ecuación de la recta tangente a la curva $y = \frac{1}{x}$ en $(2, \frac{1}{2})$

$$m_{tan} = \lim_{h \to 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h}$$
$$= -\frac{1}{4}$$

Ejemplo 4:
Un objeto inicialmente en reposo, cae debido a la aceleración de la gravedad. Determine su velocidad instantánea en $t=3.8$ s y $t=5.4$ s. Como $f(t)=16t^2$

$$v=\lim_{h\to 0}\frac{f(c+h)-f(c)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{16(c+h)^2-16c^2}{h}$$

$$=32c$$

Para 3.8s su velocidad es 121.6 ft/s
Para 5.4s su velocidad es 172.8 ft/s

Ejemplo 5:
¿Cuánto tiempo tardará el objeto del ejemplo 4 para alcanzar una velocidad instantánea de 112 ft/s?
Resolvemos

$$32c=112$$

$$\therefore c=3.5\text{ s}$$

Ejemplo 6:
Una partícula se mueve a lo largo de un eje coordenado y s, su distancia en cm medida desde el origen hasta el final de t segundos está dada por $s=f(t)=\sqrt{5t+1}$. Encuentre la velocidad instantánea de la partícula al final de 3 segundos

$$v=\lim_{h\to 0}\frac{f(3+h)-f(3)}{h}$$

$$=\frac{5}{8}\text{ cm/s}$$

2.2 La derivada

Ejemplo 1:
Sea $f(x)=13x-6$. Encuentre $f'(4)$

$$f'(4)=\lim_{h\to 0}\frac{f(4-h)-f(4)}{h}$$

$$=13$$

Ejemplo 2:
Si $f(x)=x^3+7x$, encuentre $f'(x)$

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x-h)-f(x)}{h}$$

$$=3x^2+7$$

Ejemplo 3:

Si $f(x) = \frac{1}{x}$ encuentre $f'(x)$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(\frac{1}{x} - h) - f(\frac{1}{x})}{h}$$
$$= -\frac{1}{x^2}$$

Ejemplo 4:

Encuentre $F'(x)$ si $F(x) = \sqrt{x}$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x - h) - f(x)}{h}$$
$$= \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Ejemplo 5:

Utilice el último recuadro para determinar $g'(c)$ si

$$g(x) = \frac{2}{x+3}$$

$$g'(c) = \lim_{x \to c} \frac{g(x) - g(c)}{x - c}$$
$$= \frac{-2}{(c+3)^2}$$

Ejemplo 6:

Cada una de las siguientes es una derivada pero ¿de qué función? ¿Y en qué punto?

a) $\lim_{h \to 0} \frac{(4+h)^2 - 16}{h}$

b) $\lim_{x \to 3} \frac{\frac{2}{x} - \frac{2}{3}}{x - 3}$

a) Es la derivada de $f(x) = x^2$ en $x = 4$

b) Es la derivada de $f(x) = \frac{2}{x}$ en $x = 3$

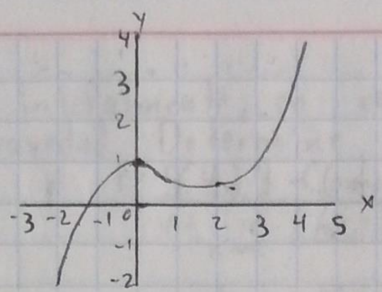
Ejemplo 7:

Sea $y = f(x) = 2 - x^2$. Encuentre Δy cuando x cambia de 0.4 a 1.3

$$\Delta y = f(1.3) - f(0.4) = [2 - (1.3)^2] - [2 - (0.4)^2] = -1.53$$

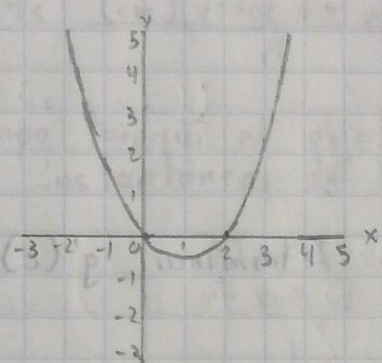
Ejemplo 8:

Dada la siguiente gráfica; haga un bosquejo de la gráfica de $f'(x)$



Analisis:

La gráfica tiene m positivo en $(-\infty, 0)$ y en $(2, \infty)$
La gráfica tiene m negativa en $(0, 2)$
La gráfica tiene $m=0$ en $x=0$ y en $x=2$
Entonces:



2.3 Reglas para encontrar derivadas

Ejemplo 1:
Encuentre las derivadas de $5x^2+7x-6$ y $4x^6-3x^5-10x^2+5x+16$

$D_x(5x^2+7x-6) = 10x+7$

$D_x(4x^6-3x^5-10x^2+5x+16) = 24x^5-15x^4-20x+5$

Ejemplo 2:
Sea $g(x)=x$, $h(x)=1+2x$, $f(x)=g(x)\cdot h(x) = x(1+2x)$
Encuentre $D_x(f(x))$, $D_x(g(x))$, $D_x(h(x))$ y demuestre que $D_x f(x) \neq [D_x g(x)][D_x h(x)]$

Para $f(x)$ $D_x(x(1+2x)) = D_x(x+2x^2)$
$= 1+4x^2$

Para $g(x)$ $D_x(x)=1$
Para $h(x)$ $D_x(1+2x)=2$

$[D_x g(x)][D_x h(x)] = 2\cdot 1 = 2 \neq 1+4x^2$

$\boxed{//}$

Ejemplo 3:
Encuentre la derivada de $(3x^2-5)(2x^4-x)$ mediante el uso de la regla del producto. Verifique su respuesta resolviendo el problema de una manera diferente

$D_x[(3x^2-5)(2x^4-x)] = (3x^2-5)D_x(2x^4-x) + (2x^4-x)D_x(3x^2-5)$

$$= (3x^2-5)(8x^3-1) + (2x^4-x)(6x)$$
$$= 24x^5 - 3x^2 - 40x^3 + 5 + 12x^5 - 6x^2$$
$$= 36x^5 - 40x^3 - 9x^2 + 5$$

Para verificar primero multiplicamos:
$$(3x^2-5)(2x^4-x) = 6x^6 - 10x^4 - 3x^3 + 5x$$

De modo que su derivada es:
$$36x^5 - 40x^3 - 9x^2 + 5$$

Ejemplo 4:
Encuentre
$$\frac{d}{dx}\frac{(3x-5)}{(x^2+7)}$$

$$\frac{d}{dx}\frac{(3x-5)}{(x^2+7)} = \frac{(x^2+7)D_x(3x-5) - (3x-5)(D_x(x^2+7))}{(x^2+7)^2}$$
$$= \frac{(x^2+7)(3) - (3x-5)(2x)}{(x^2+7)^2}$$
$$= \frac{3x^2+21-6x^2+10x}{(x^2+7)^2}$$
$$= \frac{21+10x-3x^2}{(x^2+7)^2}$$

Ejemplo 5:
Encuentre $D_x y$ si
$$y = \frac{2}{x^4+1} + \frac{3}{x}$$

$$D_x y = \frac{(x^4+1)D_x(2) - (2)D_x(x^4+1)}{(x^4+1)^2} + \frac{(x)D_x(3) - (3)D_x(x)}{x^2}$$
$$= \frac{-(2)(4x^3)}{(x^4+1)^2} + \frac{-3}{x^2}$$
$$= -\frac{8x^3}{(x^4+1)^2} - \frac{3}{x^2}$$

Ejemplo 6
Demuestre que la regla de la potencia se cumple para exponentes enteros negativos, es decir
$$D_x(x^{-n}) = -nx^{-n-1}$$

$$D_x(x^{-1}) = D_x\left(\frac{1}{x^n}\right) = \frac{x^n \cdot 0 - 1 \cdot nx^{n-1}}{x^{2n}}$$
$$= \frac{-nx^{n-1}}{x^{2n}}$$
$$= -nx^{-n-1}$$

$\boxed{//}$

2.4 Derivadas de funciones trigonométricas

Ejemplo 1:
Determine $D_x(3\,sen(x) - 2\cos(x))$

$$D_x(3\,sen(x) - 2\cos(x)) = 3\cos(x) + 2\,sen(x)$$

Ejemplo 2:
Encuentre la ecuación de la recta tangente a $y = 3\,sen(x)$ en $(\pi, 0)$

$$D_x(3\,sen(x)) = 3\cos(x)$$
$$3\cos(\pi) = -3$$

Ejemplo 3:
Determine $D_x(x^2\,sen(x))$

$$D_x(x^2\,sen(x)) = x^2 D_x(sen(x)) + sen(x)\,D_x(x^2)$$
$$= x^2\cos(x) + 2x\,sen(x)$$

Ejemplo 4:
Determine

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1+sen(x)}{\cos(x)}\right)$$

$$= \frac{\cos(x)\,D_x(1+sen(x)) - (1+sen(x))\,D_x(\cos(x))}{\cos^2(x)}$$

$$= \frac{\cos^2(x) + sen(x) + sen^2(x)}{\cos^2(x)}$$

$$= \frac{1+sen(x)}{\cos^2(x)}$$

Ejemplo 5:
En el instante t segundos, el centro de un corcho que está flotando en el agua es $y = 2\,sen(t)$ cm por arriba (o por debajo) del nivel del agua. ¿Cuál es la velocidad del corcho en $t = 0, \frac{\pi}{2}, \pi$?

La velocidad es la derivada de la posición

$$D_x(2\,sen(t)) = 2\cos(t)$$

Cuando $t = 0$, $2\cos(0) = 2$
Cuando $t = \frac{\pi}{2}$, $2\cos(\frac{\pi}{2}) = 0$
Cuando $t = \pi$, $2\cos(\pi) = -2$

Ejemplo 6:
Determine $D_x(x^n\tan(x))$ para $n \geq 1$

$$D_x(x^n\tan(x)) = x^n D_x(\tan(x)) + \tan(x)\,D_x(x^n)$$
$$= x^n\sec^2(x) + nx^{n-1}(\tan(x))$$

Ejemplo 7:
Determine la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $y = \tan(x)$ en $(\frac{\pi}{4}, 1)$

$$D_x(\tan(x)) = \sec^2(x)$$

Ahora

$$\sec^2(\tfrac{\pi}{4}) = \left(\frac{2}{\sqrt{2}}\right)^2 = 2$$

Esta recta tiene pendiente 2 y pasa por $(\frac{\pi}{4}, 1)$, así:

$$y - 1 = 2\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$y = 2x - \frac{\pi}{2} + 1$$

Ejemplo 8:
Determine todos los puntos en la gráfica de $y = sen^2(x)$ donde la recta tangente es horizontal

$$D_x(sen^2(x)) = D_x[(sen(x))(sen(x))]$$
$$= sen(x)\cos(x) + sen(x)\cos(x)$$
$$= 2\,sen(x)\cos(x)$$

Esto es igual a 0 cuando o $sen(x)$ o $\cos(x)$ sea cero, esto es en: $x = 0, \pm\frac{\pi}{2}, \pm\pi, \pm\frac{3\pi}{2}, \ldots$

2.5 La regla de la cadena

Ejemplo 1:
Si $y = (2x^2 - 4x + 1)^{60}$ encuentre $D_x y$

Consideramos

$y = u^{60}$

$u = 2x^2 - 4x + 1$

Derivamos:

$$D_x[(2x^2 - 4x + 1)^{60}] = 60(2x^2 - 4x + 1)^{59}(4x - 4)$$

Ejemplo 2:
Encuentre $D_x y$ si

$$y = \frac{1}{(2x^5 - 7)^3}$$

Consideremos

$y = \frac{1}{u^3} = u^{-3}$

$u = 2x^5 - 7$

Derivamos:

$y' = -3u^{-4} \cdot u'$

$$y' = \frac{-3}{(2x^5-7)^4} \cdot 10x^4$$
$$y' = -\frac{30x^4}{(2x^5-7)^4}$$

Ejemplo 4:
Si $y = sen(2x)$ determine $D_x y$
Consideramos
$$y = sen(u)$$
$$u = 2x$$
Derivamos
$$y' = u' \cdot cos(u)$$
$$y' = 2\,cos(2x)$$

Ejemplo 3:
Determine
$$D_t\left(\frac{t^3-2t+1}{t^4+3}\right)^{13}$$
Consideramos
$$y = u^{13}$$
$$u = \frac{t^3-2t+1}{t^4+3}$$
Derivamos:
$$y' = 13u^{12} \cdot u'$$
$$y' = 13\left(\frac{t^3-2t+1}{t^4+3}\right)^{12} \cdot \frac{(t^4+3)D_x(t^3-2t+1)-(t^3-2t+1)D_x(t^4+3)}{(t^4+3)^2}$$
$$y' = 13\left(\frac{t^3-2t+1}{t^4+3}\right)^{12} \cdot \frac{(t^4+3)(3t^2-2)-(t^3-2t+1)(4t^3)}{(t^4+3)^2}$$
$$y' = 13\left(\frac{t^3-2t+1}{t^4+3}\right)^{12} \cdot \frac{-t^6+6t^4-4t^3+9t^2-6}{(t^4+3)^2}$$

Ejemplo 5:
Determine $F'(y)$ en donde $F(y) = y\ sen(y^2)$
$$F'(y) = y\,D_y[sen(y^2)] + sen(y^2)\,D_y(y)$$
$$= y\,[2y\cos(y^2)] + sen(y^2)$$
$$= 2y^2\cos(y^2) + sen(y^2)$$

Ejemplo 6:
Determine
$$D_x\left[\frac{x^2(1-x)^3}{1+x}\right]$$
$$D_x\left[\frac{x^2(1-x)^3}{1+x}\right] = \frac{(1+x)D_x[x^2(1-x)^3] - x^2(1-x)^3 D_x(1+x)}{(1+x)^2}$$

$$= \frac{(1+x)(1-x)^2 x(2-5x) - x^2(1-x)^3}{(1+x)^2}$$

Ejemplo 7:
Determine

$$\frac{d}{dx}\frac{1}{(2x-1)^3}$$

$$D_x((2x-1)^{-3}) = -3(2x-1)^{-4}(2)$$
$$= -\frac{6}{(2x+1)^4}$$

Ejemplo 8:
Exprese las siguientes derivadas en términos de la función $F(x)$. Suponga que F es derivable

a) $D_x(F(x^3))$ b) $D_x[(F(x))^3]$

a) Consideremos
$y = F(u)$
$u = x^3$
Derivamos:

$$y' = 3x^2 F'(x^3)$$

b) Consideremos
$y = u^3$
$u = F(x)$
Derivamos:

$$y' = 3[F(x)]^2 \cdot F'(x)$$

Ejemplo 9:
Encuentre $D_x(\text{sen}^3(4x))$

$$D_x(\text{sen}^3(4x)) = 3\,\text{sen}^2(4x) \cdot D_x(\text{sen}(4x))$$
$$= 3\,\text{sen}^2(4x) \cdot \cos(4x) \cdot D_x(4x)$$
$$= 3\,\text{sen}^2(4x) \cdot \cos(4x) \cdot 4$$
$$= 12\,\text{sen}^2(4x)\cos(4x)$$

Ejemplo 10:
Encuentre $D_x(\text{sen}(\cos(x^2)))$

$$D_x\{\text{sen}[\cos(x^2)]\} = \cos[\cos(x^2)] \cdot [-\text{sen}(x^2)] \cdot 2x$$
$$= -2x\,\text{sen}(x^2)\cos[\cos(x^2)]$$

2.6 Derivadas de orden superior

Ejemplo 1:
Si $y = \text{sen}(2x)$, encuentre $f^{(2)}(x)$, $f^{(3)}(x)$, $f^{(4)}(x)$ y $f^{(12)}(x)$

$f'(x) = 2\cos(2x)$
$f^{(2)}(x) = -4\ \text{sen}(2x)$
$f^{(3)}(x) = -8\cos(2x)$
$f^{(4)}(x) = 16\ \text{sen}(2x)$
$\vdots$
$f^{(12)}(x) = 4096\ \text{sen}(2x)$

Ejemplo 2:
Un objeto se mueve a lo largo de un eje coordenado, de modo que su posición satisface $s(t) = 2t^2 - 12t + 8$ donde s se mide en cm y t en segundos con $t \geq 0$. Determine la velocidad del objeto cuando $t=1$ y $t=6$. ¿En que momento la velocidad es cero? ¿En qué momento es positiva?

$v(t) = 4t - 12$

En $t=1$ $\quad v(t) = -8\ \text{cm/s}$

En $t=6$ $\quad v(t) = 12\ \text{cm/s}$

$v(t) = 0$ cuando $t = 3$

$v(t) > 0$ cuando $t > 3$

Ejemplo 3:
Un objeto se mueve a lo largo de un eje coordenado horizontal de tal manera que su posición en el instante t está dada por:

$$s = t^3 - 12t^2 + 36t - 30$$

Con s en pies y t en segundos

a) ¿Cuándo es cero la velocidad?
b) ¿Cuándo es positiva la velocidad?
c) ¿Cuándo se está moviendo el objeto hacia la izquierda (es decir en dirección negativa)?
d) ¿Cuándo es positiva la aceleración

a) $\quad v(t) = 3t^2 - 24t + 36$

$v = 0$ en $t = 2$ y $t = 6$

b) $v > 0$ en el intervalo $(-\infty, 2) \cup (6, \infty)$

c) El objeto se mueve a la izquierda cuando $v < 0$, esto es en el intervalo $(2, 6)$

d) $\quad a(t) = 6t - 24$

$\therefore\ a > 0$ cuando $t > 4$

Ejemplo 4:
Desde lo alto de un edificio de 160 ft de altura se lanza una pelota hacia arriba con una velocidad inicial de 64 ft/s

a) ¿Cuándo alcanza su altura máxima?
b) ¿Cuál es su altura máxima?
c) ¿Cuándo llega al piso?
d) ¿A qué velocidad llega al piso?
e) ¿Cuál es sur aceleración en $t=2$?

$$s=-16t^2+64t+160$$
$$v=-32t+64$$
$$a=-32$$

a) Se alcanza cuando $v=0$, es decir en $t=2s$
b) En $t=2$, $s(t)=224$ ft
c) La pelota llega al suelo cuando $s=0$, es decir

$$-16t^2+64t+160=0$$
$$t_1=-1.7416 \qquad t_2=5.7416$$

La respuesta negativa no tiene sentido por lo que llegó en $t=5.7416$ s
d) En $t=2$, $v(t)=-119.73$ ft/s

2.7 Derivación implícita

Ejemplo 1:
Encuentre D_x si $4x^2y-3y=x^3-1$

$$\frac{d}{dx}(4x^2y-3y)=\frac{d}{dx}(x^3-1)$$
$$4x^2\cdot y'+y\cdot 8x-3y'=3x^2$$
$$y'=\frac{3x^2-8xy}{4x^2-3}$$

Ejemplo 2:
Encuentre D_x si $x^2+5y^3=x+9$

$$D_x(x^2+5y^3)=D_x(x+9)$$
$$2x+15y^2y'=1$$
$$y'=\frac{1-2x}{15y^2}$$

Ejemplo 3:
Encuentre la ecuación de la recta tangente a la curva en el punto $(0,1)$

$$y^3-xy^2+\cos(xy)=2$$

Al derivar tenemos:

$$3y^2y'-x(2yy')-y^2-\operatorname{sen}(xy)(xy'+y)=0$$
$$y'(3y^2-2xy-x\operatorname{sen}(xy))=y^2+y\operatorname{sen}(xy)$$
$$y'=\frac{y^2+y\operatorname{sen}(xy)}{3y^2-2xy-x\operatorname{sen}(xy)}$$

En $(0,1)$, $y'=\frac{1}{3}$. Así la ecuación de la recta tangente en $(0,1)$ es:

$$y - 1 = \frac{1}{3}(x - 0)$$

$$y = \frac{x}{3} + 1$$

Ejemplo 4:

Si $y = 2x^{5/3} + \sqrt{x^2+1}$ encuentre $D_x y$

$$D_x y = D_x(2x^{5/3}) + D_x(\sqrt{x^2+1})$$

$$y' = \frac{5}{3} \cdot 2x^{2/3} + \frac{1}{2}(x^2+1)^{-1/2} \cdot 2x$$

$$y' = \frac{10x^{2/3}}{3} + \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$$

2.8 Razones de cambio relacionadas

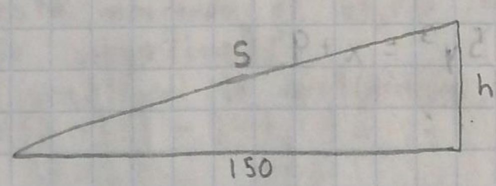
Ejemplo 1:

Se suelta un pequeño globo en un punto a 150 pies alejado de un observador quien se encuentra en el nivel del piso. Si el globo se eleva en línea recta hacia arriba a una velocidad de 8 ft/s ¿qué tan rápido está aumentando la distancia del observador al globo cuando éste se encuentra a 50 pies de altura?

Sea t el número de segundos contados a partir de que se suelta el globo

Sea h la altura del globo y s su distancia al observador

Tanto h como s son variables que dependen de t pero la distancia desde el observador al punto de lanzamiento no cambia:



Sabemos que $\frac{dh}{dt} = 8$ y queremos conocer $\frac{ds}{dt}$ cuando $h = 50$

Podemos relacionar a h y s mediante el teorema de Pitágoras:

$$s^2 = h^2 + 150^2$$

Derivamos de manera implícita con respecto a t

$$2s \cdot \frac{ds}{dt} = 2h \cdot \frac{dh}{dt}$$

$$s \cdot \frac{ds}{dt} = h \cdot \frac{dh}{dt}$$

Esta relación se cumple $\forall\, t > 0$

Ahora que llegamos a este punto podemos pasar al instante

cuando $h = 50$
Con base en el teorema de Pitágoras vemos que; cuando $h = 50$

$$s = \sqrt{50^2 + 150^2} = 50\sqrt{10}$$

Ahora que sabemos que:

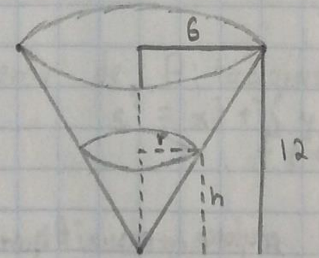
$$s = 50\sqrt{10}$$
$$h = 50$$
$$\frac{dh}{dt} = 8$$

Sustituimos:

$$s \cdot \frac{ds}{dt} = h \cdot \frac{dh}{dt}$$
$$(50\sqrt{10}) \cdot \frac{ds}{dt} = (50)(8)$$
$$\therefore \frac{ds}{dt} = \frac{8}{\sqrt{10}} = 2.53$$

Así, cuando $h = 50$, la distancia entre el globo y el observador aumenta a una velocidad de 2.53 ft/s

Ejemplo 2:
En un tanque cónico se vierte agua a una razón de $8 \text{ ft}^3/\text{min}$. Si la altura del tanque es de 12 pies y el radio de su abertura circular es de 6 pies ¿qué tan rápido se está elevando el nivel del agua cuando este líquido tiene una profundidad de 4 pies?
Denótese la profundidad del agua con h y el radio correspondiente de la superficie del agua con r



Se nos da que el volumen V de agua en el tanque aumenta a una razón de $8 \text{ ft}^3/\text{min}$, esto es:

$$\frac{dV}{dt} = 8$$

Queremos saber:

$$\frac{dh}{dt}$$

que es qué tan rápido está elevandose el agua en el instante cuando $h = 4$

La fórmula para el volumen de agua en el tanque es:

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$$

Tenemos una r no deseada, pero por triángulos semejantes la podemos eliminar:

$$\frac{r}{h} = \frac{6}{12}$$

$$r = \frac{h}{2}$$

Sustituyendo en V tenemos:

$$V = \frac{1}{3}\pi\left(\frac{h}{2}\right)^2 h = \frac{\pi h^3}{12}$$

Ahora derivamos de forma implícita. Recordemos que V y h dependen de t:

$$\frac{dV}{dt} = \frac{3\pi h^2}{12}\cdot\frac{dh}{dt} = \frac{\pi h^2}{4}\cdot\frac{dh}{dt}$$

Ahora que llegamos a este punto, podemos pasar al instante cuando $h=4$ pues sabemos que:

$$\frac{dV}{dt} = 8$$

$$h = 4$$

Así

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\pi h^2}{4}\cdot\frac{dh}{dt}$$

$$8 = \frac{\pi(4)^2}{4}\cdot\frac{dh}{dt}$$

$$8 = 4\pi\cdot\frac{dh}{dt}$$

$$\frac{8}{4\pi} = \frac{dh}{dt}$$

$$\therefore \frac{dh}{dt} = \frac{2}{\pi} = 0.637$$

Entonces cuando la profundidad del agua es de 4 pies, el nivel del agua se eleva a 0.637 pies por minuto

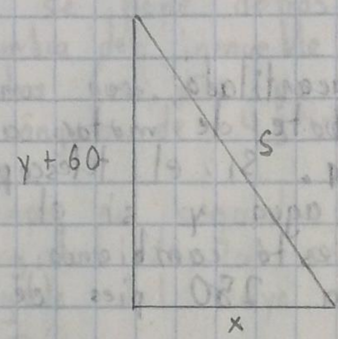
Ejemplo 3:

Un aeroplano que vuela hacia el norte a 640 millas por hora, pasa sobre cierta ciudad al mediodía. Un segundo aeroplano que va hacia el este a 600 millas por hora está directamente encima de la misma ciudad 15 minutos más tarde. Si los aeroplanos están volando a la misma altitud ¿qué tan rápido se están separando a la 1:15 p.m.?

Paso 1:

Sea t el número de horas despúes de las 12:15 p.m.
Sea y la distancia en millas recorridas por el aeroplano que se dirige al norte despuès de las 12:15 p.m.
Sea x la distancia que ha volado el aeroplano con rumbo al este después de las 12:15 p.m.
Sea s la distancia entre los aeroplanos

15 minutos después del mediodia (a las 12:15) el aeroplano que va hacia el norte habrá volado $\frac{640}{4} = 160$ millás. Por lo que, en el instante t, la distancia de la ciudad al aeroplano que va al norte será $y + 160$;



Paso 2:

Sabemos que $\forall t > 0$, $\frac{dy}{dt} = 640$ y que $\frac{dx}{dt} = 600$

Queremos conocer $\frac{ds}{dt}$ en $t = 1$ (es decir a la 1:15 p.m.)

Paso 3:

Por el teorema de Pitágoras:

$$s^2 = x^2 + (y + 160)^2$$

Paso 4:

Derivamos implícitamente:

$$2s \cdot \frac{ds}{dt} = 2x \cdot \frac{dx}{dt} + 2(y + 160) \cdot \frac{dy}{dt}$$

$$s \cdot \frac{ds}{dt} = x \cdot \frac{dx}{dt} + (y + 160) \cdot \frac{dy}{dt}$$

Paso 5:

Sabemos que $\forall t > 0$:

$$\frac{dx}{dt} = 600 \quad y \quad \frac{dy}{dt} = 640$$

También sabemos que en el instante particular $t=1$

$x = 600$

$y = 640$

$s = \sqrt{600^2 + (640+160)^2} = 1000$

Sustituimos estos datos

$$s \cdot \frac{ds}{dt} = x \cdot \frac{dx}{dt} + (y+160)\frac{dy}{dt}$$

$$1000\frac{ds}{dt} = (600)(600) + (640+160)(640$$

$$\therefore \frac{ds}{dt} = 872$$

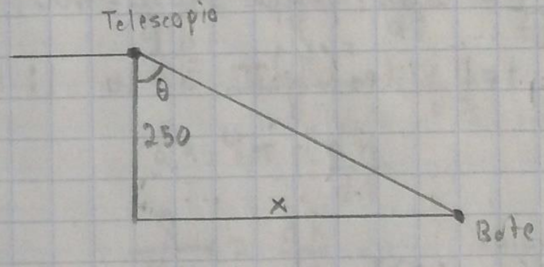
A la 1:15 p.m. los aeroplanos se alejan a 872 m/h entre sí

Ejemplo 4:

Una mujer que está ante un acantilado, con un telescopio observa cómo se aproxima un bote de motor a la playa que está directamente debajo de ella. Si el telescopio está a 250 pies por arriba del nivel del agua y si el bote se aproxima a 20 ft/s ¿a qué velocidad está cambiando el ángulo del telescopio cuando el bote está a 250 pies de la playa?

Paso 1:

Podemos ilustrar el problema de la siguiente manera:



Paso 2:

Sabemos que $\frac{dx}{dt} = -20$ (El signo es negativo porque x disminuye con el tiempo)

Queremos conocer $\frac{d\theta}{dt}$ en el instante cuando $x = 250$

Paso 3:

Por trigonometría

$$\tan(\theta) = \frac{x}{250}$$

Paso 4:

Derivamos implícitamente:

$$\sec^2(\theta) \cdot \frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{250} \cdot \frac{dx}{dt}$$

Paso 5:

Cuando $x = 250$, $\theta = 45°$ ó $\frac{\pi}{4}$ radianes, también $\sec^2(45°) = 2$

Así:

$$2 \cdot \frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{250} \cdot (-20)$$

$$\frac{d\theta}{dt} = -\frac{1}{25} = -0.04 \text{ radianes}$$

El ángulo cambia -0.04 radianes por segundo. El signo negativo muestra que θ disminuye con el tiempo

Ejemplo 5:

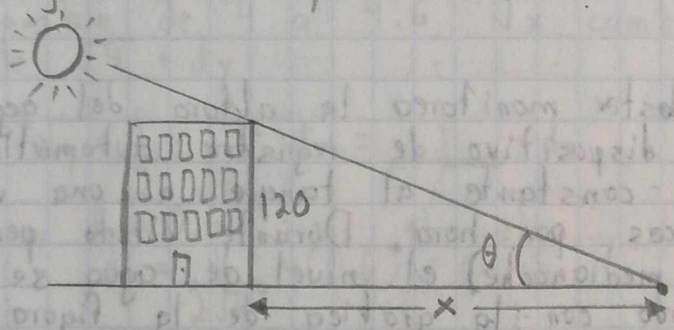
Conforme el sol se pone detrás de un edificio de 120 pies de altura, la sombra del inmueble crece. ¿Qué tan rápido está creciendo la sombra (en pies por segundo) cuando los rayos del sol forman un ángulo de 45°?

Paso 1

Sea t el tiempo en segundos a partir de medianoche

Sea x la longitud de la sombra en pies

Sea θ el ángulo del rayo del sol



Paso 2:

Como la Tierra da un giro completo una vez cada 24 horas o también cada 86,400 segundos, sabemos que

$$\frac{d\theta}{dt} = -\frac{2\pi}{86,400}$$

El signo negativo indica que θ disminuye conforme el tiempo avanza

Queremos conocer $\frac{dx}{dt}$ cuando $\theta = \frac{\pi}{4}$

Paso 3:

Por la figura sabemos que

$$\cot(\theta) = \frac{x}{120}$$

$$x = 120 \cdot \cot(\theta)$$

Paso 4:
Derivamos implícitamente

$$\frac{dx}{dt} = 120(-\csc^2(\theta)) \cdot \frac{d\theta}{dt}$$
$$= -120(\csc^2(\theta))\left(-\frac{2\pi}{86{,}400}\right)$$
$$= \frac{\pi}{360} \cdot \csc^2(\theta)$$

Paso 5:
Cuando $\theta = \frac{\pi}{4}$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\pi}{360} \cdot \csc^2\left(\frac{\pi}{4}\right)$$
$$= \frac{\pi}{360} \cdot (\sqrt{2})^2$$
$$= \frac{\pi}{180}$$
$$= 0.0175 \text{ ft/s}$$

Ejemplo inútil

Ejemplo 6:
La ciudad de Webster monitorea la altura del agua en su tanque cilíndrico con un dispositivo de registro automático. El agua se bombea de manera constante al tanque a una velocidad de 2400 pies cúbicos por hora. Durante cierto periodo de 12 horas (empezando a la medianoche) el nivel de agua se elevó y descendió de acuerdo con la gráfica de la figura 8 (p. 140). Si el radio del tanque son 20 pies, ¿a qué velocidad está utilizándose el agua a las 7:00 a.m.?

Sea t el número de horas transcurridas después de medianoche
Sea h la altura del agua en el tanque en el instante t
Sea V el volumen del agua en el tanque en el instante t
dV/dt es la razón de entrada menos la razón de salida
Entonces $2400 - dV/dt$ es la velocidad a la que el agua se usa en t
En $t=7$, la pendiente es aprox. -3

$$V = \pi r^2 h$$
$$V = \pi (20)^2 h$$
$$\frac{dV}{dt} = 400\pi \frac{dh}{dt}$$
$$\frac{dV}{dt} \approx 400\pi(-3) \approx -3770$$

Los ciudadanos usan agua a una tasa de $2400 + 3770 = 6170$ ft³/h a las 7:00 a.m.

2.9 Diferenciales y aproximaciones

Ejemplo 1:
Encuentre dy si

a) $y = x^3 - 3x + 1$ b) $y = \sqrt{x^2 + 3x}$ c) $y = sen(x^4 - 3x^2 + 11)$

Si sabemos calcular derivadas, también diferenciales. Basta con calcular la derivada y multiplicarla por dx

a) $$dy = (3x^2 - 3)\,dx$$

b) $$dy = \frac{1}{2} \cdot (x^2 + 3x)^{-1/2} \cdot (2x + 3)\,dx$$
$$= \frac{2x + 3}{2\sqrt{x^2 + 3x}}\,dx$$

c) $$dy = \cos(x^4 - 3x^2 + 11) \cdot (4x^3 - 6x)\,dx$$

Ejemplo 2:
Suponga que necesita buenas aproximaciones para $\sqrt{4.6}$ y $\sqrt{8.2}$ pero no sirve su calculadora ¿Qué podría hacer?
Usamos la gráfica $y = \sqrt{x}$
Cuando x cambia de 4 a 4.6, $\sqrt{x}$ cambia de $\sqrt{4}$ a aproximadamente $\sqrt{4} + dy$
Ahora,
$$dy = \frac{1}{2} \cdot x^{-1/2}\,dx = \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot dx$$
que en $x = 4$ y $dx = 0.6$ tiene el valor
$$dy = \frac{1}{2\sqrt{4}} \cdot (0.6) = 0.15$$
Por lo tanto
$$\sqrt{4.6} \approx \sqrt{4} + dy = 2 + 0.15 = 2.15$$
De manera análoga en $x = 9$ y $dx = -0.8$
$$dy = \frac{1}{2\sqrt{9}}(-0.8) = \frac{-0.8}{6} = -0.133$$
Así que
$$\sqrt{8.2} \approx \sqrt{9} + dy \approx 3 - 0.133 = 2.867$$

Ejemplo 3:
Utilice diferenciales para aproximar el aumento en el área de una burbuja cuando su radio aumenta de 3 pulgadas a 3.025 pulgadas
El área de una burbuja está dada por:
$$A = 4\pi r^2$$
Podemos aproximar el radio exacto ΔA por medio de la diferencial

dA donde

$$dA = 8\pi r\, dr$$

En $r = 3$ y $dr = \Delta r = 0.025$

$$dA = 8\pi(3)(0.025) \approx 1.885 \text{ pulgadas cuadradas}$$

Ejemplo 4:
La arista de un cubo se midió como 11.4 cm con un posible error de ± 0.05 cm. Evalúe el volumen del cubo y proporcione una estimación para el posible error en este valor

Tenemos

$$V = x^3$$

Por lo tanto

$$dV = 3x^2\, dx$$

Si $x = 11.4$ y $dx = 0.05$ entonces

$$V = (11.4)^3 = 1481.544$$

Y también

$$\Delta V \approx dV = 3(11.4)^2(0.05)$$

$$dV = 19.494$$

Podríamos reportar el volumen del cubo como

$$1482 \pm 19 \text{ cm}^3$$

Ejemplo 5:
La Ley de Poiseuille para el flujo de la sangre dice que el volumen que fluye por una arteria es proporcional a la cuarta potencia del radio, esto es, $V = kr^4$ ¿En cuánto debe aumentarse el radio para aumentar el flujo de la sangre en 50%?

La diferencial es:

$$dV = 4kr^3\, dr$$

El cambio relativo en el volumen es

$$\frac{dV}{V} = \frac{4kr^3 dr}{kr^4} = \frac{4\,dr}{r}$$

Así que para 50% de cambio

$$0.5 \approx \frac{dV}{V} = \frac{4dr}{r}$$

El cambio relativo en r debe ser

$$\frac{\Delta r}{r} \approx \frac{dr}{r} \approx \frac{0.5}{4} = 0.125$$

Sólo 12.5% del aumento en el radio aumenta el flujo a 50%

Ejemplo 6:
Encuentre la aproximación lineal a $f(x) = 1 + \text{sen}(2x)$ en $x = \frac{\pi}{2}$

La derivada es:

$$f'(x) = 2\cos(2x)$$

Asi la aproximación lineal es:

$$L(x) = f\left(\frac{\pi}{2}\right) + f'\left(\frac{\pi}{2}\right)\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$$
$$= (1 + \operatorname{sen}(\pi)) + (2\cos(\pi))\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$$
$$= 1 - 2\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$$
$$= (1 + \pi) - 2x$$

3: Aplicaciones de la derivada

Contenido:
- Máximos y mínimos
- Monotonía y concavidad
- Extremos locales y extremos en intervalos abiertos
- Problemas prácticos
- Graficación de funciones mediante cálculo
- El teorema del valor medio para derivadas
- Solución numérica de ecuaciones
- Antiderivadas
- Introducción a ecuaciones diferenciales

3.1 Máximos y mínimos

Ejemplo 1:
Encuentre los puntos críticos de $f(x) = -2x^3 + 3x^2$ en $[-\frac{1}{2}, 2]$

Los puntos fronterizos son $x = -\frac{1}{2}$, $x = 2$

Obtenemos

$$f'(x) = -6x^2 + 6x$$

Y encontramos que los puntos estacionarios son $x = 0$, $x = 1$

No existen puntos singulares

Por lo tanto, los puntos críticos son $-\frac{1}{2}, 0, 1, 2$

Ejemplo 2:
Determine los valores máximo y mínimo de $f(x) = x^3$ en $[-2, 2]$

Los puntos fronterizos son $x = -2$, $x = 2$

Con

$$f'(x) = 3x^2$$

Obtenemos que un punto estacionario es $x = 0$

Evaluando f en los puntos críticos:

$$f(-2) = -8$$
$$f(0) = 0$$
$$f(2) = 8$$

Así, el valor máximo es 8 (cuando $x = 2$) y el valor mínimo es -8 (en $x = -2$)

Ejemplo 3:
Encuentre los valores máximo y mínimo de $f(x) = -2x^3 + 3x^2$ en $[-\frac{1}{2}, 2]$

En el ejemplo 1 identificamos los puntos críticos.

Evaluando:

$$f(-\tfrac{1}{2}) = 1$$
$$f(0) = 0$$

$f(1) = 1$
$f(2) = -4$

El valor máximo es 1 (cuando $x = -\frac{1}{2}$, $x = 1$) y el valor mínimo es -4 (cuando $x = 2$)

Ejemplo 4:
La función $F(x) = x^{2/3}$ es continua en todas partes. Encuentre sus valores máximo y mínimo en $[-1, 2]$

$$F'(x) = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$$

$F'(x)$ nunca es cero $\rightarrow$ No hay puntos estacionarios
$F'(0)$ no existe $\rightarrow$ $x = 0$ es un punto singular
Junto con los puntos fronterizos que son -1 y 2 evaluamos:
$F(-1) = 1$
$F(0) = 0$
$F(2) = \sqrt[3]{4} \approx 1.59$

El valor máximo es $\sqrt[3]{4}$ (en $x = 2$) y el valor mínimo es 0 (en $x = 0$)

Ejemplo 5:
Determine los valores máximo y mínimo de $f(x) = x + 2[\cos(x)]$ en $[-\pi, 2\pi]$

$$f'(x) = 1 - 2[\text{sen}(x)]$$

$f'(x) = 0$ en $x = \frac{\pi}{6}$ y $x = \frac{5\pi}{6}$

Junto con los puntos fronterizos evaluamos:
$f(-\pi) = -5.14$ $\quad$ $f(\frac{5\pi}{6}) = 2.26$
$f(\frac{\pi}{6}) = 0.89$ $\quad$ $f(2\pi) = 8.28$
-5.14 es el mínimo y 8.28 es el máximo

3.2 Monotonía y concavidad

Ejemplo 1:
Si $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 7$ encuentre dónde f es creciente y dónde es decreciente

$$f'(x) = 6x^2 - 6x - 12 = 6(x+1)(x-2)$$

$f(x)$ tiene puntos estacionarios en -1 y 2
f es creciente en $(-\infty, -1] \cup [2, \infty)$
f es decreciente en $[-1, 2]$

Ejemplo 2:
Determine dónde $g(x)$ es creciente y dónde es decreciente si:

$$g(x) = \frac{x}{1 + x^2}$$

$$g'(x) = \frac{(1+x^2) - x(2x)}{(1+x^2)^2}$$
$$= \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$$
$$= \frac{(1-x)(1+x)}{(1+x^2)^2}$$

Existen puntos de separación en -1 y 1 que generan 3 intervalos

g es creciente en $[-1, 1]$

g es decreciente en $(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$

Ejemplo 3:

¿En dónde $f(x)$ es creciente, decreciente, cóncava o convexa? Si

$$f(x) = \frac{x^3}{3} - x^2 - 3x + 4$$

$$f'(x) = x^2 - 2x - 3$$
$$f'(x) = (x+1)(x-3)$$

f es creciente en $(-\infty, -1) \cup (3, \infty)$

f es decreciente en $(-1, 3)$

$$f''(x) = 2x - 2$$

f es cóncava en $(1, \infty)$

f es convexa en $(-\infty, 1)$

Ejemplo 4:

¿En donde $g(x)$ es cóncava o convexa? Si

$$g(x) = \frac{x}{1+x^2}$$
$$g'(x) = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$$
$$g''(x) = \frac{(1+x^2)^2(-2x) - (1-x^2)(2)(1+x^2)(2x)}{(1+x^2)^4}$$
$$= \frac{2x(x^2-3)}{(1+x^2)^3}$$

Existen puntos de separación en $-\sqrt{3}$, 0 y $\sqrt{3}$ que generan 4 intervalos

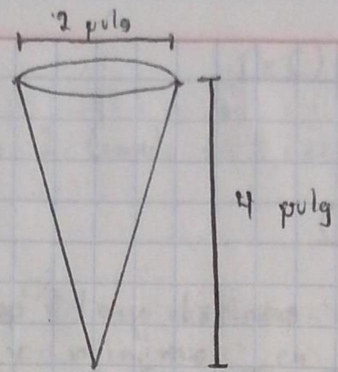
g es cóncava en $(-\sqrt{3}, 0) \cup (\sqrt{3}, \infty)$

g es convexa en $(-\infty, -\sqrt{3}) \cup (0, \sqrt{3})$

Ejemplo 5:

Suponga que se vierte agua en un depósito cónico a una razón constante de $\frac{1}{2}$ pulgada cúbica por segundo. Determine la altura h como función del tiempo t y dibuje $h(t)$ desde $t=0$ hasta el momento en el que el depósito está lleno.

El depósito es de la siguiente forma



Obtenemos su volumen por la relación

$$V = \frac{\pi r^2 h}{3}$$

Observemos que por triángulos semejantes

$$\frac{r}{h} = \frac{1}{4} \Rightarrow r = \frac{h}{4}$$

Así:

$$V = \frac{\pi r^2 h}{3} = \frac{\pi}{3}\left(\frac{h}{4}\right)^2 h = \frac{\pi}{48} h^3$$

Como fluye al interior a $\frac{1}{2}$ in/s, el volumen en el instante t es:

$$V = \frac{t}{2}$$

Al igualar estas dos expresiones

$$\frac{t}{2} = \frac{\pi h^3}{48}$$

Cuando $h=4$, tenemos que $t = 8.4$

Despejando la ecuación anterior

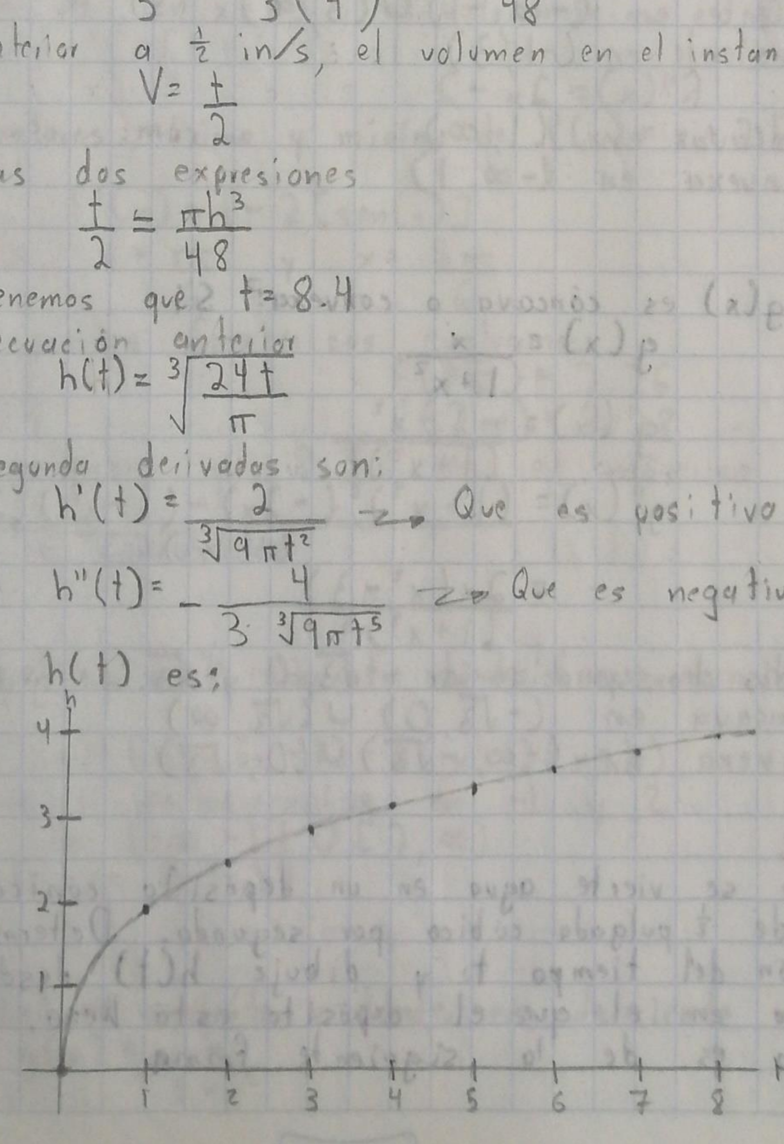
$$h(t) = \sqrt[3]{\frac{24t}{\pi}}$$

La primera y segunda derivadas son:

$$h'(t) = \frac{2}{\sqrt[3]{9\pi t^2}} \Rightarrow \text{Que es positivo}$$

$$h''(t) = -\frac{4}{3\sqrt[3]{9\pi t^5}} \Rightarrow \text{Que es negativa}$$

La gráfica de $h(t)$ es:



Ejemplo 6:
Una agencia de noticias reportó en mayo de 2004 que el desempleo en Asia oriental estaba aumentando en forma continua a una tasa creciente. Por otra parte el precio del alimento aumenta pero a una tasa más lenta que antes. Interprete estos enunciados en términos de funciones crecientes y decrecientes y concavidad.
Como el desempleo aumenta, éste es creciente, y como su tasa es creciente, tiene una "función" cóncava hacia arriba
Como el precio del alimento también aumenta, es creciente, pero como menciona que su tasa es menor que antes, es cóncava hacia abajo

Ejemplo 7:
Encuentre todos los puntos de inflexión de $F(x) = x^{1/3} + 2$

$$F'(x) = \frac{1}{3x^{2/3}}$$

$$F''(x) = \frac{-2}{9x^{5/3}}$$

No existen puntos donde $F''(x) = 0$
Pero cuando $x = 0$, $F''(x)$ no existe y este es un punto de inflexión pues es cóncava hacia arriba para $x < 0$ y cóncava hacia abajo para $x > 0$

3.3 Extremos locales y extremos en intervalos abiertos

Ejemplo 1:
Encuentre los valores extremos locales de la función $f(x) = x^2 - 6x + 5$ en $(-\infty, \infty)$
La función polinomial f es continua en todas partes y su derivada

$$f'(x) = 2x - 6$$

El único punto crítico para f es $f'(x) = 0$, esto es en $x = 3$
Vemos que f es decreciente en $(-\infty, 3)$ y creciente en $(3, \infty)$
Entonces $f(3) = -4$ es un valor mínimo local de f y al ser el único punto crítico, no existen otros valores extremos

Ejemplo 2:
Encuentre los valores extremos locales de

$$f(x) = \frac{x^3}{3} - x^2 - 3x + 4$$

en $(-\infty, \infty)$

$$f'(x) = x^2 - 2x - 3$$
$$= (x+1)(x-3)$$

Los puntos críticos de f son -1 y 3
Como $f'(x) > 0$ cuando $x < -1$ y $f'(x) < 0$ cuando $x > -1$ entonces

$f(-1) = \frac{17}{3}$ es un valor máximo local
Y como $f'(x) < 0$ cuando $x < 3$ y $f'(x)$ cuando $x > 3$, entonces $f(3) = -5$ es un valor mínimo local

Ejemplo 3:
Encuentre los valores extremos de $f(x) = (sen(x))^{2/3}$ en $(-\frac{\pi}{6}, \frac{2\pi}{3})$

$$f'(x) = \frac{2[\cos(x)]}{3[sen(x)]^{1/3}}, \quad x \neq 0$$

$f'(0)$ no existe y $f'(\frac{\pi}{2}) = 0$, por lo que 0 y $\frac{\pi}{2}$ son puntos críticos
$f'(x) < 0$ cuando $x < 0$ y $f'(x) > 0$ cuando $x > 0$ indica que $f(0) = 0$ es un mínimo
$f'(x) > 0$ cuando $x < \frac{\pi}{2}$ y $f'(x) < 0$ cuando $x > 0$ indica que $f(\frac{\pi}{2}) = 1$ es un máximo

Ejemplo 4:
Para $f(x) = x^2 - 6x + 5$, utilice la prueba de la segunda derivada para identificar extremos locales

$$f'(x) = 2x - 6$$
$$f''(x) = 2$$

Como $f'(3) = 0$ y $f''(x) > 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$, $f(3) = -4$ es un mínimo local

Ejemplo 5:
Utilice la prueba de la segunda derivada para identificar los extremos locales para

$$f(x) = \frac{x^3}{3} - x^2 - 3x + 4$$

$$f'(x) = x^2 - 2x - 3 = (x+1)(x-3)$$
$$f''(x) = 2x - 2$$

De $f'(x)$ hallamos que los puntos críticos son -1 y 3, así que en $f''(x)$:

$f''(-1) = -4 \Rightarrow$ Es un máximo local
$f''(3) = 1 \Rightarrow$ Es un mínimo local

Ejemplo 6:
Determine (si existen) los valores máximo y mínimo de $f(x) = x^4 - 4x$ en $(-\infty, \infty)$

$$f'(x) = 4x^3 - 4$$
$$f''(x) = 12x^2$$

$f'(x) = 0$ cuando $x = 1$ y es el único punto crítico. Al evaluar entonces $f''(1) = 12$, por lo que $f(1) = -3$ es un mínimo
Los hechos que se han establecido implican que f no puede tener valor máximo

Ejemplo 7:

Determine (si existen) los valores máximo y mínimo de

$$G(p) = \frac{1}{p(1-p)} \quad \text{en } (0,1)$$

$$G'(p) = \frac{2p-1}{p^2(1-p)^2}$$

El único punto crítico es $p = \frac{1}{2}$

$G'(p) < 0$ cuando $p < \frac{1}{2}$ y $G'(p) > 0$ cuando $p > \frac{1}{2}$ por lo que $G(\frac{1}{2}) = 4$ es un mínimo

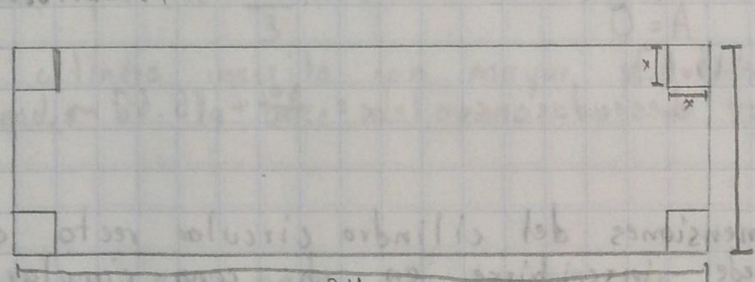
No existe algún máximo

3.4 Problemas prácticos

Ejemplo 1:

Una caja rectangular se fabrica con una pieza de cartón de 24 pulgadas de largo por 9 de ancho, de la cual se cortan cuadrados idénticos a partir de las cuatro esquinas y se doblan los lados hacia arriba. Determine las dimensiones de la caja de volumen máximo ¿Cuál es este volumen?

Sea x el ancho del cuadrado que se cortará y V el volumen de la caja resultante:



$$V = x(9-2x)(24-2x) = 216x - 66x^2 + 4x^3$$

$$V' = 12x^2 - 132x + 216 = 12(x-2)(x-9)$$
$$V'' = 24x - 132$$

Para satisfacer dimensiones reales de la caja definimos el intervalo $[0, 4.5]$, por ello, teniendo que $x=2$ y $x=9$ satisfacen a $V'=0$, descartamos a $x=9$

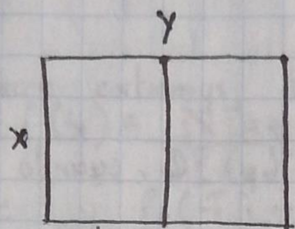
En 0 y 4.5: $V=0$

En 2: $V=200$

Concluimos que el volumen máximo sería de $200\ in^3$ con 20 in de largo, 5 de ancho y 2 de alto

Ejemplo 2:

Un granjero tiene 160 metros de cerca de alambre con la cual se planea construir 2 corrales adyacentes;



¿Cuáles son las dimensiones que encierran el área máxima

Tenemos

$$100m = 3x + 2y$$
$$y = 50 - \frac{3x}{2}$$

El área total A está dada por

$$A = xy = 50x - \frac{3x^2}{2}$$

$$A' = 50 - 3x$$

Cuando igualamos $50 - 3x$ a cero y resolvemos, obtenemos $x = \frac{50}{3}$ como un punto estacionario. Así, junto a los puntos fronterizos 0 y $\frac{100}{3}$ tenemos 3 puntos críticos

Para 0 y $\frac{100}{3}$, $A = 0$

Para $\frac{50}{3}$, $A = 416.67$

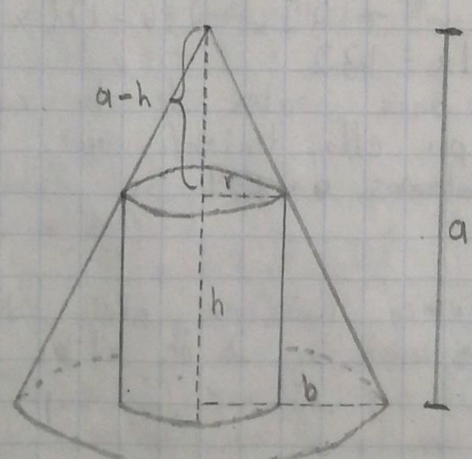
Las dimensiones deseadas son $x = \frac{50}{3} = 16.67\,m$, $y = 25\,m$

Ejemplo 3:

Encuentre las dimensiones del cilindro circular recto de volumen máximo que puede inscribirse en un cono circular recto dado

Sea a la altura y b el radio de la base del cono dado (ambas constantes)

Sea h la altura, r el radio y V el volumen de un cilindro inscrito



El volumen del cilindro inscrito es:

$$V = \pi r^2 h$$

Por semejanza de triángulos:

$$\frac{a-h}{r} = \frac{a}{b}$$

$$\therefore h = a - \frac{ar}{b}$$

Al sustituir en la fórmula para V tenemos:

$$V = \pi r^2\left(a - \frac{ar}{b}\right) = \pi a r^2 - \frac{\pi a r^3}{b}$$

Queremos maximizar V para r en el intervalo $[0, b]$. Ahora:

$$\frac{dV}{dr} = 2\pi a r - \frac{3\pi a r^2}{b} = \pi a r\left(2 - \frac{3r}{b}\right)$$

Esto produce los puntos estacionarios $r = 0$ y $r = \frac{2b}{3}$

Tenemos así 3 puntos críticos en $[0, b]$: $0, \frac{2b}{3}, b$

Cuando $r = 0$ y $r = b$, $V = 0$

Cuando $r = \frac{2b}{3}$, es entonces cuando debería dar el máximo

Encontramos que $h = \frac{a}{3}$

Es decir el cilindro inscrito con mayor volumen tiene dos tercios el radio de la base del cono y un tercio de la altura del cono

Ejemplo 4:

Suponga que un pez nada río arriba con velocidad relativa al agua v y que la corriente del río tiene velocidad $-v_c$ (el signo negativo indica que la velocidad de la corriente es en dirección opuesta a la del pez). La energía empleada en recorrer una distancia d a contracorriente es directamente proporcional al tiempo requerido para recorrer la distancia d y el cubo de la velocidad. ¿Qué velocidad v minimiza la energía empleada en nadar esa distancia?

La velocidad del pez es $v - v_c$

Tenemos $d = (v - v_c)t$

Así

$$t = \frac{d}{v - v_c}$$

Por lo tanto, para una v fija, la energía requerida para que el pez recorra una distancia d es

$$E(v) = \frac{kdv^3}{v - v_c} = kd \cdot \frac{v^3}{v - v_c}$$

Para determinar el valor que minimiza E haremos $E'(v) = 0$

$$E'(v) = \frac{kd}{(v - v_c)^2} \cdot v^2 (2v - 3v_c) = 0$$

El único punto crítico en (v_c, ∞) se determina por $2v - 3v_c = 0$ que lleva a:

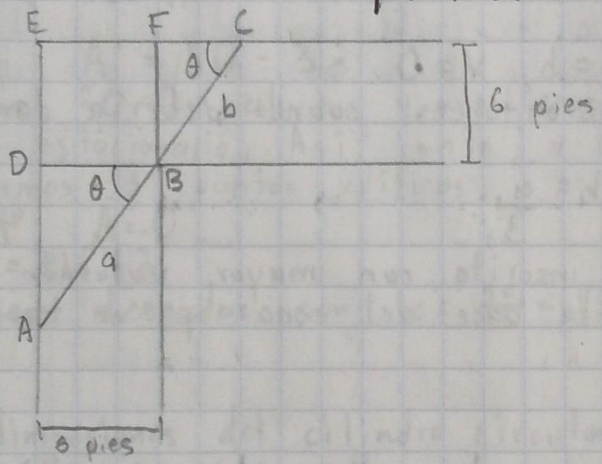
$$v = \frac{3v_c}{2} \Rightarrow \text{es un mínimo}$$

Por lo tanto, la velocidad que minimiza la energía empleada es una y media veces la rapidez de la corriente

Ejemplo 5:

Un pasillo de 6 pies de ancho da vuelta en ángulo recto. ¿Cuál es la longitud de la varilla delgada más larga que puede transportarse alrededor de la esquina si la varilla no puede doblarse?

Proponemos



Sean a y b las longitudes de los segmentos AB y BC

Sea θ la medida de los ángulos $\measuredangle DBA$ y $\measuredangle FCB$

Vemos que los triángulos rectángulos semejantes tienen como hipotenusas a y b respectivamente y vemos:

$$\cos\theta = \frac{6}{a} \Rightarrow a = \frac{6}{\cos\theta} = 6\sec\theta \qquad \operatorname{sen}\theta = \frac{6}{b} \Rightarrow b = \frac{6}{\operatorname{sen}\theta} = 6\csc\theta$$

Como el ángulo determina la posición de la varilla:

$$L(\theta) = a + b = 6\sec\theta + 6\csc\theta \quad \text{en } \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$$

Así:

$$L'(\theta) = 6\sec\theta\tan\theta - 6\csc\theta\cot\theta$$

$$= 6\left(\frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos^2\theta} - \frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}^2\theta}\right)$$

$$= 6\left(\frac{\operatorname{sen}^3\theta - \cos^3\theta}{\operatorname{sen}^2\theta\cos^2\theta}\right)$$

$L'(\theta)=0$ siempre que $\operatorname{sen}^3\theta - \cos^3\theta = 0$, esto lleva a que $\operatorname{sen}\theta = \cos\theta$. Esto sólo pasa en $\frac{\pi}{4}$ dentro del intervalo $(0, \frac{\pi}{2})$ y vemos que éste es un mínimo, pues hemos determinado la varilla más corta que no pasa por el pasillo
Entonces
$$L(\tfrac{\pi}{4}) = 16.97 \text{ pies}$$

3.5 Graficación de funciones mediante cálculo

Ejemplo 1:

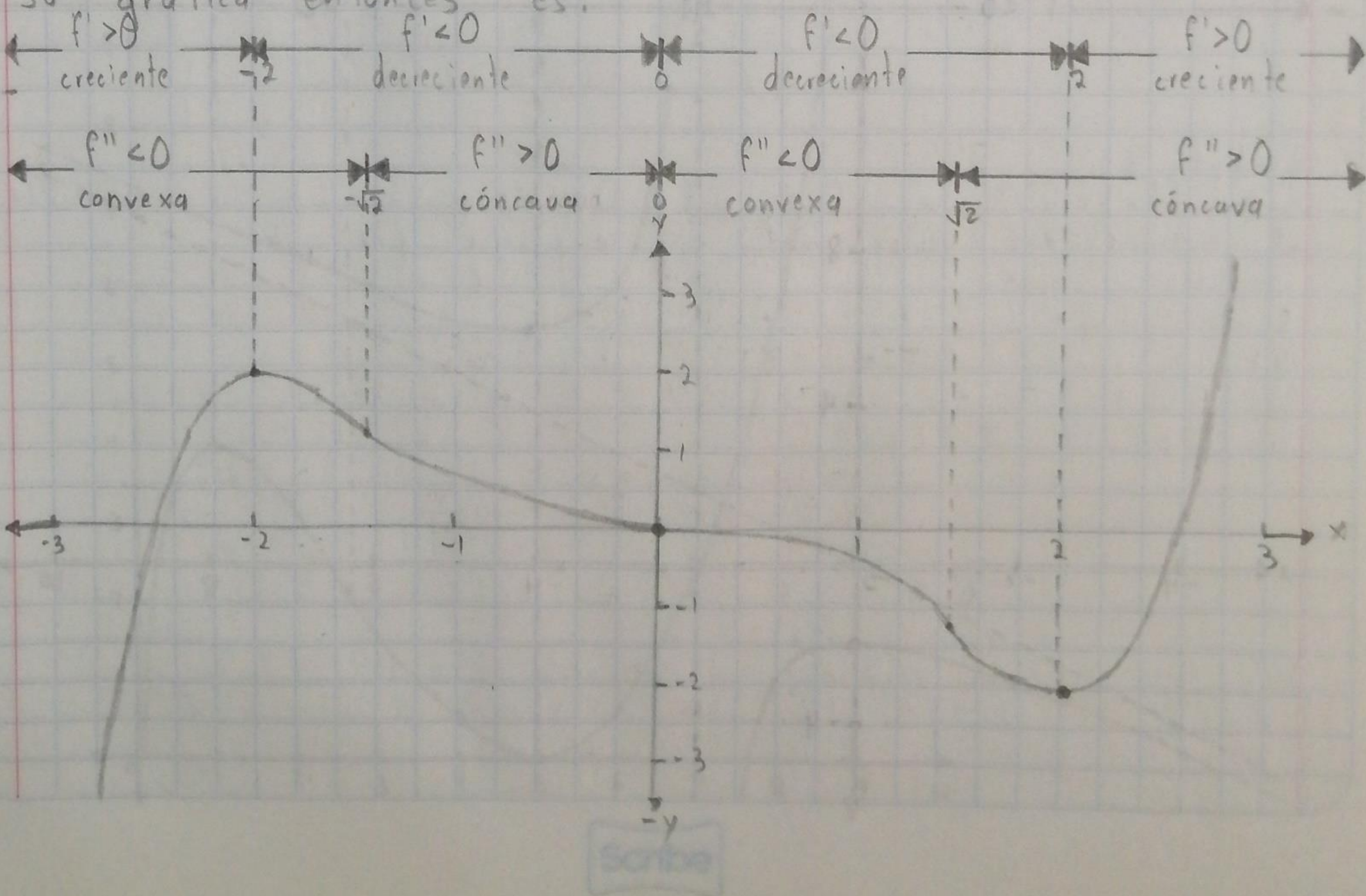
Haga la gráfica de
$$f(x) = \frac{3x^5 - 20x^3}{32}$$

$f(-x) = -f(x)$ $\therefore$ su gráfica es simétrica al origen
$$f'(x) = \frac{15x^4 - 60x^2}{32} = \frac{15x^2(x-2)(x+2)}{32}$$

Los puntos críticos son -2, 0 y 2 donde -2 es máximo local y 2 es mínimo local
$$f''(x) = \frac{60x^3 - 120x}{32} = \frac{15x(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})}{8}$$

En $(-\sqrt{2}, 0) \cup (\sqrt{2}, \infty)$ f es cóncava
En $(-\infty, -\sqrt{2}) \cup (0, \sqrt{2})$ f es convexa

Su gráfica entonces es:



Ejemplo 2:

Dibuje la gráfica de $f(x)=\dfrac{x^2-2x+4}{x-2}$

No hay intersecciones con el eje x pues las soluciones de $x^2-2x+4=0$ no son números reales

Anticipamos una asíntota vertical en $x=2$ ya que

$$\lim_{x\to 2^-}\frac{x^2-2x+4}{x-2}=-\infty \qquad \lim_{x\to 2^+}\frac{x^2-2x+4}{x-2}=\infty$$

También

$$f'(x)=\frac{x(x-4)}{(x-2)^2} \qquad f''(x)=\frac{8}{(x-2)^3}$$

Los puntos estacionarios son $x=0$ y $x=4$. Luego descubrimos que $f(0)=-2$ es un máximo local y $f(4)=6$ es un mínimo local

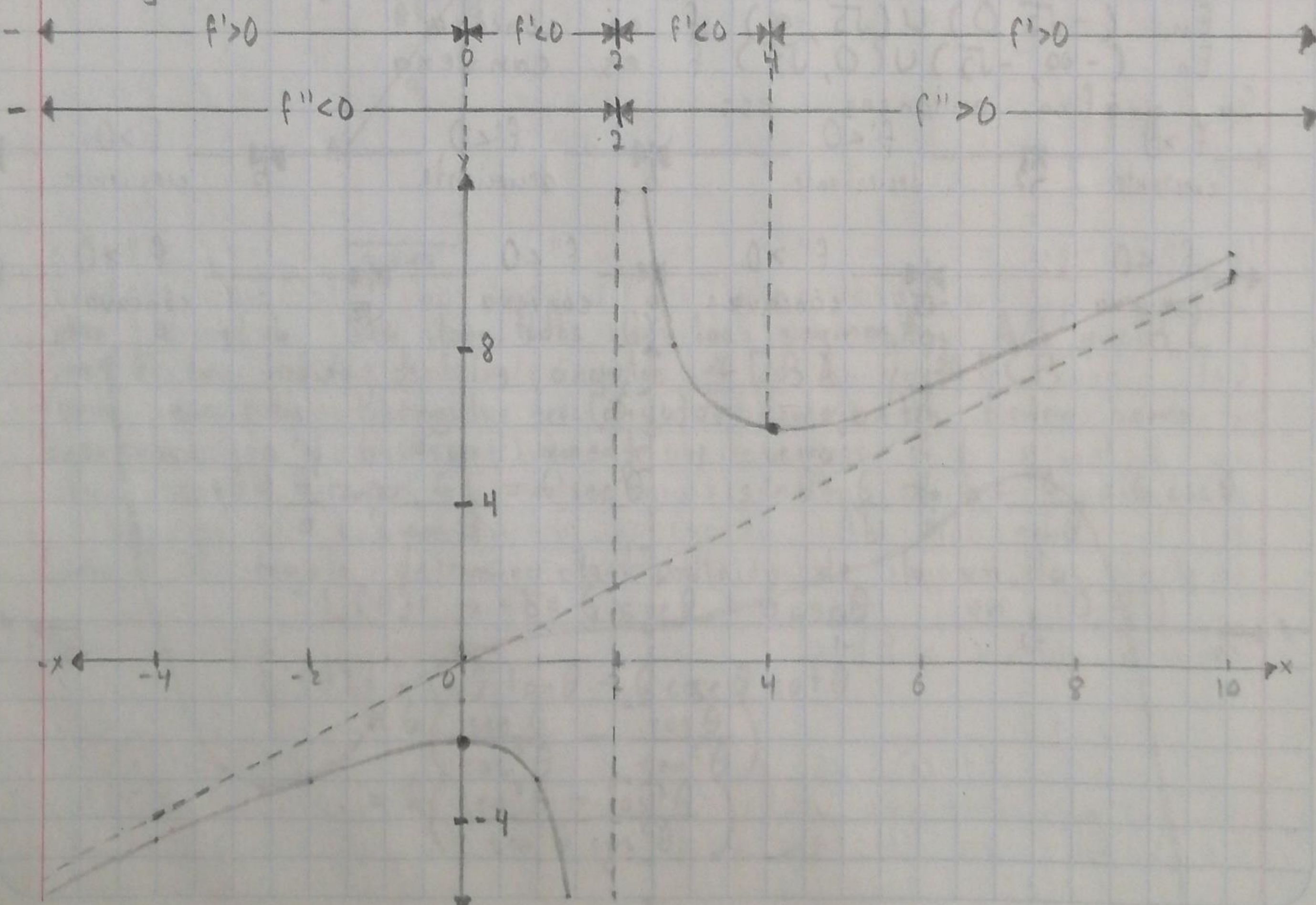
Como $f''(x)$ nunca es cero, no existen puntos de inflexión

Finalmente vemos que

$$f(x)=\frac{x^2-2x+4}{x-2}=x+\frac{4}{x-2}$$

Por lo que $f(x)$ se acerca más a la recta $y=x$ cuando $|x|$ se hace más grande, generando una asíntota oblicua

Su gráfica es:



Ejemplo 3:

Analice y dibuje la función de la siguiente:

$$F(x) = \frac{\sqrt{x}\,(x-5)^2}{4}$$

El dominio de F es $[0, \infty)$ y su rango también

$$F'(x) = \frac{5(x-1)(x-5)}{8\sqrt{x}}, \quad x > 0$$

Encontramos los puntos estacionarios 1 y 5

$F(1) = 4$ es máximo local

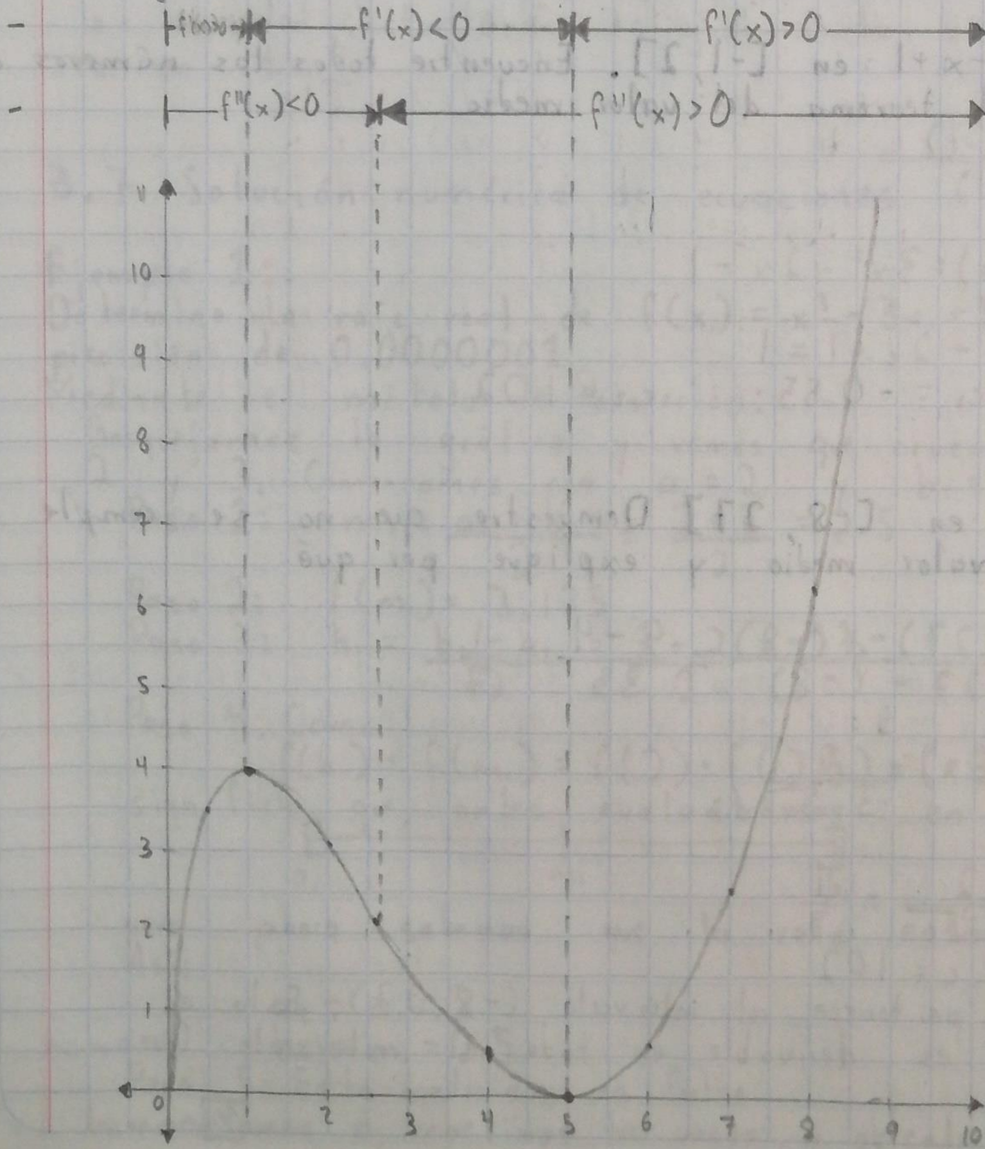
$F(5) = 0$ es mínimo local

$$F''(x) = \frac{5(3x^2 - 6x - 5)}{16x^{3/2}}, \quad x > 0$$

Y la solución del numerador en $(0, \infty)$ es 2.6

Antes de este punto la función es convexa y después es cóncava

Su gráfica es



3.6 El teorema del valor medio para derivadas

Ejemplo 1:
Encuentre el número c garantizado por el teorema del valor medio para $f(x) = 2\sqrt{x}$ en $[1, 4]$

$$\frac{f(4) - f(1)}{4 - 1} = \frac{4 - 2}{3} = \frac{2}{3}$$

Ahora $f'(x) = 2 \cdot \frac{x^{-1/2}}{2} = \frac{1}{\sqrt{x}}$

De modo que:

$$\frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{2}{3}$$
$$\therefore \; x = \frac{9}{4}$$

Ejemplo 2:
Sea $f(x) = x^3 - x^2 - x + 1$ en $[-1, 2]$. Encuentre todos los números c que satisfagan al teorema del valor medio

$$\frac{f(2) - f(-1)}{2 - (-1)} = 1$$

Ahora

$$f'(x) = 3x^2 - 2x - 1$$

Entonces

$$3c^2 - 2c - 1 = 1$$
$$\therefore \; c_1 = -0.55 \; , \quad c_2 = 1.22$$

Ejemplo 3:
Sea $f(x) = x^{2/3}$ en $[-8, 27]$ Demuestre que no se cumple el teorema del valor medio y explique por qué

Tenemos que

$$\frac{f(27) - f(-8)}{27 - (-8)} = \frac{9 - 4}{35} = \frac{1}{7}$$

Así

$$f'(x) = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$$

Y al resolver

$$\frac{2}{3\sqrt[3]{c}} = \frac{1}{7}$$
$$\therefore \; c = 102$$

Pero $c = 102$ no pertenece al intervalo $(-8, 27)$. Esto es porque $f(x)$ no es derivable en todo el intervalo (veamos $x = 0$)

Ejemplo 4:
Suponga que un objeto tiene una función de posición $s(t) = t^2 - t - 2$. Determine la velocidad promedio sobre el intervalo $[3, 6]$ y encuentre el instante en que la velocidad instantánea es igual a la velocidad promedio

$s(6) = 28$

$s(3) = 4$

$$\bar{v} = \frac{28-4}{6-3} = \frac{24}{3} = 8$$

velocidad instantánea $= \frac{ds}{dt}$

$\frac{ds}{dt} = 2t - 1$ → entonces igualamos $8 = 2t - 1$

$\therefore t = \frac{9}{2}$

La velocidad promedio es 8 y el momento en el que la velocidad instantánea es igual a la velocidad promedio es en $t = \frac{9}{2}$

3.7 Solución numérica de ecuaciones

Ejemplo 1:
Determine la raíz real de $f(x) = x^3 - 3x - 5 = 0$ con una precisión de 0.0000001
Mediante el método de bisección:

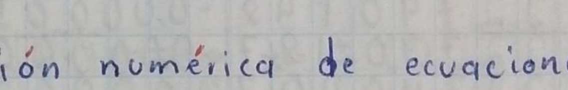
Bosquejamos la gráfica y vemos que cruza el eje x entre 2 y 3. Comenzamos con $a_1 = 2$ y $b_1 = 3$

Paso 1: $m_1 = \frac{a_1 + b_1}{2} = \frac{2+3}{2} = 2.5$

Paso 2: $f(m_1) = 3.125$

Paso 3: $h_1 = \frac{b_1 - a_1}{2} = \frac{3-2}{2} = 0.5$

Paso 4: Como
$$f(a_1) \cdot f(m_1) = f(2) \cdot f(2.5) = (-3)(3.125) < 0$$
significa que, antes evaluábamos en



pero ahora sabemos que la raíz está entre a_1 y m_1
Así:

$a_2 = a_1 = 2$

$b_2 = m_1 = 2.5$

Paso 5: Esta condición es falsa
Incrementamos n, repetimos los pasos y obtendremos esta tabla:

n	h_n	m_n	$f(m_n)$
1	0.5	2.5	3.125
2	0.25	2.25	-0.359
3	0.125	2.375	1.271
4	0.0625	2.3125	0.429
5	0.03125	2.28125	0.02811
6	0.015625	2.265625	-0.16729
7	0.0078125	2.2734375	-0.07001
8	0.0039063	2.2773438	-0.02106
9	0.0019531	2.2792969	0.00350
10	0.0009766	2.2783203	-0.00878
11	0.0004883	2.2788086	-0.00264
12	0.0002441	2.2790528	0.00043
13	0.0001221	2.2789307	-0.00111
14	0.0000610	2.2789918	-0.00034
15	0.0000305	2.2790224	0.00005
16	0.0000153	2.2790071	-0.00015
17	0.0000076	2.2790148	-0.000005
18	0.0000038	2.2790187	-0.0000001
19	0.0000019	2.2790207	0.0000024
20	0.0000010	2.2790197	0.0000011
21	0.00000005	2.2790192	0.0000005
22	0.00000002	2.2790189	0.00000014
23	0.00000001	2.2790187	-0.00000011
24	0.00000001	2.2790188	0.00000001

Concluimos que la raíz es $x = 2.2790188$ con error de 0.0000001 como mucho

Ejemplo 2:

Utilice el método de Newton para determinar la raíz real r de $f(x) = x^3 - 3x - 5 = 0$ con siete decimales de precisión

Usamos $x_1 = 2.5$ como primera aproximación. El algoritmo es:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \longrightarrow x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^3 - 3x_n - 5}{3x_n^2} = \frac{2x_n^3 + 5}{3x_n^2 - 3}$$

Obtenemos la siguiente tabla:

n	x_n
1	2.5
2	2.30
3	2.2793
4	2.2790188
5	2.2790188

En cuatro pasos obtenemos que los primeros ocho dígitos se repiten, por lo que sentimos confianza de reportar la raíz como 2.2790188 con un poco de duda del último dígito

Ejemplo 3:
Utilice el método de Newton para determinar la raíz real positiva de $f(x) = 2 - x + \text{sen}(x) = 0$
Usamos $x_1 = 2$ como primera aproximación. El algoritmo es:
$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \rightarrow x_{n+1} = x_n - \frac{2 - x_n + \text{sen}(x_n)}{-1 + \cos(x_n)}$$
Obtenemos la siguiente tabla

n	x_n
1	2.0
2	2.6420926
3	2.5552335
4	2.5541961
5	2.5541960
6	2.5541960

Concluimos que esta raíz es 2.5541960

Ejemplo 4:
Utilice el algoritmo de punto fijo para aproximar la solución de $f(x) = x^2 - 2\sqrt{x+1} = 0$
Escribimos
$$x^2 = 2\sqrt{x+1} \rightarrow x = \pm(2\sqrt{x+1})^{1/2}$$
Y como sabemos que la solución es positiva, tomamos la raíz positiva y escribimos
$$x_{n+1} = (2\sqrt{x_n+1})^{1/2} = \sqrt{2}\,(x_n+1)^{1/4}$$
Obtenemos la siguiente tabla:

n	x_n
1	2.0
2	1.8612097
3	1.8392994
4	1.8357680
5	1.8351969
6	1.8351045
7	1.8350896
8	1.8350871
9	1.8350868
10	1.8350867
11	1.8350867
12	1.8350867

La solución es aproximadamente 1.8350867

3.8 Antiderivadas

Ejemplo 1:
Encuentre una antiderivada de la función $f(x) = 4x^3$ en $(-\infty, \infty)$
Sabemos que $F(x) = x^4$ es una antiderivada para $f(x)$

Ejemplo 2:

Encuentre la antiderivada general de $f(x) = x^2$ en $(-\infty, \infty)$

La antiderivada general es

$$F(x) = \frac{x^3}{3} + c$$

Ejemplo 3:

Encuentre la antiderivada general de $f(x) = x^{4/3}$

$$\int x^{4/3}\,dx = \frac{x^{7/3}}{7/3} + c$$
$$= \frac{3x^{7/3}}{7} + c$$

Ejemplo 4:

Mediante la linealidad de la integral, evalúe

a) $\int (3x^2 + 4x)\,dx$ b) $\int (u^{3/2} - 3u + 14)\,du$ c) $\int \left(\frac{1}{t^2} + \sqrt{t}\right) dt$

a) $$\int (3x^2 + 4x)\,dx = \int 3x^2\,dx + \int 4x\,dx$$
$$= 3\int x^2\,dx + 4\int x\,dx$$
$$= 3\left(\frac{x^3}{3} + c_1\right) + 4\left(\frac{x^2}{2} + c_2\right)$$
$$= x^3 + 2x^2 + (3c_1 + 4c_2)$$
$$= x^3 + 2x^2 + c$$

b) $$\int (u^{3/2} - 3u + 14)\,du = \int u^{3/2}\,du + \int -3u\,du + \int 14\,du$$
$$= \frac{u^{5/2}}{5/2} + c_1 - 3\int u\,du + 14\int du$$
$$= \frac{u^{5/2}}{5/2} + c_1 - 3\left(\frac{u^2}{2} + c_2\right) + 14(u + c_3)$$
$$= \frac{2u^{5/2}}{5} - \frac{3u^2}{2} + 14u + c$$

c) $$\int \left(\frac{1}{t^2} + \sqrt{t}\right) dt = \int \frac{dt}{t^2} + \int \sqrt{t}\,dt$$
$$= \frac{t^{-1}}{-1} + c_1 + \frac{t^{3/2}}{3/2} + c_2$$
$$= -\frac{1}{t} + \frac{2t^{3/2}}{3} + c$$

Ejemplo 5:

Evalúe

a) $\int (x^4 + 3x)^{30}(4x^3 + 3)\,dx$ b) $\int \operatorname{sen}^{10}(x)\cos(x)\,dx$

a) Consideramos:

$u = x^4 + 3x$

$du = (4x^3 + 3)\,dx$

Entonces tenemos:

$$\int u^{30}\,du = \frac{u^{31}}{31} + c$$

$$= \frac{(x^4 + 3x)^{31}}{31} + c$$

b) Consideramos:

$u = sen(x)$

$du = cos(x)\,dx$

Entonces tenemos:

$$\int u^{10}\,du = \frac{u^{11}}{11} + c$$

$$= \frac{sen^{11}(x)}{11} + c$$

Ejemplo 6:

Evalúe

a) $\int (x^3 + 6x)^5 (6x^2 + 12)\,dx$ b) $\int (x^2 + 4)^{10}\, x\,dx$

a) Consideramos

$u = x^3 + 6x$

$du = (3x^2 + 6)\,dx$

Entonces

$$\int (x^3 + 6x)^5 [2(3x^2 + 6)]\,dx$$

$$2\int (x^3 + 6x)^5 (3x^2 + 6)\,dx$$

Tenemos

$$2\int u^5\,du = 2 \cdot \frac{u^6}{6} + c$$

$$= \frac{u^6}{3} + c$$

$$= \frac{(x^3 + 6x)^6}{3} + c$$

b) Consideramos

$u = x^2 + 4$

$du = 2x\,dx \Rightarrow \frac{du}{2} = x\,dx$

Tenemos:

$$\int u^{10} \frac{du}{2} = \frac{1}{2}\int u^{10}\,du = \frac{1}{2} \cdot \frac{u^{11}}{11} + c = \frac{(x^2+4)^{11}}{22} + c$$

3.9 Introducción a ecuaciones diferenciales

Ejemplo 1:

Encuentre una ecuación en x y y de la curva que pasa por el punto $(-1,2)$ y cuya pendiente en cualquier punto de la curva es igual a dos veces la abscisa (coordenada x) de ese punto

La condición que debe cumplirse en cada punto (x,y) es:

$$\frac{dy}{dx} = 2x$$

Adicionalmente, cuando $x=-1$, debe cumplirse que: $y=2$

Consideremos a $\frac{dy}{dx}$ como un cociente de dos diferenciales

$$\frac{dy}{dx} = 2x$$

$$dy = 2x\,dx$$

Ahora integramos ambos lados:

$$\int dy = \int 2x\,dx$$

$$y + c_1 = x^2 + c_2$$

$$y = x^2 + c_2 - c_1$$

$$y = x^2 + c$$

De esta familia queremos aquella que $y=2$ cuando $x=-1$, así:

$$2 = (-1)^2 + c$$

$$\therefore\ c = 1$$

Así hallamos la ecuación

$$y = x^2 + 1$$

Ejemplo 2:

Resuelva la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x + 3x^2}{y^2}$$

Después encuentre aquella solución para la cual $y=6$ cuando $x=0$

Primero separamos las variables:

$$y^2\,dy = (x + 3x^2)\,dx$$

Ahora integramos ambos lados

$$\int y^2\,dy = \int (x + 3x^2)\,dx$$

$$\frac{y^3}{3} + c_1 = \frac{x^2}{2} + c_2 + x^3 + c_3$$

$$\frac{y^3}{3} = \frac{x^2}{2} + x^3 + c$$

$$y^3 = \frac{3x^2}{2} + 3x^3 + c$$

$$y = \sqrt[3]{\frac{3x^2}{2} + 3x^3 + c}$$

Ahora buscamos que $y = 6$ cuando $x = 0$, entonces

$$6 = \sqrt[3]{c}$$
$$\therefore c = 216$$

Así, nuestra ecuación es:

$$y = \sqrt[3]{\frac{3x^2}{2} + 3x^3 + 216}$$

Ejemplo 3: Problema de un cuerpo que cae

Cerca de la superficie de la Tierra, la aceleración a la que cae un objeto debido a la gravedad, es de 32 pies por segundo, siempre y cuando la resistencia del aire se pueda despreciar. Si un objeto se lanza hacia arriba desde una altura inicial de 1000 pies a una velocidad de 50 pies por segundo, encuentre su velocidad y altura 4 segundos después

Sabemos que $v = 50$ y $s = 1000$ cuando $t = 0$, también:

$$\frac{dv}{dt} = -32$$
$$dv = -32\, dt$$
$$\int dv = \int -32\, dt$$
$$v = -32t + c$$

Como $v = 50$ en $t = 0$ encontramos

$$50 = (-32)(0) + c$$
$$\therefore c = 50$$

Entonces

$$v = -32t + 50$$

Ahora $v = \frac{ds}{dt}$ por lo que tenemos otra ecuación diferencial:

$$\frac{ds}{dt} = -32t + 50$$
$$\int ds = \int (-32t + 50)\, dt$$
$$s = -16t^2 + 50t + k$$

Como $s = 1000$ en $t = 0$ encontramos

$$1000 = k$$

Así,

$$s = -16t^2 + 50t + 1000$$

Ahora $s(4)$:

$$s = 944 \text{ pies}$$

Y también $v(4)$:

$$v = -78 \text{ pies por segundo}$$

Ejemplo 4:

La aceleración de un objeto que se mueve a lo largo de un eje coordenado está dada por $a(t) = (2t+3)^{-3}$ en m/s^2. Si la velocidad en $t=0$ es 4 m/s, encuentre la velocidad 2 segundos más tarde

Sabemos que:

$$\frac{dv}{dt} = (2t+3)^{-3}$$

$$v = \int (2t+3)^{-3}\, dt$$

$$v = -\frac{1}{4(2t+3)^2} + c$$

Como $v = 4$ en $t = 0$

$$4 = -\frac{1}{4(3)^2} + c$$

$$\therefore c = \frac{145}{36}$$

Asi

$$v = -\frac{1}{4(2t+3)^2} + \frac{145}{36}$$

En $t = 2$

$$v = -\frac{1}{4(49)} + \frac{145}{36}$$

$$\therefore v = 4.023 \ m/s$$

4: La integral definida

Contenido:
- Introducción al área
- La integral definida
- El primer teorema fundamental del cálculo
- El segundo teorema fundamental del cálculo y el método de sustitución
- El teorema del valor medio para integrales y el uso de simetría
- Integración numérica

4.1 Introducción al área

Ejemplo 1:
Suponga que:

$$\sum_{i=1}^{100} a_i = 60 \quad y \quad \sum_{i=1}^{100} b_i = 11$$

Calcule:

$$\sum_{i=1}^{100} (2a_i - 3b_i + 4)$$

$$\sum_{i=1}^{100} (2a_i - 3b_i + 4) = \sum_{i=1}^{100} 2a_i - \sum_{i=1}^{100} 3b_i + \sum_{i=1}^{100} 4$$
$$= 2\sum_{i=1}^{100} a_i - 3\sum_{i=1}^{100} b_i + \sum_{i=1}^{100} 4$$
$$= 2(60) - 3(11) + 100(4)$$
$$= 487$$

Ejemplo 2: Sumas telescópicas
Demuestre que:

a) $$\sum_{i=1}^{n} (a_{i+1} - a_i) = a_{n+1} - a_1$$

b) $$\sum_{i=1}^{n} [(i+1)^2 - i^2] = (n+1)^2 - 1$$

a) En lugar de aplicar linealidad, escribimos la suma y hacemos las cancelaciones convenientes.

$$\sum_{i=1}^{n} (a_{i+1} - a_i) = (a_2 - a_1) + (a_3 - a_2) + (a_4 - a_3) + \dots + (a_{n+1} - a_n)$$
$$= a_{n+1} - a_1$$

$\boxed{//}$

b) Hacemos lo mismo que en a)

$$\sum_{i=1}^{n} [(i+1)^2 - i^2] = (2^2 - 1^2) + (3^2 - 2^2) + (4^2 - 3^2) + \dots + [(n+1)^2 - n^2]$$

$$= (n+1)^2 - 1^2$$
$$= (n+1)^3 + 1$$

Ejemplo 3:
Encuentre una fórmula para

$$\sum_{j=1}^{n} (j+2)(j-5)$$

$$\sum_{j=1}^{n} (j+2)(j-5) = \sum_{j=1}^{n} (j^2 - 3j - 10)$$
$$= \sum_{j=1}^{n} j^2 - \sum_{j=1}^{n} 3j - \sum_{j=1}^{n} 10$$
$$= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - 3\left(\frac{n(n+1)}{2}\right) - 10n$$
$$= \frac{n(n^2 - 3n - 34)}{3}$$

Ejemplo 4:
¿Cuántas naranjas hay en la siguiente pirámide de la figura 4. Es una pirámide cuadrada de 7 pisos de altura. El piso más alto tiene una naranja, el siguiente nivel tiene 4, es decir 2 por lado, la siguiente 3 por lado

$$1^2 + 2^2 + \ldots + 7^2 = \sum_{i=1}^{7} i^2 = \frac{7(8)(15)}{6} = 140$$

140 naranjas

4.2 La integral definida

Ejemplo 1:
Evalúe la suma de Riemann para $f(x) = x^2 + 1$ en el intervalo $[-1, 2]$. Utilice la partición de puntos igualmente espaciados $-1 < -0.5 < 0 < 0.5 < 1 < 1.5 < 2$ y tome como punto muestral $\overline{x}_i$ al punto medio del i-ésimo subintervalo

$$R_P = \sum_{i=1}^{6} f(\overline{x}_i)\Delta x_i = [f(-0.75) + f(-0.25) + f(0.25) + f(0.75) + f(1.25) + f(1.75)](0.5)$$
$$= [1.5625 + 1.0625 + 1.0625 + 1.5625 + 2.5625 + 4.0625](0.5)$$
$$= 5.9375$$

Ejemplo 2:
Evalúe la suma de Riemann para

$$f(x) = (x+1)(x-2)(x-4) = x^3 - 5x^2 + 2x + 8$$

en el intervalo $[0, 5]$. Utilice la partición P con puntos de partición $0 < 1.1 < 2 < 3.2 < 4 < 5$ y los correspondientes puntos muestra $\bar{x}_1 = 0.5$, $\bar{x}_2 = 1.5$, $\bar{x}_3 = 2.5$, $\bar{x}_4 = 3.6$ y $\bar{x}_5 = 5$

$$R_P = \sum_{i=1}^{5} f(\bar{x}_i)\Delta x_i$$

$$= f(0.5)(1.1) + f(1.5)(0.9) + f(2.5)(1.2) + f(3.6)(0.8) + f(5)(1)$$
$$= 23.9698$$

Ejemplo 5:
Un objeto en el origen en $t=0$ tiene una velocidad en m/s

$$v(t) = \begin{cases} t/20 & \text{si } 0 \le t \le 40 \\ 2 & \text{si } 40 < t \le 60 \\ 5 - t/20 & \text{si } t > 60 \end{cases}$$

Haga un bosquejo de la curva de velocidad, expresando la posición del objeto en $t = 140$ como una integral definida

$$\int_0^{140} v(t)\,dt = \int_0^{40} \frac{t}{20}\,dt + \int_{40}^{60} 2\,dt + \int_{60}^{140} \left(5 - \frac{t}{20}\right) dt$$
$$= 40 + 40 + 40 - 40$$
$$= 80$$

4.3 El primer teorema fundamental del cálculo

Ejemplo 1:
Encuentre

$$\frac{d}{dx}\left[\int_1^x t^3\,dt\right]$$

Por el primer teorema fundamental del cálculo

$$\frac{d}{dx}\left[\int_1^x t^3\,dt\right] = x^3$$

Ejemplo 2:
Determine

$$\frac{d}{dx}\left[\int_2^x \frac{t^{3/2}}{\sqrt{t^2+17}}\,dt\right]$$

Por el primer teorema fundamental del cálculo

$$\frac{d}{dx}\left[\int_2^x \frac{t^{3/2}}{\sqrt{t^2+17}}\,dt\right] = \frac{x^{3/2}}{\sqrt{x^2+17}}$$

Ejemplo 3:
Encuentre

$$\frac{d}{dx}\left[\int_x^4 \tan^2(u)\cos(u)\,du\right], \quad \frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2}$$

$$\frac{d}{dx}\left[\int_x^4 \tan^2(u)\cos(u)\,du\right] = \frac{d}{dx}\left[-\int_4^x \tan^2(u)\cos(u)\,du\right]$$

$$= -\frac{d}{dx}\left[\int_4^x \tan^2(u)\cos(u)\,du\right]$$

$$= -\tan^2(x)\cos(x)$$

Ejemplo 4:
Encuentre

$$D_x\left[\int_1^{x^2} (3t-1)\,dt\right]$$

Aplicaremos regla de la cadena

$$D_u\left[\int_1^u (3t-1)\,dt\right] \cdot D_x u \quad \text{donde } u = x^2$$

$$(3u-1)(2x)$$

$$(3x^2-1)(2x)$$

$$6x^3 - 2x$$

Ejemplo 6:
Sea $A(x) = \int_1^x t^3\,dt$

a) Si $y = A(x)$, encuentre $\frac{dy}{dx} = x^3$

b) Encuentre la solución de la ecuación diferencial $\frac{dy}{dx} = x^3$ que satisface $y = 0$ cuando $x = 1$

c) Encuentre $\int_1^4 t^3\,dt$

a) Por el primer teorema fundamental del cálculo

$$\frac{dy}{dx} = A'(x) = x^3$$

b) Sabemos que:

$$\frac{dy}{dx} = x^3$$

Tomándolos como diferenciales

$$dy = x^3\,dx$$

$$\int dy = \int x^3\,dx$$

$$y + c_1 = \frac{x^4}{4} + c_2$$

$$y = \frac{x^4}{4} + c$$

Sustituiremos

$$0 = \frac{1^4}{4} + c$$

$$0 = \frac{1}{4} + c$$

$$\therefore \quad c = -\frac{1}{4}$$

Así, la ecuación es:

$$y = \frac{x^4}{4} - \frac{1}{4}$$

c) Como $y = A(x) = \dfrac{x^4}{4} - \dfrac{1}{4}$

$$\int_1^4 t^3\,dt = A(4) - A(1)$$

$$= \left(\frac{4^4}{4} - \frac{1}{4}\right) - \cancel{\left(\frac{1^4}{4} - \frac{1}{4}\right)}$$

$$= 64 - \frac{1}{4}$$

$$= \frac{255}{4}$$

4.4 El Segundo Teorema Fundamental del cálculo y el metodo de sustitución

Ejemplo 1:

Demuestre que

$$\int_a^b k\,dx = k(b-a)$$

donde k es una constante

$F(x) = kx$ es una antiderivada de $f(x) = k$. De esta manera, por el segundo teorema fundamental del cálculo

$$\int_a^b k\,dx = F(b) - F(a)$$

$$= kb - ka$$

$$= k(b-a)$$

$\boxtimes$

Ejemplo 2:

Demuestre que

$$\int_a^b x\,dx = \frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2}$$

$F(x) = \dfrac{x^2}{2}$ es una antiderivada de $f(x) = x$. Entonces:

$$\int_a^b x\,dx = F(b) - F(a)$$
$$= \frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2}$$

$\boxed{//}$

Ejemplo 3:
Demuestre que si r es un número racional diferente de -1, entonces

$$\int_a^b x^r\,dx = \frac{b^{r+1}}{r+1} - \frac{a^{r+1}}{r+1}$$

$F(x) = \frac{x^{r+1}}{r+1}$ es una antiderivada de $f(x) = x^r$

Por el Segundo Teorema Fundamental del Cálculo

$$\int_a^b x^r\,dx = F(b) - F(a)$$
$$= \frac{b^{r+1}}{r+1} - \frac{a^{r+1}}{r+1}$$

Si $r<0$, requerimos que 0 no esté en $[a,b]$ $\boxed{//}$

Ejemplo 4:
Evalúe

$$\int_{-1}^{2} (4x - 6x^2)\,dx$$

$$\int_{-1}^{2} (4x - 6x^2)\,dx = \left[2x^2 - 2x^3\right]_{-1}^{2}$$
$$= (8 - 16) - (2 + 2)$$
$$= -12$$

$//$

Ejemplo 5:
Evalúe

$$\int_1^8 (x^{1/3} + x^{4/3})\,dx$$

$$\int_1^8 (x^{1/3} + x^{4/3})\,dx = \left[\frac{3x^{4/3}}{4} + \frac{3x^{7/3}}{7}\right]_1^8$$
$$= \left(\frac{3(16)}{4} + \frac{3(128)}{7}\right) - \left(\frac{3(1)}{4} + \frac{3(1)}{7}\right)$$
$$= \frac{45}{4} + \frac{381}{7}$$
$$= 65.68$$

$//$

Ejemplo 6:
Encuentre

$$D_x \int_0^x 3 \operatorname{sen}(t)\, dt$$

Por el primer teorema fundamental del cálculo obtenemos:
$3 \operatorname{sen}(x)$

Ejemplo 7:
Evalúe $\int \operatorname{sen}(3x)\, dx$
Sea $u = 3x \therefore du = 3\,dx \Rightarrow \frac{du}{3} = dx$

Entonces:

$$\int \operatorname{sen}(u) \cdot \frac{du}{3} = \frac{1}{3} \int \operatorname{sen}(u)\, du$$
$$= -\frac{1}{3} \cdot \cos(u) + c$$
$$= -\frac{1}{3} \cdot \cos(3x) + c$$
$$= -\frac{\cos(3x)}{3} + c$$

Ejemplo 8:
Evalúe $\int x \operatorname{sen}(x^2)\, dx$
Sea $u = x^2 \therefore du = 2x\,dx \Rightarrow \frac{du}{2} = x\,dx$

Entonces:

$$\int x \operatorname{sen}(x^2)\, dx = \int \operatorname{sen}(u) \cdot \frac{du}{2}$$
$$= \frac{1}{2} \int \operatorname{sen}(u)\, du$$
$$= -\frac{\cos(u)}{2} + c$$
$$= -\frac{\cos(x^2)}{2} + c$$

Ejemplo 9:
Evalúe $\int x^3 \sqrt{x^4 + 11}\, dx$
Sea $u = x^4 + 11 \therefore du = 4x^3\, dx \Rightarrow \frac{du}{4} = x^3\, dx$

Entonces

$$\int x^3 \sqrt{x^4 + 11}\, dx = \int \sqrt{u} \cdot \frac{du}{4}$$

$$= \frac{1}{4}\int \sqrt{u} \cdot du$$

$$= \frac{1}{4} \cdot \frac{2u^{3/2}}{3} + c$$

$$= \frac{u^{3/2}}{6} + c$$

$$= \frac{(x^4+11)^{3/2}}{6} + c$$

Ejemplo 12:
Evalúe

$$\int_0^1 \frac{x+1}{(x^2+2x+6)^2}\, dx$$

Sea $u = x^2+2x+6$ $\therefore$ $du = (2x+2)\,dx \Rightarrow \frac{du}{2} = (x+1)\,dx$

Y sean $a, b \in \mathbb{R}$ así que

$$\int_0^1 \frac{x+1}{(x^2+2x+6)^2}\, dx = \frac{1}{2}\int_a^b u^{-2}\, du$$

$$= \left[-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{u}\right]_a^b$$

$$= \left[-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^2+2x+6}\right]_0^1$$

$$= -\frac{1}{18} - \left(-\frac{1}{12}\right)$$

$$= \frac{1}{36}$$

Ejemplo 15:
Sale agua de un depósito cuya capacidad es de 55 galones a una tasa de $V'(t) = 11 - 1.1t$ en donde t está en horas y V en galones. Al principio el depósito está lleno

a) ¿Cuánta agua sale del tanque entre $t=3$ y $t=5$ horas?

b) ¿Cuánto tiempo pasa para que queden exactamente 5 galones en el tanque?

a) $V(t)$ es la cantidad de agua que ha salido hasta el instante t. La cantidad que ha salido de $t=3$ a $t=5$ es igual al área bajo la curva $V'(t)$ de 3 a 5. Así:

$$V(5) - V(3) = \int_3^5 V'(t)\,dt = \int_3^5 (11 - 1.1t)\,dt$$

$$= \left[11t - \frac{1.1t^2}{2}\right]_3^5$$

$$= 13.2 \text{ galones}$$

b) Sea t_1 el instante en el que quedan 5 galones en el depósito

$$V(t_1) = 50$$

$$V(t_1) - V(0) = \int_0^{t_1} (11 - 1.1t)\,dt$$

$$50 - 0 = \left[11t - \frac{1.1t^2}{2}\right]_0^{t_1}$$

$$0 = -50 + 11t_1 - 0.55t_1^2$$

Las soluciones de la última ecuación son 6.985 y 13.015, pero como

$$\int_0^{10} (11 - 1.1t)\,dt = 55$$

13.015 no tiene sentido

Así que quedan 5 galones después de 6.985 horas

4.5 El teorema del valor medio para integrales y el uso de simetría

Ejemplo 1:

Determine el valor promedio de la función definida por $f(x) = x\,\text{sen}(x^2)$ en el intervalo $[0, \sqrt{\pi}]$

El valor promedio es

$$\frac{1}{\sqrt{\pi} - 0}\int_0^{\sqrt{\pi}} x\,\text{sen}(x^2)\,dx$$

Sea $u = x^2 \therefore du = 2x\,dx \Rightarrow \frac{du}{2} = x\,dx$, y sean $a, b \in \mathbb{R}$

$$\frac{1}{\sqrt{\pi} - 0}\int_a^b \text{sen}(u)\,\frac{du}{2} = \frac{1}{\sqrt{\pi} - 0}\cdot\frac{1}{2}\int_a^b \text{sen}(u)\,du$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi} - 0}\cdot -\left[\frac{\cos(u)}{2}\right]_a^b$$

$$= \left[-\frac{\cos(x^2)}{2\sqrt{\pi}}\right]_0^{\sqrt{\pi}}$$

$$= -\frac{\cos[(\sqrt{\pi})^2]}{2\sqrt{\pi}} - \left(-\frac{\cos(0^2)}{2\sqrt{\pi}}\right)$$

$$= 0.2821 - (-0.2821)$$

$$= 0.5642$$

Ejemplo 2:

Suponga que la temperatura en grados Farenheit de una barra metálica de longitud de 2 pies depende de la posición x de acuerdo con la función $T(x) = 40 + 20x(2 - x)$. Determine la temperatura promedio de la barra. ¿Existe algún punto en donde la temperatura real sea igual a la temperatura media?

La temperatura promedio es:

$$\frac{1}{2-0}\int_0^2 [40+20x(2-x)]\,dx = \int_0^2 [20+20x-10x^2]\,dx$$
$$= \left[20x+10x^2-\frac{10x^3}{3}\right]_0^2$$
$$= \left(40+40-\frac{80}{3}\right)-0$$
$$= \frac{160}{3}\ ^\circ F$$

Para encontrar si la temperatura real llega a ser igual a la promedio proponemos

$$40+20x(2-x) = \frac{160}{3}$$
$$3x^2-6x+2=0$$

Resolviendo

$$x_1 = 0.42265 \qquad x_2 = 1.5774$$

Ambas soluciones están entre 0 y 2 por lo que hay dos puntos donde la temperatura real es igual a la promedio

Ejemplo 3:

Determine todos los valores de c que satisfacen el teorema del valor medio para integrales para $f(x)=x^2$ en el intervalo $[-3,3]$

El teorema enuncia:

$$f(c) = \frac{1}{b-a}\int_{-3}^{3} x^2\,dx$$
$$= \frac{1}{3-(-3)}\int_{-3}^{3} x^2\,dx$$
$$= \left[\frac{1}{6}\cdot\frac{x^3}{3}\right]_{-3}^{3}$$
$$= \left[\frac{x^3}{18}\right]_{-3}^{3}$$
$$= \frac{3^3}{18}-\frac{(-3)^3}{18}$$
$$= \frac{3}{2}-\left(-\frac{3}{2}\right)$$
$$= \frac{6}{2}$$
$$= 3$$

De modo que

$$f(c)=3$$
$$\therefore c^2 = 3$$

$$c_1 = \sqrt{3}$$
$$c_2 = -\sqrt{3}$$
Ambos están en el intervalo

Ejemplo 4:
Determine todos los valores de c que satisfacen el teorema del valor medio para integrales para
$$f(x) = \frac{1}{(x+1)^2}$$
en el intervalo $[0, 2]$
El teorema enuncia
$$f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b \frac{dx}{(x+1)^2}$$
$$= \frac{1}{2}\int_0^2 \frac{dx}{(x+1)^2}$$
Sea $u = x+1 \therefore du = dx$, entonces
$$\frac{1}{2}\int_d^e u^{-2}\, du$$
$$= \frac{1}{2}\left[\frac{u^{-1}}{-1}\right]_d^e$$
$$= \left[-\frac{1}{2(x+1)}\right]_0^2$$
$$= -\frac{1}{2(2+1)} - \left(-\frac{1}{2(0+1)}\right)$$
$$= -\frac{1}{6} - \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{3}$$
De modo que
$$f(c) = \frac{1}{3}$$
$$\therefore \frac{1}{(c+1)^2} = \frac{1}{3}$$
Despejando y desarrollando
$$3 = c^2 + 2c + 1$$
$$c^2 + 2c - 2 = 0$$
Resolviendo:
$$c_1 = -2.7321 \qquad c_2 = 0.73205$$
Sólo c_2 está en el intervalo, así que este es el único valor que satisface al teorema

Ejemplo 5:
Evalúe
$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos\left(\frac{x}{4}\right) dx$$

Como $\cos\left(\frac{-x}{4}\right) = \cos\left(\frac{x}{4}\right)$, $f(x) = \cos\left(\frac{x}{4}\right)$ es una función par

Enunciamos:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos\left(\frac{x}{4}\right) dx = 2\int_{0}^{\pi} \cos\left(\frac{x}{4}\right) dx$$
$$= 8\int_{0}^{\pi} \cos\left(\frac{x}{4}\right) \cdot \frac{dx}{4}$$
$$= \left[8 \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{x}{4}\right)\right]_{0}^{\pi}$$
$$= 4\sqrt{2} - 0$$
$$= 4\sqrt{2}$$

Ejemplo 6:

Evalúe

$$\int_{-5}^{5} \frac{x^5}{x^2+4}\, dx$$

$f(x) = \frac{x^5}{x^2+4}$ es una función impar

$$\therefore \int_{-5}^{5} \frac{x^5}{x^2+4}\, dx = 0$$

Ejemplo 8:

Evalúe

$$\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen}^3(x) \cos^5(x)\, dx$$

$f(x) = \operatorname{sen}(x)$ es impar

$f(x) = \cos(x)$ es par

Una función impar elevada a una potencia impar es impar

$\therefore$ $\operatorname{sen}^3(x)$ es impar

Una función par elevada a cualquier potencia entera es par

$\therefore$ $\cos^5(x)$ es par

Una función impar por una función par es impar

$\therefore$ $\operatorname{sen}^3(x)\cos^5(x)$ es impar

$$\therefore \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen}^3(x) \cos^5(x) = 0$$

Ejemplo 9:

Evalúe

a) $\int_{0}^{2\pi} |\operatorname{sen}(x)|\, dx$ b) $\int_{0}^{100\pi} |\operatorname{sen}(x)|\, dx$

a) $f(x) = |\operatorname{sen}(x)|$ es periódica con periodo π

Entonces

$$\int_0^{2\pi} |sen(x)|\,dx = \int_0^{\pi} |sen(x)|\,dx + \int_{\pi}^{2\pi} |sen(x)|\,dx$$
$$= 2\int_0^{\pi} |sen(x)|\,dx$$
$$= 2[-\cos(x)]_0^{\pi}$$
$$= 2[1-(-1)]$$
$$= 4$$

b) $$\int_0^{100\pi} |sen(x)|\,dx = \underbrace{\int_0^{\pi} |sen(x)|\,dx + \int_{\pi}^{2\pi} |sen(x)|\,dx + \dots + \int_{99\pi}^{100\pi} |sen(x)|\,dx}_{100 \text{ integrales iguales}}$$
$$= 100\int_0^{\pi} |sen(x)|\,dx$$
$$= 100[-\cos(x)]_0^{\pi}$$
$$= 200$$

4.6 Integración numérica

Ejemplo 1:

Aproxime la integral definida:

$$\int_1^3 \sqrt{4-x}\,dx$$

usando las sumas de Riemann del punto izquierdo, del punto derecho y del punto medio con $n=4$

Tendremos los valores

$x_0 = 1.0$ $f(x_0) = 1.7321$

$x_1 = 1.5$ $f(x_1) = 1.5811$

$x_2 = 2.0$ $f(x_2) = 1.4142$

$x_3 = 2.5$ $f(x_3) = 1.2247$

$x_4 = 3.0$ $f(x_4) = 1.0000$

Punto izquierdo:

$$\int_1^3 \sqrt{4-x}\,dx = \frac{b-a}{n}[f(x_0)+f(x_1)+f(x_2)+f(x_3)]$$
$$= 2.9761$$

Punto derecho:

$$\int_1^3 \sqrt{4-x}\,dx = \frac{b-a}{n}[f(x_1)+f(x_2)+f(x_3)+f(x_4)]$$
$$= 2.6100$$

Punto medio:

$$\int_1^3 \sqrt{4-x}\,dx = \frac{b-a}{n}\left[f\left(\frac{x_0+x_1}{2}\right)+f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)+f\left(\frac{x_2+x_3}{2}\right)+f\left(\frac{x_3+x_4}{2}\right)\right] = 2.7996$$

Ejemplo 3:
Aproxime la integral definida

$$\int_0^2 \operatorname{sen}(x^2)\,dx$$

por medio de la regla del trapecio con $n=8$

Tendriemos entonces

$$\int_0^2 \operatorname{sen}(x^2)\,dx \approx \frac{b-a}{2n}\left[f(a) + 2\sum_{i=1}^{7} f\left(a + \frac{i(b-a)}{n}\right) + f(b)\right]$$

$$= 0.125\left[\operatorname{sen}(0^2) + 2\left(\operatorname{sen}(0.25^2) + \operatorname{sen}(0.5^2) + \operatorname{sen}(0.75^2) + \operatorname{sen}(1^2) + \operatorname{sen}(1.25^2) + \operatorname{sen}(1.5^2) + \operatorname{sen}(1.75^2)\right) + \operatorname{sen}(2^2)\right]$$

$$= 0.79082$$

Ejemplo 4:
Aproxime la integral definida

$$\int_0^3 \frac{1}{1+x^2}\,dx$$

por medio de la regla de la parábola con $n=6$

Sea $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$, $a=0$, $b=3$ y $n=6$

Las x_i son: $x_0 = 0$, $x_1 = 0.5$, $x_2 = 1$, $x_3 = 1.5$, $x_4 = 2$, $x_5 = 2.5$, $x_6 = 3$

Así:

$$\int_0^3 \frac{1}{1+x^2}\,dx \approx \frac{3-0}{3 \cdot 6}\left[f(0) + 4f(0.5) + 2f(1) + 4f(1.5) + 2f(2) + 4f(2.5) + f(3)\right]$$

$$= 1.2471$$

Ejemplo 7:
Mientras su padre conducía desde San Luis hasta la ciudad de Jefferson, Chris observó la velocidad del automóvil cada 10 minutos, es decir, cada sexto de hora. La siguiente tabla muestra esas lecturas del velocímetro. Utilice la regla del trapecio para aproximar cuánto viajaron

Minutos	Velocidad
0	0
10	55
20	57
30	60
40	70
50	70
60	70
70	70
80	19
90	0
100	59
110	63
120	65
130	62
140	0
150	0
160	0
170	22
180	38
190	35
200	25
210	0

Sea $v(t)$ la velocidad del automóvil en el instante t, donde t se mide en horas contadas a partir del inicio del viaje

Dividimos el intervalo $[0, 3.5]$ en intervalos de $\frac{1}{6}$. Entonces la regla del trapecio nos da:

$$\int_0^{3.5} v(t)\,dt \approx \frac{3.5-0}{2\cdot 21}\left[v(0) + 2\cdot\sum_{i=1}^{20} v\left(0+\frac{i(3.5-0)}{21}\right) + v(21)\right]$$

$$= 140$$

Condujeron aproximadamente 140 millas

5: Aplicaciones de la integral

Contenido:
- El área de una región plana
- Volúmenes de sólidos: capas, discos, arandelas
- Volúmenes de sólidos de revolución: cascarones
- Longitud de una curva plano
- Trabajo y fuerza de un fluido
- Momentos y centros de masa
- Probabilidad y variables aleatorias

5.1 El área de una región plana

Ejemplo 1:
Encuentre el área de la región R bajo $y = x^4 - 2x^3 + 2$ entre $x = -1$ y $x = 2$

Determinamos el área bajo $f(x)$ como

$$\int_{-1}^{2} (x^4 - 2x^3 + 2)\, dx = \left[\frac{x^5}{5} - \frac{x^4}{2} + 2x\right]_{-1}^{2}$$
$$= \left(\frac{32}{5} - \frac{16}{2} + 4\right) - \left(-\frac{1}{5} - \frac{1}{2} - 2\right)$$
$$= \frac{51}{10}$$
$$= 5.1$$

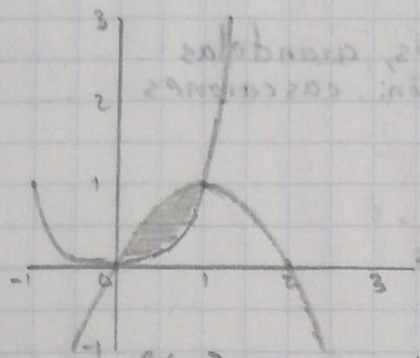
Ejemplo 2:
Encuentre el área de la región R acotada por $y = \frac{x^2}{3} - 4$, el eje x, $x = -2$ y $x = 3$

Determinamos esta área como:

$$\int_{-2}^{3} \left(\frac{x^2}{3} - 4\right) dx = \left[\frac{x^3}{9} - 4x\right]_{-2}^{3}$$
$$= \left(\frac{27}{9} - 12\right) - \left(-\frac{8}{9} + 8\right)$$
$$= -\frac{145}{9}$$
$$= -16.11$$

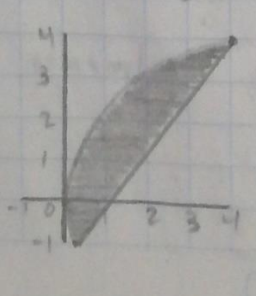
Como el área es no negativa, realmente tendremos $16.11\ u^2$

Ejemplo 5:
Encuentre el área de la región entre las curvas $y = x^4$ y $y = 2x - x^2$
Bosquejamos:



Llamemos $f(x)$ a x^4 y $g(x)$ a $2x - x^2$
Para obtener el área realizamos:
$$\int_0^1 g(x) - f(x)$$
Es decir:
$$\int_0^1 (2x - x^2 - x^4)\,dx = \left[x^2 - \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5} \right]_0^1$$
$$= 1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{5}$$
$$= \frac{7}{15}$$

Ejemplo 6: Rebanadas horizontales
Encuentre el área de la región entre la parábola $y^2 = 4x$ y la recta $4x - 3y = 4$
Necesitaremos puntos de intersección para las curvas, por lo que igualamos:
$$y^2 = 3y + 4$$
$$y^2 - 3y - 4 = 0$$
$$(y-4)(y+1) = 0$$
$$y = 4, -1$$
Al evaluar, concluimos que los puntos de intersección son $(4,4)$ y $\left(\frac{1}{4}, -1\right)$. Al bosquejarlo obtenemos:



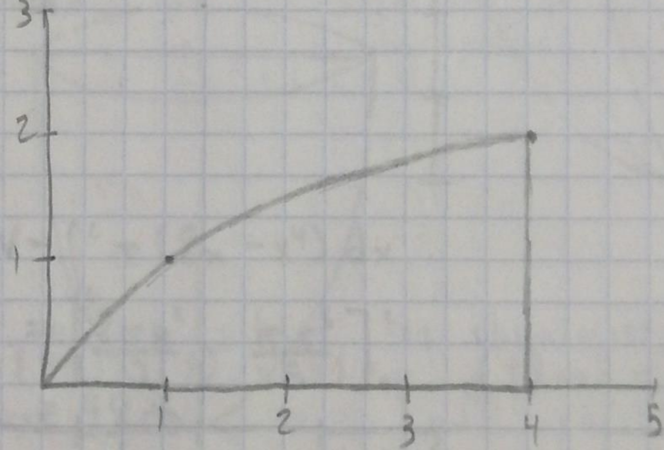
Ahora, su área está dada por

$$\int_{-1}^{4}\left(\frac{3y+4}{4}-\frac{y^2}{4}\right)dy=\int_{-1}^{4}\left(\frac{3y+4-y^2}{4}\right)dy$$
$$=\frac{1}{4}\int_{-1}^{4}(3y+4-y^2)\,dy$$
$$=\frac{1}{4}\left[\frac{3y^2}{2}+4y-\frac{y^3}{3}\right]_{-1}^{4}$$
$$=\frac{125}{24}$$
$$=5.21$$

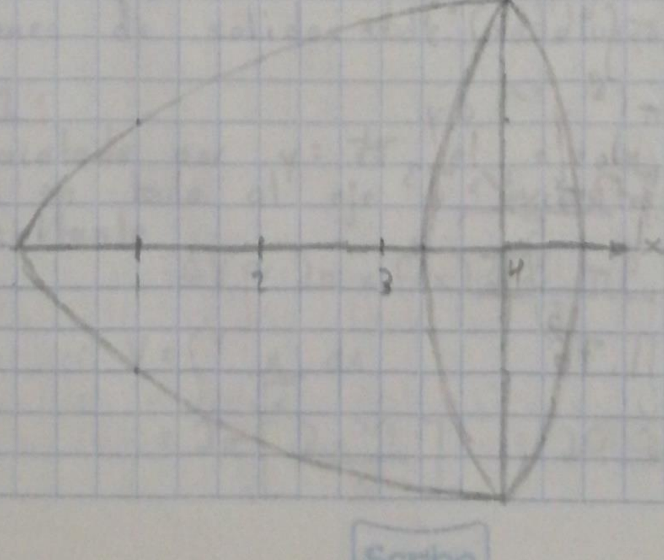
5.2 Volúmenes de sólidos: capas, discos, arandelas

Ejemplo 1:
Encuentre el volumen del sólido de revolución obtenido al hacer girar alrededor del eje x la región plana R acotada por $y=\sqrt{x}$, el eje x y la recta $x=4$

Tenemos:



Al hacerlo girar alrededor del eje x tendremos



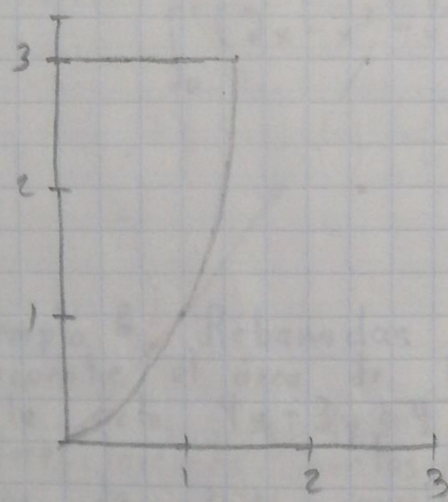
Obtenemos el volumen del cilindro por:

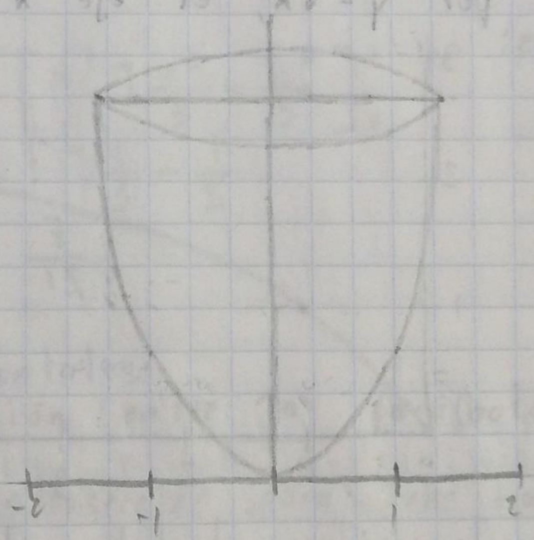
$$V = \int_0^4 \pi (\sqrt{x})^2 \, dx$$
$$= \pi \int_0^4 x \, dx$$
$$= \left[\frac{\pi x^2}{2}\right]_0^4$$
$$= \frac{16\pi}{2}$$
$$= 8\pi$$
$$= 25.13$$

Ejemplo 2:

Encuentre el volumen del sólido generado al hacer girar la región acotada por la curva $y = x^3$, el eje y y la recta $y = 3$ en torno al eje y

Las figuras son:

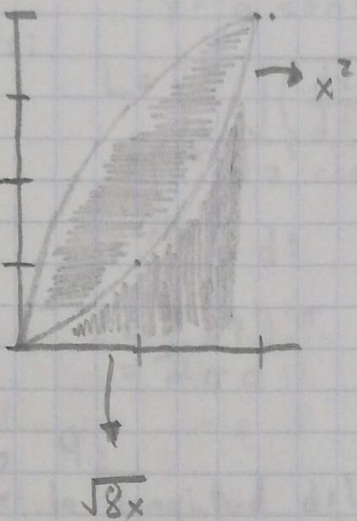


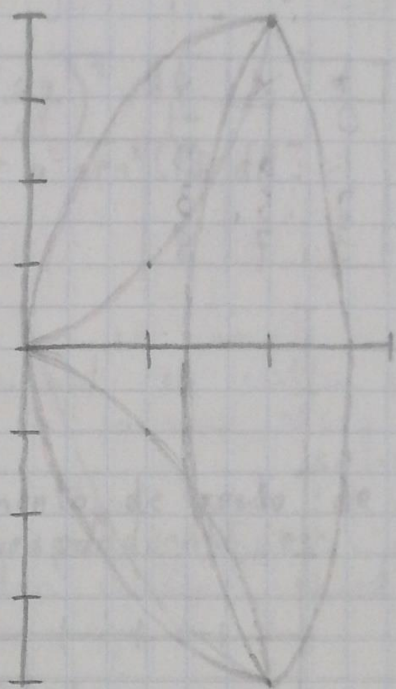


Así $y = x^3$ es equivalente a $x = \sqrt[3]{y}$

$$V = \pi \int_0^b (f(x)^2) \, dx$$
$$V = \pi \int_0^3 y^{2/3} \, dy$$
$$= \left[\frac{3\pi y^{5/3}}{5}\right]_0^3$$
$$= \frac{9\pi \sqrt[3]{9}}{5}$$
$$= 11.76$$

Ejemplo 3:
Encuentre el volumen del sólido generado al hacer girar la región acotada por las parábolas $y = x^2$ y $y^2 = 8x$ en torno al eje x
Las figuras son





$$V = \int_0^2 \pi (8x - x^4)\, dx$$
$$= \left[\frac{8\pi x^2}{2} - \frac{\pi x^5}{5}\right]_0^2$$
$$= \frac{48\pi}{5}$$
$$= 30.16$$

5.3 Volúmenes de sólidos de revolución: cascarones

Ejemplo 1:
La región acotada por $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$, el eje x, $x = 1$ y $x = 4$ se hace girar en torno al eje y, encuentré el volumen del sólido resultante

$$\Delta V \approx 2\pi x\, f(x)\, \Delta x$$

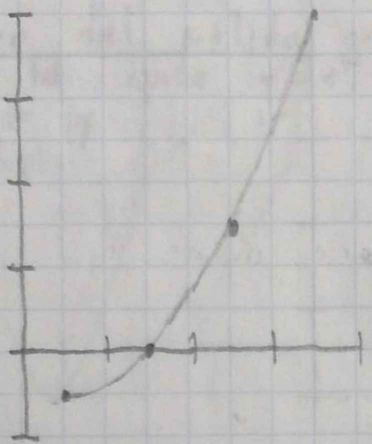
$$\therefore V = \int_1^4 \frac{x}{\sqrt{x}}\, dx$$
$$= 2\pi \left[\frac{2x^{3/2}}{3}\right]_1^4 = 29.32$$

5.4 Longitud de una curva plana

Ejemplo 1:
Dibuje la curva determinado por las ecuaciones paramétricas
$x = 2t + 1$, $y = t^2 - 1$, $0 \leq t \leq 3$

Tabulamos:

t	x	y
0	1	-1
1	3	0
2	5	3
3	7	8

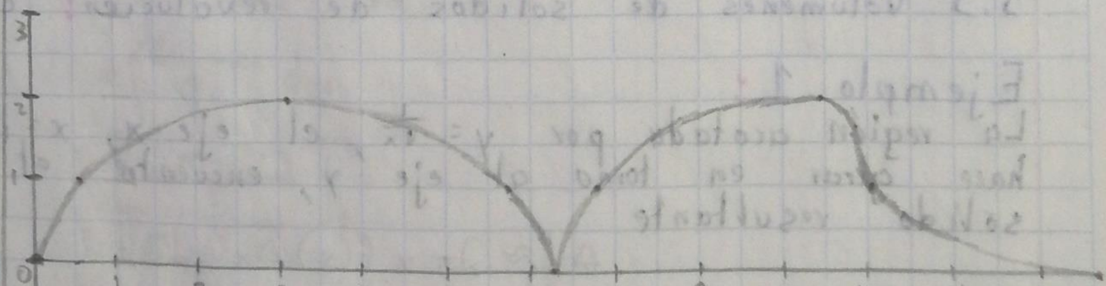


Ejemplo 2:
Dibuje la curva determinado por medio de las ecuaciones paramétricas $x = t - sen(t)$, $y = 1 - \cos(t)$, $0 \leq t \leq 4\pi$
Indique la orientación. ¿La curva es suave?

Tabulamos:

t	x(t)	y(t)
0	0.00	0
$\pi/2$	0.57	1
π	3.14	2
$3\pi/2$	5.71	1
2π	6.28	0
$5\pi/2$	6.85	1
3π	9.42	2
$7\pi/2$	10.00	1
4π	12.57	0

Graficamos:



$\frac{dx}{dt}$ y $\frac{dy}{dt}$ son 0 en 2π. Por tanto, no es una curva suave

Ejemplo 3:
Encuentre el perímetro de la circunferencia $x^2+y^2=a^2$
Escribimos la ecuación de la circunferencia de forma paramétrica:

$$\left.\begin{array}{l} x=a\cos(t) \\ y=a\,\mathrm{sen}(t) \end{array}\right\} 0\leq t\leq 2\pi$$

Entonces:

$$L=\int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt$$
$$=\int_0^{2\pi}\sqrt{a^2\cos^2(t)+a^2\mathrm{sen}^2(t)}\,dt$$
$$=\int_0^{2\pi} a\,dt$$
$$=\left[at\right]_0^{2\pi}$$
$$=2\pi a$$

Ejemplo 4:
Encuentre la longitud del segmento de recta de $A(0,1)$ a $B(5,13)$
La ecuación de la recta correspondiente es:

$$y=\frac{12x}{5}+1$$

Entonces:

$$L=\int_a^b\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx$$
$$=\int_0^5\sqrt{1+\left(\frac{12}{5}\right)^2}\,dx$$
$$=\frac{13}{5}\int_0^5 1\,dx$$
$$=\left[\frac{13x}{5}\right]_0^5$$
$$=13$$

5.5 Trabajo y fuerza de un fluido

Ejemplo 1:
Si la longitud natural de un resorte es 0.2 metros y si es necesaria una fuerza de 12 newtons para mantenerlo estirado 0.04 metros, encuentre el trabajo realizado al estirar el resorte de su longitud natural a una longitud de 0.3 metros
Por la Ley de Hooke, la fuerza requerida para mantener el resorte estirado x metros es $F(x)=kx$. Observemos:

$$F(0.04)=12$$

Es decir:

$$(k)(0.04) = 12$$
$$\therefore \quad k = 300$$
$$\therefore \quad F(x) = 300x$$

Entonces el trabajo hecho es:

$$W = \int_a^b F(x)\,dx$$
$$= \int_0^{0.1} 300x\,dx$$
$$= \left[150x^2\right]_0^{0.1}$$
$$= 1.5 \text{ joules}$$

Ejemplo 2:

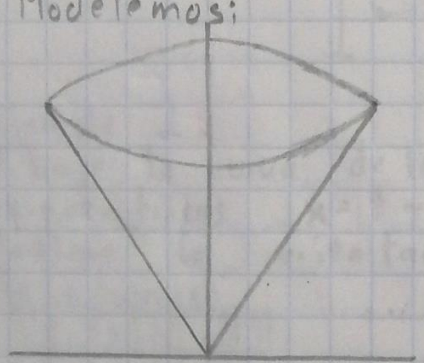
Un depósito con forma de un cono circular recto está lleno de agua. Si la altura del tanque es de 10 pies y el radio en la parte superior es de 4 pies, encuentre el trabajo hecho:

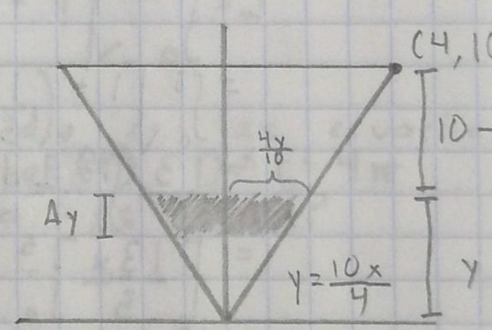
a) al bombear el agua hasta el borde superior del depósito

b) al bombear el agua hasta una altura de 10 pies por encima del borde superior del depósito

a)

Modelemos:





Tenemos un disco de grosor Δy que a la altura y tiene radio $4y/10$

Su volumen será aproximadamente

$$\pi\left(\frac{4y}{10}\right)^2 \Delta y \text{ pies cúbicos}$$

Su peso es alrededor de:

$$\delta\pi\left(\frac{4y}{10}\right)^2 \Delta y$$

donde $\delta = 62.4$ libras por pie cúbico (Densidad)

Como

$$W = F \cdot d$$

La fuerza necesaria para mover este disco de agua es igual a su peso, y el disco debe elevarse una distancia de $10-y$ pies. Así:

$$\Delta W = F \cdot d$$
$$= \delta\pi\left(\frac{4y}{10}\right)^2 \Delta y \cdot (10-y)$$

Por tanto:

$$W = \int_0^{10} \delta\pi\left(\frac{4y}{10}\right)^2 (10-y)\, dy$$
$$= \frac{4\delta\pi}{25}\int_0^{10} (10y^2 - y^3)\, dy$$
$$= \frac{(4\pi)(62.4)}{25}\left[\frac{10y^3}{3} - \frac{y^4}{4}\right]_0^{10}$$
$$= 26.138 \text{ libras} \cdot \text{pie}$$

b) Tendremos

$$W = \int_0^{10} \delta\pi\left(\frac{4y}{10}\right)^2 (20-y)\, dy$$
$$= \frac{(4\pi)(62.4)}{25}\left[\frac{20y^3}{3} - \frac{y^4}{4}\right]_0^{10}$$
$$\doteq 130.690 \text{ libras} \cdot \text{pie}$$

5.6 Momentos y centros de masa

Ejemplo 1:
En los puntos 0, 1, 2 y 4 a lo largo del eje x hay masas de 4, 2, 6 y 7 kilogramos respectivamente. Encuentre el centro de masa

Sea $\bar{x}$ la coordenada deseada. Sabemos que:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i m_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i}$$

Entonces:

$$\bar{x} = \frac{(0)(4)+(1)(2)+(2)(6)+(4)(7)}{4+2+6+7} = \frac{42}{19} = 2.21$$

En $x = 2.21$ se encuentra el punto de equilibrio

Ejemplo 2:
La densidad $\delta(x)$ de un alambre en el punto a x cm de uno de los extremos está dada por $\delta(x) = 3x^2$ gramos por centímetro. Encuentre el centro de masa del pedazo entre $x=0$ y $x=10$

Sea $\bar{x}$ la coordenada deseada. Sabemos que:

$$\bar{x} = \frac{\int_a^b x\,\delta(x)\,dx}{\int_a^b \delta(x)\,dx}$$

Entonces:

$$\bar{x} = \frac{\int_0^{10} x \cdot 3x^2\,dx}{\int_0^{10} 3x^2\,dx}$$

$$= \frac{\left[\frac{3x^4}{4}\right]_0^{10}}{\left[x^3\right]_0^{10}}$$

$$= \frac{7500}{1000}$$

$$= 7.5 \text{ cm}$$

Ejemplo 3:

Cinco partículas de masas 1, 4, 2, 3 y 2 unidades están colocados en los puntos (6, -1), (2, 3), (-4, 2), (-7, 4) y (2, -2) respectivamente. Encuentre el centro de masa

Sabemos que:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i m_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i} \qquad \bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i m_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i}$$

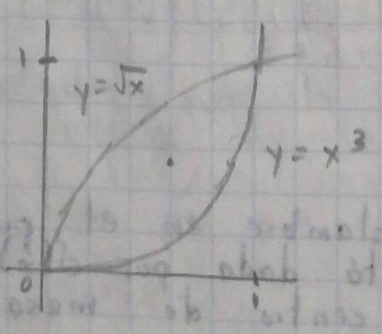
$$= -\frac{11}{12} \qquad = \frac{23}{12}$$

Es en $\left(-\frac{11}{12}, \frac{23}{12}\right)$

Ejemplo 4:

Encuentre el centroide de la región acotada por las curvas $y = x^3$, $y = \sqrt{x}$

Observemos



Para $\bar{x}$ sabemos que:

$$\bar{x} = \frac{\int_a^b x[f(x) - g(x)]\,dx}{\int_a^b [f(x) - g(x)]\,dx}$$

$$= \frac{\int_0^1 x[\sqrt{x} - x^3]\,dx}{\int_0^1 [\sqrt{x} - x^3]\,dx}$$

$$= \frac{\left[\frac{2x^{5/2}}{5} - \frac{x^5}{5}\right]_0^1}{\left[\frac{2x^{3/2}}{3} - \frac{x^4}{4}\right]_0^1} = \frac{\frac{1}{5}}{\frac{5}{12}}$$

$$= \frac{12}{25}$$

Para $\bar{y}$ sabemos que:

$$\bar{y} = \frac{\frac{1}{2}\int_a^b [(f(x))^2 - (g(x))^2]\,dx}{\int_a^b [f(x) - g(x)]\,dx}$$

$$= \frac{\frac{1}{2}\int_0^1 [(\sqrt{x})^2 - (x^3)^2]\,dx}{\int_0^1 [\sqrt{x} - x^3]\,dx}$$

$$= \frac{\frac{1}{2}\left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^7}{7}\right]_0^1}{\frac{5}{12}} = \frac{\frac{5}{28}}{\frac{5}{12}}$$

$$= \frac{3}{7}$$

El centroide está en:

$$\left(\frac{12}{25}, \frac{3}{7}\right)$$

Ejemplo 6:

Verifique el Teorema de Pappus para la región bajo $y = \text{sen}(x)$ $0 \leq x \leq \pi$ cuando se hace girar alrededor del eje x

Al hallar el centroide, vemos que está en $\bar{y} = \frac{\pi}{8}$

El área es:

$$A = \int_0^\pi \text{sen}(x)\,dx = [-\cos(x)]_0^\pi = 2$$

El volumen del sólido de revolución es:

$$V = \pi \int_0^{\pi} \operatorname{sen}^2(x)\,dx$$
$$= \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} [1-\cos(2x)]\,dx$$
$$= \frac{\pi}{2}\left[x - \frac{\operatorname{sen}(2x)}{2}\right]_0^{\pi} = \frac{\pi^2}{2}$$

Para verificar el teorema de Pappus, debemos demostrar que:

$$A\cdot(2\pi\bar{y}) = V$$

Que equivale a demostrar:

$$2\left(2\pi\cdot\frac{\pi}{8}\right) = \frac{\pi^2}{2}$$

Que claramente es cierto

$\boxed{//}$

5.7 Probabilidad y valores aleatorias

Ejemplo 1:

Se fabrican 20 piezas de plástico a la vez que se inspeccionan para buscar defectos. Suponga que la distribución de probabilidad está dada por:

x_i	0	1	2	3
p_i	0.90	0.06	0.03	0.01

Determine:

a) La probabilidad de que un lote de 20 piezas tenga al menos una pieza defectuosa

b) El número esperado de piezas defectuosas por lote de 20

a)

$$P(X\geq 1) = P(X=1) + P(X=2) + P(X=3)$$
$$= 0.06 + 0.03 + 0.01$$
$$= 0.10$$

b) Tenemos:

$$E(X) = 0\cdot 0.90 + 1\cdot 0.06 + 2\cdot 0.03 + 3\cdot 0.01$$
$$= 0.15$$

Esperamos 0.15 piezas defectuosas por lote

Ejemplo 2:

Una variable aleatoria continua X tiene función de densidad de probabilidad:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{10} & \text{si } 0 \leq x \leq 10 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Determine:

a) $P(1 \leq X \leq 9)$

b) $P(X \geq 4)$

c) $E(X)$

a) Tenemos:

$$P(1 \leq X \leq 9) = \int_1^9 \frac{1}{10}\,dx = \frac{8}{10} = 0.8$$

b) $$P(X \geq 4) = \int_4^{10} \frac{1}{10}\,dx = \frac{6}{10} = 0.6$$

c) $$E(X) = \int_0^{10} x \cdot \frac{1}{10}\,dx = \left[\frac{x^2}{20}\right]_0^{10} = 5$$

Ejemplo 3:

Suponga que el tiempo de vida en horas de una batería es una variable aleatoria continua X que tiene función de probabilidad:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{12x^2(5-x)}{625} & \text{si } 0 \leq x \leq 5 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

a) Verifique que esto es una función de probabilidad válida y dibuje su gráfica

b) Determine la probabilidad de que la batería dure al menos tres horas

c) Determine el valor esperado del tiempo de vida

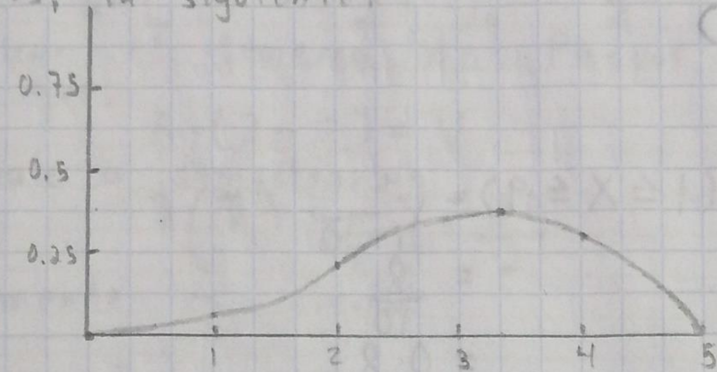
d) Determine y dibuje una gráfica de la función de distribución acumulada

a) Para toda x, $f(x)$ es no negativa y:

$$\int_0^5 \frac{12x^2(5-x)}{625}\,dx = \frac{12}{625}\int_0^5 (5x^2 - x^3)\,dx$$

$$= \frac{12}{625}\left[\frac{5x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\right]_0^5 = 1$$

La gráfica es, la siguiente:



b) La probabilidad se determina por:

$$P(X \geq 3) = \int_3^5 \frac{12x^2(5-x)}{625}\,dx$$

$$= \frac{12}{625}\left[\frac{5x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\right]_3^5$$

$$= \frac{328}{625} = 0.5248$$

c) El tiempo de vida esperado es:

$$E(X) = \int_0^5 x\left(\frac{12x^2(5-x)}{625}\right)dx$$

$$= \frac{12}{625}\left[\frac{5x^4}{4} - \frac{x^5}{5}\right]_0^5 = 3 \text{ horas}$$

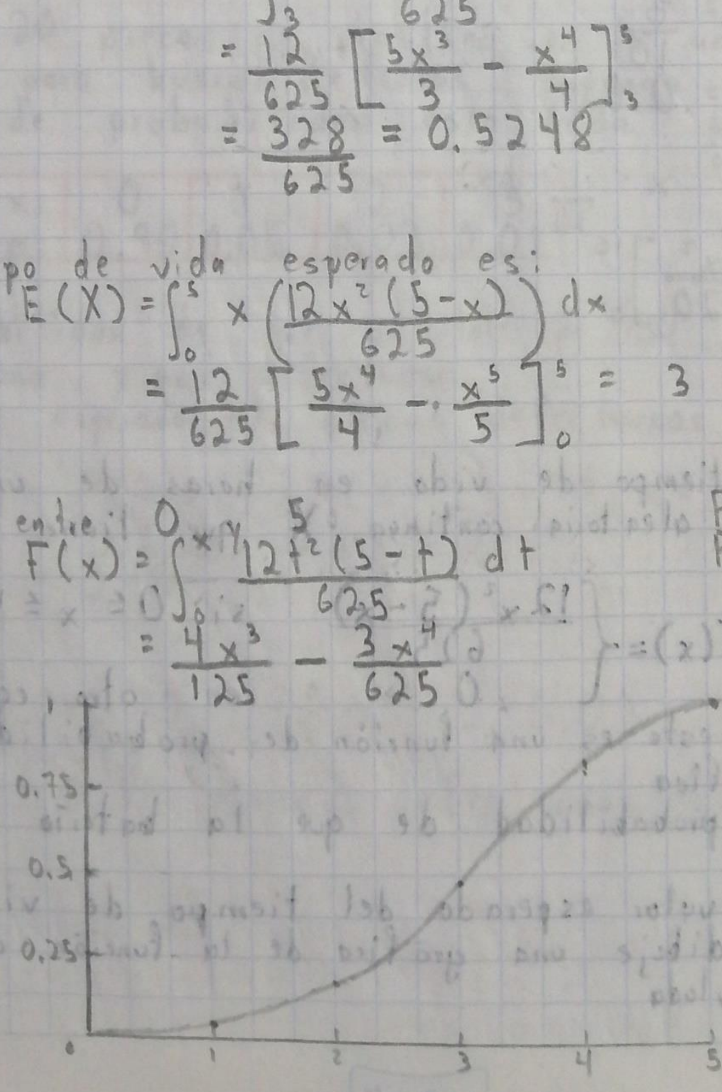
d) Para x entre 0 y 5

$$F(x) = \int_0^x \frac{12t^2(5-t)}{625}\,dt$$

$$= \frac{4x^3}{125} - \frac{3x^4}{625}$$

Para $x < 0$, $F(x) = 0$

Para $x > 5$, $F(x) = 1$



6: Funciones trascendentes

Contenido:
- La función logaritmo natural
- Funciones inversas y sus derivadas
- La función exponencial natural
- Funciones exponencial y logarítmica generales
- Crecimiento y decaimiento exponencial
- Ecuaciones diferenciales lineales de primer orden
- Aproximaciones para ecuaciones diferenciales
- Funciones trigonométricas inversas y sus derivadas
- Funciones hiperbólicas y sus inversas

6.1 La función logaritmo natural

Ejemplo 1:
Encuentre $D_x \ln(\sqrt{x})$

Sea $u = \sqrt{x} = x^{1/2}$

Como $D_x \ln(u) = \frac{1}{u} \cdot D_x u$ entonces;

$$D_x \ln(\sqrt{x}) = \frac{1}{x^{1/2}} \cdot \frac{1}{2} \cdot x^{-1/2} = \frac{1}{2x}$$

Ejemplo 3:
Demuestre que:

$$D_x \ln|x| = \frac{1}{x}, \qquad x \neq 0$$

Se deben considerar dos casos:

Caso 1:
Si $x > 0$, entonces $|x| = x$, así:

$$D_x \ln|x| = D_x \ln(x) = \frac{1}{x}$$

Caso 2:
Si $x < 0$, entonces $|x| = -x$, así:

$$D_x \ln|x| = D_x \ln(-x) = \left(\frac{1}{-x}\right)(-1) = \frac{1}{x} \quad \boxed{///}$$

Ejemplo 4:
Encuentre

$$\int \frac{5}{2x+7}\,dx$$

Sea $u = 2x+7 \therefore du = 2\,dx$. Así

$$\int \frac{5}{2x+7}\,dx = 5\int \frac{1}{2x+7}\,dx$$
$$= \frac{5}{2}\int \frac{2}{2x+7}\,dx$$
$$= \frac{5}{2}\int \frac{1}{u}\,du$$
$$= \frac{5}{2}\cdot \ln|u| + c$$
$$= \frac{5\cdot \ln|2x+7|}{2} + c$$

Ejemplo 8:
Derive

$$y = \frac{\sqrt{1-x^2}}{(x+1)^{2/3}}$$

Primero tomamos logaritmo natural

$$\ln(y) = \ln\left[\frac{(1-x^2)^{1/2}}{(x+1)^{2/3}}\right]$$
$$= \ln[(1-x^2)^{1/2}] - \ln[(x+1)^{2/3}]$$
$$= \frac{1}{2}\cdot\ln(1-x^2) - \frac{2}{3}\cdot\ln(x+1)$$

Ahora derivamos implícitamente

$$\frac{1}{y}\cdot\frac{dy}{dx} = \frac{-2x}{2(1-x^2)} - \frac{2}{3(x+1)}$$
$$= \frac{-(x+2)}{3(1-x^2)}$$
$$\frac{dy}{dx} = \frac{-y(x+2)}{3(1-x^2)}$$
$$= \frac{-\sqrt{1-x^2}\,(x+2)}{3(x+1)^{2/3}(1-x^2)}$$
$$= \frac{-(x+2)}{3(x+1)^{2/3}(1-x^2)^{1/2}}$$

Ejemplo 9:
Evalúe

$$\int \tan(x)\,dx$$

Como $\tan x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$

Con $u = \cos(x)$ y $du = -\operatorname{sen}(x)\,dx$

$$\int \tan(x)\,dx = \int \frac{\operatorname{sen}(x)}{\cos(x)}\,dx = \int \frac{-1}{\cos(x)}(-\operatorname{sen}(x))\,dx = -\ln|\cos(x)| + c$$

De forma análoga: $\int \cot(x)\,dx = \ln|\operatorname{sen}(x)| + c$

6.2 Funciones inversas y sus derivadas

Ejemplo 1:
Demuestre que $f(x) = x^5 + 2x + 1$ tiene una inversa

$f'(x) = 5x^4 + 2 > 0$ para toda x

Así f es creciente en toda la recta real, de modo que tiene una inversa ahí

Ejemplo 2:
Demuestre que $f(x) = 2x + 6$ tiene una inversa, encuentre una fórmula para $f^{-1}(y)$

Como f es una función creciente, tiene una inversa, la cual se obtiene de resolver para x:

$$y = 2x + 6$$

Así:

$$\frac{y-6}{2} = x$$

Ejemplo 4:
Sea $y = f(x) = x^5 + 2x + 1$. Encuentre $(f^{-1})'(4)$

Aunque no podemos encontrar una fórmula para f^{-1}, notamos que $y = 4$ corresponde a $x = 1$

Ahora, como el Teorema de la función inversa menciona:

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)}$$

y como $f'(x) = 5x^4 + 2$, sustituimos:

$$(f^{-1})'(4) = \frac{1}{f'(1)} = \frac{1}{5(1)^4 + 2} = \frac{1}{7}$$

6.3 La función exponencial natural

Ejemplo 1:
Encuentre $D_x e^{\sqrt{x}}$

Si $u = \sqrt{x}$, obtenemos:

$$D_x e^u = u' \cdot e^u$$
$$= \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot e^{\sqrt{x}} = \frac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}$$

Ejemplo 2:
Encuentre $D_x e^{x^2 \ln(x)}$

Si $u = x^2 \cdot \ln(x)$, entonces $u' = x^2 \cdot \frac{1}{x} + 2x \ln(x)$

Y como $D_x e^u = u' \cdot e^u$, entonces

$$D_x e^{x^2 \ln(x)} = [x + 2x \ln(x)] \cdot e^{x^2 \ln(x)}$$
$$= x e^{x^2 \ln(x)} [1 + 2 \ln(x)]$$
$$= x e^{x^2 \ln(x)} [1 + \ln(x^2)]$$

Ejemplo 4:
Evalúe $\int e^{-4x}\, dx$
Sea $u = -4x$ $\therefore$ $du = -4\, dx$, entonces:

$$\int e^{-4x} dx = -\frac{1}{4} \int e^{-4x} (-4) dx = -\frac{1}{4} \int e^u \, du$$
$$= -\frac{1}{4} e^u + c$$
$$= -\frac{e^{-4x}}{4} + c$$

Ejemplo 5:
Evalúe $\int x^2 e^{-x^3}$
Sea $u = -x^3$ $\therefore$ $du = -3x^2 dx$, entonces:

$$\int x^2 e^{-x^3} = -\frac{1}{3} \int e^{-x^3} (-3x^2) dx$$
$$= -\frac{1}{3} \int e^u du$$
$$= -\frac{e^u}{3} + c$$
$$= -\frac{e^{-x^3}}{3} + c$$

6.4 Funciones exponencial y logarítmica generales

Ejemplo 1:
Encuentre $D_x (3^{\sqrt{x}})$
Si $u = \sqrt{x}$, entonces $u' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ y así:

$$D_x (3^u) = 3^u \cdot \ln(3) \cdot u'$$
$$= 3^{\sqrt{x}} \cdot \ln(3) \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}$$
$$= \frac{3^{\sqrt{x}} \cdot \ln(3)}{2\sqrt{x}}$$

Ejemplo 3:
Encuentre $\int 2^{x^3} x^2 \, dx$
Sea $u = x^3$, por lo que $du = 3x^2 dx$, entonces:

$$\int 2^{x^3} x^2\,dx = \frac{1}{3}\int 2^{x^3}(3x^2\,dx)$$
$$= \frac{1}{3}\int 2^u\,du$$
$$= \frac{2^u}{3\ln(2)} + c$$
$$= \frac{2^{x^3}}{3\ln(2)} + c$$

Ejemplo 4:
Si $y = \log_{10}(x^4+13)$, encuentre $\frac{dy}{dx}$

Sea $u = x^4+13$. Se aplica regla de la cadena:
$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{(x^4+13)\ln(10)} \cdot 4x^3 = \frac{4x^3}{(x^4+13)\ln(10)}$$

Ejemplo 5:
Si $y = x^x$ $x>0$ encuentre $D_x y$ por medio de dos métodos diferentes

Método 1:
Sabemos que:
$$y = x^x \rightarrow y = e^{x\ln(x)}$$
Así:
$$D_x y = e^{x\ln(x)} \cdot D_x(x\ln(x))$$
$$= e^{x\ln(x)}\left(x\cdot\frac{1}{x} + \ln(x)\right)$$
$$= x^x[1+\ln(x)]$$

Método 2:
También podemos aplicar diferenciación logarítmica:
$$\ln(y) = \ln(x^x)$$
$$= x\ln(x)$$
Entonces:
$$\frac{1}{y}\cdot\frac{dy}{dx} = x\cdot\frac{1}{x} + \ln(x)$$
$$\frac{dy}{dx} = y[1+\ln(x)]$$
$$\frac{dy}{dx} = x^x[1+\ln(x)]$$

Ejemplo 8:
Evalúe
$$\int_{1/2}^{1} \frac{5^{1/x}}{x^2}\,dx$$

Sea $u = \frac{1}{x}$ $\therefore$ $du = \left(-\frac{1}{x^2}\right) dx$. Entonces:

$$\int \frac{5^{1/x}}{x^2}\,dx = -\int 5^{1/x}\left(-\frac{1}{x^2}\cdot dx\right)$$
$$= -\int 5^u\,du$$
$$= -\frac{5^u}{\ln(5)} + c$$
$$= -\frac{5^{1/x}}{\ln(5)} + c$$

Ahora, por el Segundo Teorema Fundamental del Cálculo:

$$\int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{5^{1/x}}{x^2}\,dx = \left[-\frac{5^{1/x}}{\ln(5)}\right]_{\frac{1}{2}}^{1}$$
$$= 12.43$$

6.5 Crecimiento y decaimiento exponenciales

Ejemplo 2:

El número de bacterias en un cultivo que crece con rapidez se estimó que era de 10,000 al mediodía y 40,000 después de 2 horas. Haga una predicción de cuántas bacterias habrá a las 5:00 p.m.

Parece razonable suponer que el incremento Δy de la población durante un breve periodo Δt es proporcional al tamaño de la población al inicio del periodo y a su tamaño. Así:

$$\Delta y = k y \Delta t$$

O también:

$$\frac{\Delta y}{\Delta t} = k y$$

En su forma de límite, esto da la ecuación diferencial:

$$\frac{dy}{dt} = k y$$

Separando variables e integrando, obtenemos:

$$\frac{dy}{y} = k\,dt$$
$$\int \frac{dy}{y} = \int k\,dt$$
$$\ln(y) = kt + c$$

Ahora, la ecuación está sujeta a la condición de que $y = y_0$ cuando $t = 0$. Esto causa que $c = \ln(y_0)$:

$$\ln(y) = kt + \ln(y_0)$$
$$\ln(y) - \ln(y_0) = kt$$

$$\ln\left(\frac{y}{y_0}\right) = kt$$

Al cambiar a la forma exponencial tenemos:

$$\frac{y}{y_0} = e^{kt}$$

$$y = y_0 e^{kt}$$

Ahora, tenemos que $y_0 = 10{,}000$ y $y(2) = y = 40{,}000$ en $t = 2$:

$$40{,}000 = 10{,}000\, e^{k(2)}$$

$$4 = e^{2k}$$

Al tomar logaritmos:

$$\ln(4) = 2k$$

$$\frac{1}{2} \cdot \ln(4) = k$$

$$\ln(\sqrt{4}) = k$$

$$\therefore\ k = \ln(2)$$

Así:

$$y = 10{,}000\, e^{(\ln 2)t}$$

Y en $t = 5$, obtenemos:

$$y = 10{,}000\, e^{[\ln(2)](5)}$$

$$= 320{,}000$$

Ejemplo 3:

El carbono 14, un isótopo del carbono, es radiactivo y decae a una tasa proporcional a la cantidad presente. Su vida media es de 5730 años, es decir, ello tarda para que decaiga a un medio de su cantidad original. Si originalmente estaban presentes 10 gramos, ¿cuánto quedará después de 2,000 años?

La vida media nos permite determinar k con la ecuación del ejemplo anterior, pues:

$$\frac{1}{2} = (1)\, e^{k(5730)}$$

$$-\ln(2) = 5730k$$

$$-\frac{\ln(2)}{5730} = k$$

$$\therefore\ k = -0.000121$$

Ahora:

$$y = 10\, e^{(-0.000121)t}$$

En $t = 2000$, tenemos:

$$y = 10\, e^{(-0.000121)(2000)}$$

$$= 7.85 \text{ gramos}$$

Ejemplo 4:

Un objeto se saca de un horno a $350° F$ y se deja enfriar en una habitación que está a $70° F$. Si la temperatura del objeto desciende a $250° F$ en una hora, ¿cuál será su temperatura tres horas después de que se sacó del horno?

La ley de enfriamiento de Newton dice que:

$$\frac{dT}{dt} = k(T - T_1)$$

Para el problema:

$$\frac{dT}{dt} = k(T - 70)$$

$$\frac{dT}{T-70} = k\,dt$$

$$\int \frac{dT}{T-70} = \int k\,dt$$

$$\ln|T-70| = kt + c$$

$$T - 70 = e^{kt+c}$$

$$T = 70 + C_1 e^{kt}$$

donde $C_1 = e^c$

Ahora $T(0) = 350$ de modo que:

$$350 = T(0) = 70 + C_1 e^{k(0)}$$

$$\therefore 280 = C_1$$

Así, la solución de la ecuación diferencial es:

$$T(t) = 70 + 280e^{kt}$$

Para determinar k, aplicamos la condición $T(1) = 250$

$$250 = T(1) = 70 + 280e^{k(1)}$$

$$180 = 280e^k$$

$$e^k = \frac{180}{280}$$

$$k = \ln\left(\frac{180}{280}\right)$$

$$\therefore k = -0.4418$$

Esto da:

$$T(t) = 70 + 280e^{(-0.4418)t}$$

Y al cabo de 3 horas:

$$T(3) = 70 + 280e^{(-0.4418)(3)}$$

$$= 144.4° F$$

6.6 Ecuaciones diferenciales lineales de primer orden

Ejemplo 1:
Resuelva

$$\frac{dy}{dx} + \frac{2}{x} \cdot y = \frac{\operatorname{sen}(3x)}{x^2}$$

Nuestro factor integrante es:

$$e^{\int P(x)\,dx} = \exp\left(\int \frac{2}{x}\,dx\right) = \exp(2\ln|x|) = \exp(\ln(x^2))$$
$$= x^2$$

Tomando la constante arbitraria de integración como 0, pues este no afectará al resultado.
Al multiplicar ambos lados de la ecuación por x^2, tendremos:

$$x^2 \cdot \frac{dy}{dx} + 2xy = (\operatorname{sen}(3x))$$

El lado izquierdo de esta ecuación es la derivada del producto $x^2 y$. Así

$$\frac{d}{dx}(x^2 y) = \operatorname{sen}(3x)$$

Al integrar:

$$x^2 y = -\frac{\cos(3x)}{3} + c$$

ó

$$y = \left(-\frac{\cos(3x)}{3} + c\right) x^{-2}$$

Ejemplo 2:
Encuentre la solución particular de

$$\frac{dy}{dx} - 3y = x e^{3x}$$

que satisface $y = 4$ cuando $x = 0$
El factor integrante apropiado es

$$\exp\left(\int -3\,dx\right) = e^{-3x}$$

Al multiplicar por este factor obtenemos:

$$e^{-3x} \cdot \frac{dy}{dx} - e^{-3x}(3y) = x e^{3x}(e^{-3x})$$

$$\frac{d}{dx}(e^{-3x} y) = x$$

$$e^{-3x} y = \frac{x^2}{2} + c$$

Así la solución general es:

$$y = \frac{x^2 e^{3x}}{2} \; c e^{3x}$$

La sustitución de $y=4$ cuando $x=0$ hace a $c=4$. La solución particular es entonces:

$$y = \frac{x^2 e^{3x}}{2} + 4e^{3x}$$

6.7 Aproximaciones para ecuaciones diferenciales

Ejemplo 1:

Suponga que el tamaño y, de una población satisface la ecuación diferencial $y' = 0.2y(16-y)$

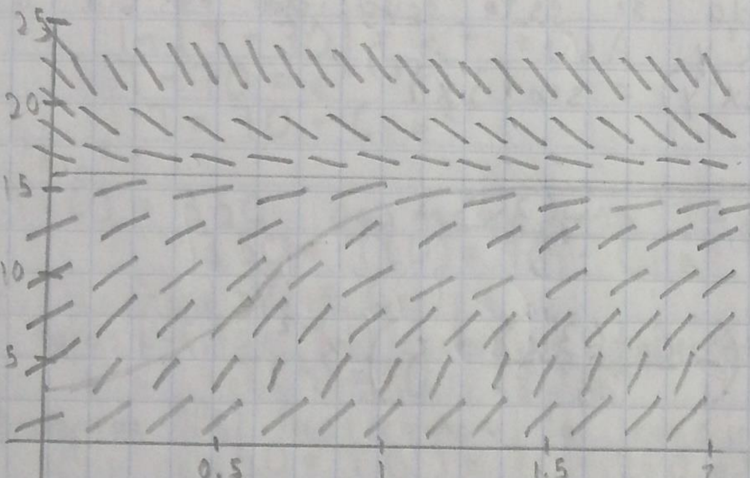
a) Bosqueje la solución que satisface la condición inicial $y(0)=3$

Describa el comportamiento de las soluciones cuando

b) $y(0)>16$

c) $0<y(0)<16$

Al dibujar el campo de pendientes obtenemos:



a) La solución que satisface la condición inicial $y(0)=3$ contiene al punto $(0,3)$. A partir de ese punto y hacia la derecha, la solución sigue las líneas de pendientes

b) Si $y(0)>16$ entonces la solución decrece hacia la asíntota horizontal $y=16$

c) Si $0<y(0)<16$ entonces la solución crece hacia la asíntota horizontal $y=16$

Ejemplo 2:
Utilice el método de Euler con $h = 0.2$ para aproximar la solución de:

$$y' = y, \quad y(0) = 1$$

en el intervalo $[0, 1]$
Comenzamos con $x_0 = 0$ y $y_0 = 1$
Ahora haremos:

$$x_n = x_{n-1} + h$$

y

$$y_n = y_{n-1} + hf(x_{n-1}, y_{n-1})$$

Que para y_n obtenemos:

$$y_1 = 1 + 0.2 \cdot 1 = 1.2$$
$$y_2 = 1.2 + 0.2 \cdot 1.2 = 1.44$$
$$y_3 = 1.44 + 0.2 \cdot 1.44 = 1.728$$
$$y_4 = 1.728 + 0.2 \cdot 1.728 = 2.0736$$
$$y_5 = 2.0736 + 0.2 \cdot 2.0736 = 2.48832$$

Es decir:

n	x_n	y_n
0	0.0	1
1	0.2	1.2
2	0.4	1.44
3	0.6	1.728
4	0.8	2.0736
5	1.0	2.48832

6.8 Funciones trigonométricas inversas y sus derivadas

Ejemplo 1:
Calcule

a) $\operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ b) $\cos^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)$

c) $\cos[\cos^{-1}(0.6)]$ d) $\operatorname{sen}^{-1}\left[\operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{2}\right)\right]$

a) $\frac{\pi}{4}$ b) $\frac{2\pi}{3}$

c) 0.6 d) $-\frac{\pi}{2}$

Ejemplo 2:
Use una calculadora para encontrar

a) $\cos^{-1}(-0.61)$ b) $\operatorname{sen}^{-1}(1.21)$ c) $\operatorname{sen}^{-1}[\operatorname{sen}(4.13)]$

a) 2.2268569 b) Indica un error ya que no existe c) −0.9884073

Ejemplo 3:

a) $\tan^{-1}(1)$

b) $\tan^{-1}(-\sqrt{3})$

c) $\tan^{-1}[\tan(5.236)]$

d) $\sec^{-1}(-1)$

e) $\sec^{-1}(2)$

f) $\sec^{-1}(-1.32)$

a) $\frac{\pi}{4}$

b) $-\frac{\pi}{3}$

c) -1.0471853

d) π

e) $\frac{\pi}{3}$

f) 2.4303875

Ejemplo 5:

Encuentre $D_x[\text{sen}^{-1}(3x-1)]$

Como $D_x[\text{sen}(u)] = \dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$

Y ya que $u = 3x-1 \therefore u' = 3$

$$D_x[\text{sen}(u)] = \frac{3}{\sqrt{1-(3x-1)^2}}$$

Ejemplo 6:

Evalúe

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}\,dx$$

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}\,dx = \left[\text{sen}^{-1}\left(\frac{x}{2}\right)\right]_0^1$$
$$= \frac{\pi}{6}$$

6.9 Funciones hiperbólicas y sus inversas

Ejemplo 2:

Encuentre $D_x[\cosh^2(3x-1)]$

$$D_x[\cosh^2(3x-1)] = 2\cosh(3x-1)\cdot D_x[\cosh(3x-1)]$$
$$= 2\cosh(3x-1)\,\text{senh}(3x-1)\cdot D_x(3x-1)$$
$$= 6\cosh(3x-1)\,\text{senh}(3x-1)$$

Ejemplo 3:

Encuentre $\int \tanh(x)\,dx$

Sea $u = \cosh(x)$ por lo que $du = \text{senh}(x)\,dx$

$$\int \tanh(x)\,dx = \int \frac{\text{senh}(x)}{\cosh(x)}\,dx = \int \frac{1}{u}\,du$$
$$= \ln|u| + c$$
$$= \ln|\cosh(x)| + c$$
$$= \ln[\cosh(x)] + c$$

Ejemplo 4:

Demuestre que $D_x[\operatorname{senh}^{-1}(x)] = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$ por dos métodos diferentes

Método 1:

Sea $y = \operatorname{senh}^{-1}(x)$ de modo que $x = \operatorname{senh}(y)$

Derivamos esta última expresión respecto a x

$$1 = [\cosh(y)]\, D_x y$$

Así:

$$D_x y = D_x[\operatorname{senh}^{-1}(x)] = \frac{1}{\cosh(y)} = \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{senh}^2(y)}} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

Método 2:

Usamos la expresión logarítmica para $\operatorname{senh}^{-1}(x)$

$$D_x[\operatorname{senh}^{-1}(x)] = D_x[\ln(x+\sqrt{x^2+1})]$$
$$= \frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}} \cdot D_x(x+\sqrt{x^2+1})$$
$$= \frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}\left(1+\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)$$
$$= \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$$

Ejemplo 5:

Encuentre la longitud de la catenaria $y = a\cosh\left(\frac{x}{a}\right)$ entre $x=-a$ y $x=a$

Como sabemos, la longitud de "la cuerda" de una función es:

$$L = \int_a^b \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx$$
$$= \int_{-a}^{a} \sqrt{1+\operatorname{sen}^2\left(\frac{x}{a}\right)}\, dx$$
$$= \int_{-a}^{a} \sqrt{\cosh^2\left(\frac{x}{a}\right)}\, dx$$
$$= 2\int_0^a \cosh\left(\frac{x}{a}\right) dx$$
$$= 2a\int_0^a \cosh\left(\frac{x}{a}\right)\left(\frac{1}{a}\cdot dx\right)$$
$$= \left[2a\cdot \operatorname{senh}\left(\frac{x}{a}\right)\right]_0^a$$
$$= 2a\cdot\operatorname{senh}(1)$$
$$= 2.35\, a$$

7: Técnicas de integración

Contenido:
- Reglas básicas de integración
- Integración por partes
- Algunas integrales trigonométricas
- Sustituciones para racionalizar
- Integración de funciones racionales por medio de fracciones parciales
- Estrategias de integración

7.1 Reglas básicas de integración

Ejemplo 1:
Encuentre

$$\int \frac{x}{\cos^2(x^2)}\,dx$$

Como $\frac{1}{\cos^2(x^2)} = \sec^2(x^2)$ entonces:

$$\frac{1}{2}\int \sec^2(x^2)\,(2x\,dx)$$

$$\frac{1}{2}\int \sec^2(u)\,du$$

$$\frac{1}{2}\cdot \tan(u) + c$$

$$\frac{\tan(x^2)}{2} + c$$

Ejemplo 2:
Encuentre

$$\int \frac{3}{\sqrt{5-9x^2}}\,dx$$

Consideremos

$$\int \frac{du}{\sqrt{9-u^2}}$$

donde $u = 3x \therefore du = 3\,dx$
Así:

$$\int \frac{3}{\sqrt{5-9x^2}}\,dx = \int \frac{du}{\sqrt{5-u^2}}$$

$$= \operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{u}{\sqrt{5}}\right) + c$$

$$= \operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{3x}{\sqrt{5}}\right) + c$$

Inversas
Logaritmicas
Algebraicas
Trigonometricas
Exponenciales

dv

7.2 Integración por partes:

Ejemplo 1:
Encuentre $\int x \cos(x)\, dx$

Para integrar por partes, se propone

$u = x \qquad du = dx$

$dv = \cos(x)\,dx \qquad v = \text{sen}(x)$

$\int u\,dv = uv - \int v\,du$

$\int x\cos(x)\,dx = x\,\text{sen}(x) - \int \text{sen}(x)\,dx$

$= x\,\text{sen}(x) + \cos(x) + c$

Ejemplo 2:
Encuentre

$$\int_1^2 \ln(x)\,dx$$

Para integrar por partes se ~~propone~~

$u = \ln(x) \qquad du = \dfrac{dx}{x}$

$dv = dx \qquad v = x$

$\int u\,dv = uv - \int v\,du$

$\int_1^2 \ln(x)\,dx = [x \cdot \ln x]_1^2 - \int_1^2 x \cdot \dfrac{1}{x} \cdot dx$

$= [x \cdot \ln(x)]_1^2 - \int_1^2 dx$

$= 2\ln(2) - 1$

$= 0.386$

Ejemplo 6:
Encuentre $\int e^x\,\text{sen}(x)\,dx$

Para integrar por partes se propone

$u = e^x \qquad du = e^x\,dx$

$dv = \text{sen}(x)\,dx \qquad v = -\cos(x)$

$\int u\,dv = uv - \int v\,du$

$\int e^x\,\text{sen}(x)\,dx = -e^x\cos(x) - \int -e^x\cos(x)\,dx$

$= -e^x\cos(x) + \int e^x\cos(x)\,dx$

Para integrar por partes se propone

$u = e^x \qquad du = e^x\,dx$

$dv = \cos(x)\,dx \qquad v = \text{sen}(x)$

$\int u\,dv = uv - \int v\,du$

Tomando únicamente la última integral:

$\int e^x\cos(x)\,dx = e^x\,\text{sen}(x) - \int e^x\,\text{sen}(x)\,dx$

Sustituyendo en el primer resultado:

$$\int e^x \operatorname{sen}(x)\,dx = -e^x\cos(x) + e^x \operatorname{sen}(x) - \int e^x \operatorname{sen}(x)\,dx$$

Al despejar:

$$2\int e^x \operatorname{sen}(x)\,dx = -e^x\cos(x) + e^x\operatorname{sen}(x) + c.$$

Finalmente:

$$\int e^x \operatorname{sen}(x)\,dx = \frac{-e^x\cos(x) + e^x\operatorname{sen}(x)}{2} + c$$

Ejemplo 7:

Deduzca una fórmula de reducción para $\int \operatorname{sen}^n(x)\,dx$

Observemos que:

$$\int \operatorname{sen}^n(x)\,dx = \int \operatorname{sen}^{n-1}(x)\operatorname{sen}(x)\,dx$$

Para integrar por partes se propone

$u = \operatorname{sen}^{n-1}(x)$ $\quad du = (n-1)\operatorname{sen}^{n-2}(x)\cos(x)\,dx$

$dv = \operatorname{sen}(x)\,dx$ $\quad v = -\cos(x)$

$\int u\,dv = uv - \int v\,du$

$$\int \operatorname{sen}^n(x)\,dx = -\operatorname{sen}^{n-1}(x)\cos(x) + (n-1)\int \operatorname{sen}^{n-2}(x)\cos^2(x)\,dx$$

Como $\cos^2(x) = 1 - \operatorname{sen}^2(x)$

$$\begin{aligned}\int \operatorname{sen}^n(x)\,dx &= -\operatorname{sen}^{n-1}(x)\cos(x) + (n-1)\int \operatorname{sen}^{n-2}(x)[1-\operatorname{sen}^2(x)]\,dx\\ &= -\operatorname{sen}^{n-1}(x)\cos(x) + (n-1)\int \operatorname{sen}^{n-2}(x) - \operatorname{sen}^n(x)\,dx\\ &= -\operatorname{sen}^{n-1}(x)\cos(x) + (n-1)\int \operatorname{sen}^{n-2}(x)\,dx - (n-1)\int \operatorname{sen}^n(x)\,dx\end{aligned}$$

Al despejar:

$$\begin{aligned}n\int \operatorname{sen}^n(x)\,dx &= -\operatorname{sen}^{n-1}(x)\cos(x) + n-1\int \operatorname{sen}^{n-2}(x)\,dx\\ &= -\frac{\operatorname{sen}^{n-1}(x)\cos(x)}{n} + \frac{n-1}{n}\int \operatorname{sen}^{n-2}(x)\,dx\end{aligned}$$

Que es la fórmula de reducción buscada válida para $n \geq 2$

7.3 Algunas integrales trigonométricas

Ejemplo 1: n impar

Encuentre $\int \operatorname{sen}^5(x)\,dx$

$$\begin{aligned}\int \operatorname{sen}^5(x)\,dx &= \int \operatorname{sen}^4(x)\operatorname{sen}(x)\,dx\\ &= \int [1-\cos^2(x)]^2 \operatorname{sen}(x)\,dx\\ &= \int [1 - 2\cos^2(x) + \cos^4(x)]\operatorname{sen}(x)\,dx\\ &= -\int [1-2\cos^2(x)+\cos^4(x)](-\operatorname{sen}(x)\,dx)\\ &= -\cos(x) + \frac{2\cos^3(x)}{3} - \frac{\cos^5(x)}{5} + c\end{aligned}$$

Ejemplo 2: n par

Encuentre $\int \operatorname{sen}^2(x)\,dx$ y $\int \cos^4(x)\,dx$

Por identidades del ángulo medio:

$$\int \operatorname{sen}^2(x)\,dx = \int \frac{1-\cos(2x)}{2}\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\int dx - \frac{1}{4}\int [\cos(2x)](2\,dx)$$
$$= \frac{x}{2} - \frac{\operatorname{sen}(2x)}{4} + c$$

$$\int \cos^4(x)\,dx = \int\left(\frac{1+\cos(2x)}{2}\right)^2 dx$$
$$= \frac{1}{4}\int [1 + 2\cos(2x) + \cos^2(2x)]\,dx$$
$$= \frac{1}{4}\int dx + \frac{1}{4}\int \cos(2x)(2)\,dx + \frac{1}{8}\int [1+\cos(4x)]\,dx$$
$$= \frac{3}{8}\int dx + \frac{1}{4}\int \cos(2x)(2)\,dx + \frac{1}{32}\int \cos(4x)(4)\,dx$$
$$= \frac{3x}{8} + \frac{\operatorname{sen}(2x)}{4} + \frac{\operatorname{sen}(4x)}{32} + c$$

Ejemplo 3: m o n impares

Encuentre $\int \operatorname{sen}^3(x)\cos^{-4}(x)\,dx$

$$\int \operatorname{sen}^3(x)\cos^{-4}(x)\,dx = \int [1-\cos^2(x)][\cos^{-4}(x)][\operatorname{sen}(x)]\,dx$$
$$= -\int [\cos^{-4}(x) - \cos^{-2}(x)][-\operatorname{sen}(x)]\,dx$$
$$= -\left[\frac{\cos^{-3}(x)}{-3} - \frac{\cos^{-1}(x)}{-1}\right] + c$$
$$= \frac{\sec^3(x)}{3} - \sec(x) + c$$

Ejemplo 4: m y n pares

Encuentre $\int \operatorname{sen}^2(x)\cos^4(x)\,dx$

$$\int \operatorname{sen}^2(x)\cos^4(x)\,dx = \int\left[\frac{1-\cos(2x)}{2}\right]\left[\frac{1+\cos(2x)}{2}\right]^2 dx$$
$$= \frac{1}{8}\int [1+\cos(2x) - \cos^2(2x) - \cos^3(2x)]\,dx$$
$$= \frac{1}{8}\int\left[1+\cos(2x) - \frac{[1-\cos(4x)]}{2} - [1-\operatorname{sen}^2(2x)]\cos(2x)\right]dx$$
$$= \frac{1}{8}\int\left[\frac{1}{2} - \frac{\cos(4x)}{2} + \operatorname{sen}^2(2x)\cos(2x)\right]dx$$
$$= \frac{1}{8}\left[\int \frac{1}{2}\,dx - \frac{1}{8}\int \cos(4x)(4\,dx) + \frac{1}{2}\int \operatorname{sen}^2(2x)[2\cos(2x)\,dx]\right]$$
$$= \frac{x}{16} - \frac{\operatorname{sen}(4x)}{64} + \frac{\operatorname{sen}^3(2x)}{48} + c$$

Ejemplo 5:
Encuentre $\int \operatorname{sen}(2x)\cos(3x)\,dx$

$$\int \operatorname{sen}(2x)\cos(3x)\,dx = \frac{1}{2}\int[\operatorname{sen}(5x)+\operatorname{sen}(-x)]\,dx$$
$$= \frac{1}{10}\int \operatorname{sen}(5x)\,(5dx) - \frac{1}{2}\int \operatorname{sen}(x)\,dx$$
$$= -\frac{\cos(5x)}{10} + \frac{\cos(x)}{2} + c$$

Ejemplo 8:
Determine $\int \cot^4(x)\,dx$

$$\int \cot^4(x)\,dx = \int \cot^2(x)[\csc^2(x)-1]\,dx$$
$$= \int \cot^2(x)\csc^2(x)\,dx - \int \cot^2(x)\,dx$$
$$= -\int \cot^2(x)[-\csc^2(x)\,dx] - \int \csc^2(x)-1\,dx$$
$$= -\frac{\cot^3(x)}{3} + \cot(x) + x + c$$

Ejemplo 10: n par, m cualquier número
Determine $\int \tan^{-3/2}(x)\sec^4(x)\,dx$

$$\int \tan^{-3/2}(x)\sec^4(x)\,dx = \int \tan^{-3/2}(x)[1+\tan^2(x)]\sec^2(x)\,dx$$
$$= \int \tan^{-3/2}(x)\sec^2(x)\,dx + \int \tan^{1/2}(x)\sec^2(x)\,dx$$
$$= -2\tan^{-1/2}(x) + \frac{2\tan^{3/2}(x)}{3} + c$$

Ejemplo 11: m impar, n cualquier número
Determine $\int \tan^3(x)\sec^{-1/2}(x)\,dx$

$$\int \tan^3(x)\sec^{-1/2}(x)\,dx = \int \tan^2(x)\sec^{-3/2}(x)[\sec(x)\tan(x)]\,dx$$
$$= \int [\sec^2(x)-1]\sec^{-3/2}(x)[\sec(x)\tan(x)]\,dx$$
$$= \int \sec^{1/2}(x)[\sec(x)\tan(x)\,dx] - \int \sec^{-3/2}(x)[\sec(x)\tan(x)]\,dx$$
$$= \frac{2\sec^{3/2}(x)}{3} + 2\sec^{-1/2}(x) + c$$

7.4 Sustituciones para racionalizar

Ejemplo 1:
Encuentre

$$\int \frac{dx}{x-\sqrt{x}}$$

Sea $u=\sqrt{x}$, así $u^2 = x$ y $2u\,du = dx$. Entonces

$$\int \frac{dx}{x-\sqrt{x}} = \int \frac{2u}{u^2-u}\,du$$
$$= 2\int \frac{du}{u-1}$$

$= 2\ln|u-1| + c$

$= 2\ln|\sqrt{x} - 1| + c$

Ejemplo 2:

Encuentre $\int x \sqrt[3]{x-4}\, dx$

Sea $u = \sqrt[3]{x-4}$

Así $u^3 = x - 4$ y $3u^2 du = dx$

Entonces:

$$\int x \sqrt[3]{x-4}\, dx = \int (u^3+4)\, u\, (3u^2 du)$$
$$= 3\int (u^6 + 4u^3)\, du$$
$$= 3\left[\frac{u^7}{7} + u^4\right]$$
$$= \frac{3(x-4)^{7/3}}{7} + 3(x-4)^{4/3} + c$$

Ejemplo 3:

Encuentre $\int x \sqrt[5]{(x+1)^2}\, dx$

Sea $u = (x+1)^{1/5}$

Así $u^5 = x+1$ y $5u^4 du = dx$

Entonces:

$$\int x \sqrt[5]{(x+1)^2}\, dx = \int (u^5-1)\, u^2 \cdot 5u^4 du$$
$$= 5\int (u^5-1)(u^2)(u^4 du)$$
$$= 5\int (u^5-1)(u^6 du)$$
$$= 5\int u^{11} - u^6\, du$$
$$= 5\int u^{11} du - 5\int u^6 du$$
$$= \left[\frac{5u^{12}}{12} + c_1\right] + \left[-\frac{5u^7}{7} + c_2\right]$$
$$= \frac{5u^{12}}{12} - \frac{5u^7}{7} + c_1 + c_2$$
$$= \frac{5u^{12}}{12} - \frac{5u^7}{7} + c$$
$$= \frac{5(x+1)^{12/5}}{12} - \frac{5(x+1)^{7/5}}{7} + c$$
$$= \frac{5\sqrt[5]{(x+1)^{12}}}{12} - \frac{5\sqrt[5]{(x+1)^7}}{7} + c$$

Ejemplo 4:

Encuentre $\int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx$

Se propone la siguiente sustitución:

$\int \sqrt{a^2 - u^2}\, du$

$a^2 = a^2 \quad \therefore \quad a = a$

$u^2 = x^2 \quad \therefore \quad u = x$

Como existe el elemento $a^2 - u^2$, la sustitución apropiada es:

$u = a\, sen(\theta)$

$u = a\, sen(\theta) \quad \therefore \quad du = a \cos(\theta)\, d\theta$

Así

$\int \sqrt{a^2 - [a\, sen(\theta)]^2}\, [a \cos(\theta)\, d\theta]$

$\int \sqrt{a^2 - a^2 sen^2(\theta)}\, [a \cos(\theta)\, d\theta]$

$\int \sqrt{a^2 [1 - sen^2(\theta)]}\, [a \cos(\theta)\, d\theta]$

$\int a\sqrt{1 - sen^2(\theta)}\, [a \cos(\theta)\, d\theta]$.

$a^2 \int \sqrt{\cos^2(\theta)}\, \cos(\theta)\, d\theta$

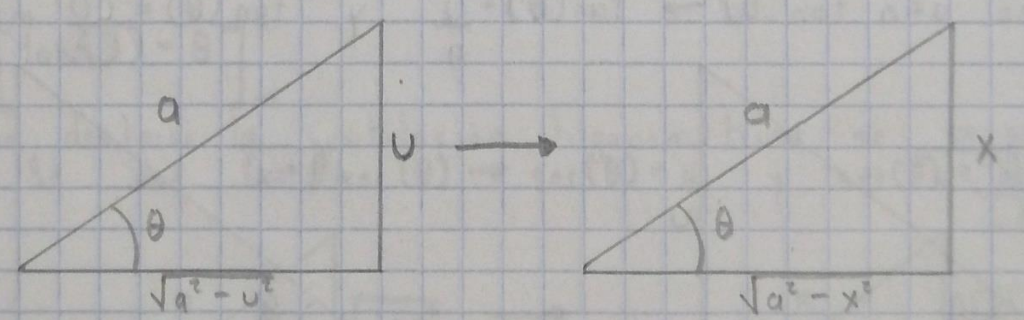
$a^2 \int \cos^2(\theta)\, d\theta$

$\frac{a^2}{2} \int [1 + \cos(2\theta)]\, d\theta$

$\frac{a^2}{2} \left[\theta + \frac{sen(2\theta)}{2} \right] + c$

Ahora, para deshacer la sustitución trigonométrica, se propone el siguiente triángulo:

Se usó $u = a\, sen(\theta) \rightarrow sen(\theta) = \frac{u}{a}$ y $sen(\theta) = \frac{CO}{H}$



Como $sen(2\theta) = 2\, sen(\theta) \cos(\theta)$, entonces:

Como $sen(\theta) = \frac{CO}{H} \therefore sen(\theta) = \frac{x}{a}$ y $\cos(\theta) = \frac{CA}{H} \therefore \cos(\theta) = \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{a}$

$\frac{a^2}{2} \left[sen^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + \left(\frac{x}{a}\right)\left(\frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{a}\right) \right] + c$

$\frac{a^2}{2} \left[sen^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + \frac{x\sqrt{a^2 - x^2}}{a^2} \right] + c$

$\frac{a^2 sen^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + x\sqrt{a^2 - x^2}}{2} + c$

Ejemplo 5:

Encuentre

$$\int \frac{dx}{\sqrt{9+x^2}}$$

Se propone la siguiente sustitución:

$$\int \frac{du}{\sqrt{a^2+u^2}}$$

$a^2 = 9 \quad \therefore \quad a = 3$

$u^2 = x^2 \quad \therefore \quad u = x$

Como existe el elemento a^2+u^2, la sustitución apropiada es:

$u = a\tan(\theta)$

$u = 3\tan(\theta) \quad \therefore \quad du = 3\sec^2(\theta)\,d\theta$

Así:

$$\int \frac{3\sec^2(\theta)\,d\theta}{\sqrt{9+9\tan^2(\theta)}}$$

$$\int \frac{3\sec^2(\theta)\,d\theta}{\sqrt{9[1+\tan^2(\theta)]}}$$

$$\int \frac{\sec^2(\theta)\,d\theta}{\sqrt{\sec^2(\theta)}}$$

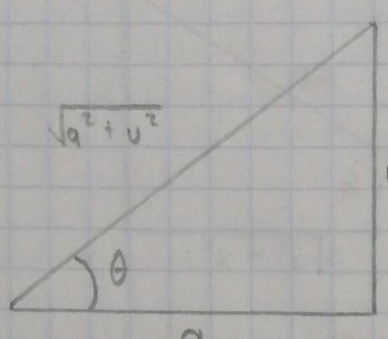
$$\int \frac{\sec^2(\theta)}{\sec(\theta)}\,d\theta$$

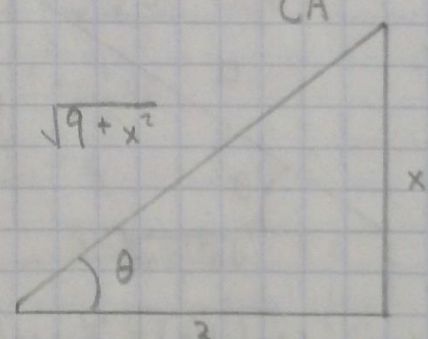
$$\int \sec(\theta)\,d\theta$$

$$\ln|\sec(\theta)+\tan(\theta)|+c$$

Ahora para deshacer la sustitución trigonométrica se propone:

Se usó $u = a\tan(\theta) \rightarrow \tan(\theta) = \frac{u}{a}$ y $\tan(\theta) = \frac{CO}{CA}$





Como $\sec(\theta) = \frac{H}{CA} \therefore \sec(\theta) = \frac{\sqrt{9+x^2}}{3}$ y $\tan(\theta) = \frac{CO}{CA} \therefore \tan(\theta) = \frac{x}{3}$

$$\ln\left|\frac{\sqrt{9+x^2}}{3}+\frac{x}{3}\right|+c$$

$$\ln\left|\frac{x+\sqrt{9+x^2}}{3}\right|+c$$

Ejemplo 6:

Calcule

$$\int_2^4 \frac{\sqrt{x^2-4}}{x}\,dx$$

Se propone la siguiente sustitución:

$$\int_m^n \frac{\sqrt{u^2-a^2}}{u}\,du$$

$$a^2 = 4 \quad \therefore \quad a = 2$$

$$u^2 = x^2 \quad \therefore \quad u = x$$

Como existe el elemento $u^2 - a^2$, la sustitución apropiada es:

$$u = a\sec(\theta)$$

$$u = 2\sec(\theta) \quad \therefore \quad du = 2\sec(\theta)\tan(\theta)\,d\theta$$

Así

$$\int_m^n \frac{\sqrt{4\sec^2(\theta)-4}}{2\sec(\theta)} \cdot 2\sec(\theta)\tan(\theta)\,d\theta$$

$$\int_m^n \frac{\sqrt{4\left[\sec^2(\theta)-1\right]}}{2\sec(\theta)}\left[2\sec(\theta)\tan(\theta)\,d\theta\right]$$

$$\int_m^n \frac{\sqrt{\tan^2(\theta)}}{\sec(\theta)}\left[2\sec(\theta)\tan(\theta)\,d\theta\right]$$

$$\int_m^n \tan(\theta)\left[2\tan(\theta)\,d\theta\right]$$

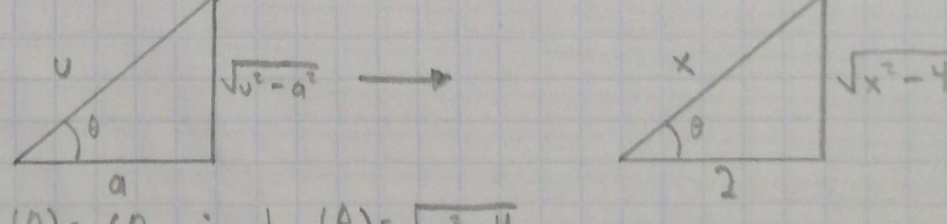
$$2\int_m^n \tan^2(\theta)\,d\theta$$

$$2\int_m^m \sec^2(\theta) - 1\,d\theta$$

$$2\Big[\tan(\theta) - \theta\Big]_m^n$$

Para deshacer la sustitución trigonométrica, se propone:

Se usó $u = a\sec(\theta) \rightarrow \sec(\theta) = \frac{u}{a}$ y $\sec(\theta) = \frac{H}{CA}$



Como $\tan(\theta) = \frac{CO}{CA} \therefore \tan(\theta) = \frac{\sqrt{x^2-4}}{2}$

$$2\left[\frac{\sqrt{x^2-4}}{2} - \tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{x^2-4}}{2}\right)\right]_2^4$$

$$1.3697 - 0$$

$$1.3697$$