27-01-20

10:00 - 11:00 11:00 - 12:00

Docente: Luis Fernando Gutiérrez Marfileño / Aurora Torres Soto
Materia: Programación Científica

Programar métodos numéricos y simbólicos de matemáticas
Implica realizar muchas operaciones (aritméticas)
C → MATLAB → Python

Unidad 1: Introducción a la programación científica
Exactitud y precisión
Hay que conseguir ambas en soluciones aproximadas, pues en aspectos prácticos, las soluciones aproximadas son más comunes que las exactas
Se trata de implementar simulaciones para la solución de problemas con antes teoría y experimentación.
Para hacer estas simulaciones, se requieren altos conocimientos de modelos matemáticos y lenguajes de computación.
El concepto significa el análisis del modelo matemático, el desarrollo y análisis del método numérico y su programación

Solución analítica: expresión matemática que proporciona toda la información del comportamiento de un sistema, para cualquier valor de sus variables y parámetros
Solución numérica: expresa el comportamiento del sistema en función de números

Métodos numéricos: son técnicas mediante las cuales es posible formular problemas matemáticos con operaciones aritméticas

En la práctica, la solución numérica se aproxima a la real y se puede obtener el error de la predicción

30-01-20

Un ejemplo clásico de solución numérica fue por Arquímedes para calcular el valor aproximado de π a partir de la división de una circunferencia en polígonos incrementando el número de lados
La técnica empleada por Arquímedes reúne las características de los métodos numéricos actuales:
- La solución numérica se obtiene dividiendo el dominio que se estudia (la circunferencia) mediante elementos (geométricos) sencillos (rectas) de los que se conocen todas sus propiedades
- La solución numérica es aproximada y mejora (converge) al incrementar el número de divisiones del dominio

Ventajas
- Son más rápidos
- Tiene gran fiabilidad
- Aproximan ecuaciones no resolubles por otros métodos

Defectos
- No son 100%
- Consumen mucha cantidad de proceso
- Se debe procesar cada caso particular
- No todos los problemas se pueden resolver por métodos numéricos

31-01-2020

Problemas de dimensión infinita: Problemas cuya solución intervienen elementos con cantidad infinita de números como derivación e integración
Problemas de dimensión finita: Su respuesta es un conjunto finito de números (ecuaciones algebraicas, determinantes)

1- Problemas de tal complejidad que no poseen solución analítica

No conocer cómo se comporta una función = Teoría del caos
2- Problemas donde existe solución analítica pero por complejidad, no puede explotarse sencillamente en la práctica

3- Problemas que existen métodos sencillos pero que requieren cálculos excesivos, más de la necesaria para un método numérico

04-02-20

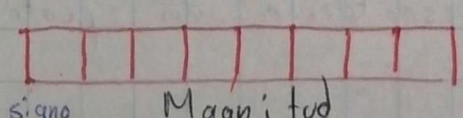
Un número es difícil de definir y ha variado a lo largo del tiempo
Aceptan las siguientes clasificaciones

- Complejos
  - Reales $\mathbb{R}$
    - Racionales $\mathbb{Q}$
      - Enteros $\mathbb{Z}$
        - Naturales $\mathbb{N}$
      - Fraccionarios
        - Exactos
        - Periódicos
    - Irracionales $\mathbb{I}$
  - Imaginarios

Todos los conjuntos tienen una capacidad infinita
Para números muy grandes (o pequeños) tenemos la notación científica

Enteros $\mathbb{Z}$
Conjunto de los números naturales, sus opuestos y el cero

Para evitar el problema del signo se usa el binario con el formato de notación signo magnitud. Donde se toma el bit más significativo



Por complemento a 1 se invierten los negativos, es decir

$$0101 = 5$$
$$1010 = -5$$

Complemento a 2 es como C1 pero se le suma 1 al bit menos significativo

- Ejemplo 1a: Representar 2356_{10} en binario con formato SM mediante 16 bits

$$2356_{10} = 0000100100110100$$

- Ejemplo 1b: Representar -2356_{10} en C1

$$-2356_{10} = 0000100100110100$$
$$= 1111011011001011$$

- Ejemplo 1c: Representar -356_{10} en C2

$$-2356_{10} = 1111011011001011$$
$$1111011011001100$$

Números reales $\mathbb{R}$

Son todos los números en la recta real
Es el conjunto de los racionales y los irracionales
En computación se usa:
- Punto fijo
- Punto flotante

05-02-20

Para punto flotante, trata de mover o flotar el punto libremente entre los n bits y representar un rango mayor y así trabajar tanto números muy grandes como muy pequeños

Determinar 5777_{10} su representación en punto flotante
1011010010001_2

Normalizando $1.011010010001 \times 10^{12}$
Signo = 0
Exponente $12 + 127 = 139_{10} = 10001011_2$
F = 011010010001 N_{IEEE} = 0 10001011 011010010001
+ 12 ceros

Para la cantidad en punto flotante, obtener su equivalente decimal

$N_{IEEE} = 1\ 10000001\ 01001001110001\ 000000000$

$S = 1$

$E = 10000001_2 = 129_{10} - 127 = 2_{10}$

$F = 01001001110001$

En decimal

$(-1)(1.01001001110001) \times 2^2$

$= -101.001001110001 = -5.152587890625_{10}$

Punto flotante de precisión doble

Se extiende el tamaño a 1 para el signo, 11 para el entero y 52 para el fraccionario y se pueden representar desde 10^{-308} hasta 10^{308}

En el normal son 1 al signo, 8 al entero y 23 al decimal

Un	0000 ... 000	es	+0
Un	1000 ... 000	es	-0
Un	0111 ... 111	es	$+\infty$
Un	1111 ... 111	es	$-\infty$

NaNs = Not a Number

SNaN = Signaling Not a Number

QNaN = Quiet Not a Number

NaNs: Utilizados cuando el dato no tiene formato válido por la norma

06-02-20

Pueden ocurrir desbordamientos que lleven a 0 o ∞

Analisis de errores

Los métodos numéricos son aproximaciones a la solución exacta. Esa discrepancia se le llama error

Cifras Significativas

Se definen como el número de dígitos más uno estimado que se puedo usar con confianza

Exactitud

Aproximación de un número al valor verdadero

Precisión

Extensión en las lecturas repetidas de un instrumento que mide alguna propiedad física

Error absoluto

Error absoluto = valor exacto - valor aproximado

Error relativo

$$\text{Error relativo} = \frac{\text{Error absoluto}}{\text{valor exacto}}$$

Cuando el valor exacto = 0 no está definido y como es adimensional, entonces es un porcentaje

Convergencia

Es la velocidad en la que una aproximación se acerca al valor exacto

Estabilidad

Nivel de garantía de la convergencia

Si un método converge más rápido se dice que son más estables (mientras no diverjan)

10-02-20

Serie de Taylor

Se usa debido a que las funciones reales más sencillas a evaluar son los polinomios

Polinomio:

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots a_1 x^1 + a_0 x^0$$

Calculamos las aproximaciones locales

Si considero el rango completo sería una aproximación global

Una serie de Taylor es una representación de una función como una suma infinita de términos calculados mediante los valores de las derivadas de esa función en ese punto

La serie de Taylor de $f(x)$ de valor real o complejo que es infinitamente diferenciable en la vecindad de un número real o complejo a:

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)(x-a)}{2!} + \dots$$

ó

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} \cdot (x-a)^n$$

Si la serie de Taylor está centrada en 0 se le llama Serie de Maclaurin

1- Calcular la serie de Taylor para $f(x) = \mathrm{sen}(x)$ en $x_0 = 0$ para el séptimo grado

$$f(x) = \mathrm{sen}(x) \rightarrow f(0) = \mathrm{sen}(0) = 0$$
$$f'(x) = \cos(x) \rightarrow f'(0) = \cos(0) = 1$$
$$f''(x) = -\mathrm{sen}(x) \rightarrow f''(0) = -\mathrm{sen}(0) = 0$$
$$f'''(x) = -\cos(x) \rightarrow f'''(0) = -\cos(0) = -1$$
$$f^{(4)}(x) = f(x) = \mathrm{sen}(x) \rightarrow f^{(4)}(x) = \mathrm{sen}(0) = 0$$
$$f^{(5)}(x) = f'(x) = \cos(x) \rightarrow f^{(5)}(x) = \cos(0) = 1$$
$$f^{(6)}(x) = -\mathrm{sen}(X) \rightarrow f^{(6)}(x) = -\mathrm{sen}(0) = 0$$

$$\mathrm{sen}(X) \approx 0 + \frac{1}{1!}x + \cancel{\frac{0}{2!}x^2} - \frac{1}{3!}x^3 + \cancel{\frac{0}{4!}x^4} + \frac{1}{5!}x^5 + \cancel{\frac{0}{6!}x^6}$$

$$\mathrm{sen}(x) \approx x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}$$

17-02-20

Método del punto fijo

Hace uso de aproximaciones sucesivas para encontrar la raíz de ecuaciones de la forma $f(x) = 0$

$$x_{i+1} = g(x_i)$$

Es muy importante la selección de $g(x)$ ya que no siempre converge con cualquier forma elegida de $g(x)$
El error aproximado se puede calcular usando el error normalizado

$$\varepsilon_a = \left| \frac{x_{i+1} - x_i}{x_{i+1}} \right| 100\%$$

Un criterio de convergencia es que x_{n+1} será cada vez más cercano a x_n

El siguiente teorema garantiza la existencia de 1 o más puntos fijos

- Teorema: Si g es una función continua en $[a,b]$ y $g(x) \in [a,b]$ $\forall x \in [a,b]$ entonces g tiene por lo menos un punto fijo en $[a,b]$
Si además $g'(x)$ existe $\forall x \in [a,b]$ y $|g'(x)| \leq K \leq 1$ entonces hay sólo un punto fijo

Ejercicio: Determinar por método del punto fijo, el cero de $f(x) = x^2 - 4x + 2$

$$x = \frac{x^2 + 2}{4} \Rightarrow x_{n+1} = \frac{x_n^2 + 2}{4}$$

24-07-20

Método de Bisecciones Sucesivas

También llamado corte binario, partición en dos intervalos, búsqueda binaria, bolzano se fundamenta en el Teorema del Valor Intermedio, el Teorema de Bolzano

Si tenemos una $f(x)$ continua en $[x_p, x_s]$ con $f(x_p)$ y $f(x_s)$ de signos opuestos. La primera aproximación a la raíz se determina como

$$x_M = \frac{(x_i + x_s)}{2}$$

Si $f(x_M) = 0$ entonces ahí está la raíz
Si $f(x_i) * f(x_M) < 0$ entonces está en el primer subintervalo
Si $f(x_i) * f(x_M) > 0$ está en el segundo subintervalo

Una ventaja es que el método siempre converge

Ejemplo
Dada $x^3 + x^2 - 3x - 3 = 0$

Consideramos $(1, 2)$
Calculamos: $f(1) = -4$
$f(1.5) = -1.875$
Como $f(1) * f(1.5) > 0$ buscamos en el segundo subintervalo
$f(1.5) = -1.875$
$f(1.75) = 0.171875$
Como $f(1.5) * f(1.75) < 0$ tenemos raíz en $(1.5, 1.75)$
$f(1.5) = -1.875$
$f(1.625) = -0.94$
Como $f(1.5) * f(1.625) > 0$ tenemos raíz en $(1.625, 1.75)$
⋮

Unidad 3 Sistemas de Ecuaciones
Definimos a una matriz como una tabla o arreglo rectangular de números
Una matriz de m filas y n columnas se le llama matriz de $m \times n$
Un elemento en la fila i y columna j de A se le llamará elemento: a_{ij} o $A[i, j]$
Se tiene $1 \leq i \leq m$ y $1 \leq j \leq n$
En algunos lenguajes de programación se inicia en cero:
$0 \leq i \leq m-1$ y $0 \leq j \leq n-1$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Una matiz con $m=1$ ó $n=1$ es un vector
Una matiz $1 \times n$ es vector fila
Una matiz $m \times 1$ es vector columna
La diagonal principal va desde la esquina superior izquierda hasta la inferior derecha en $m=n$

Tipos de matiices

Matiz cuadrada $(m \times m)$
Matiz rectangular $(m \times n)$
Matiices llenas pero no muy grandes: Pocos elementos nulos y el número de ecuaciones es de unos miles a lo sumo. Se aplican métodos directos
Matiices vacías y muy grandes: Se usan métodos indirectos o iterativos
Matiz nula
Matiz escalonada
Matiz triangular superior o inferior
Matiz diagonal
Matiz escalar
Matiz identidad

Repaso Programación Científica: Unidad 1

Solución Analítica

Solución Numérica

Problemas de dim finita: Ec. algebraicas, determinantes

Problemas de dim infinita: Integración, derivación

Notación Signo Magnitud

Complemento a 1

Complemento a 2

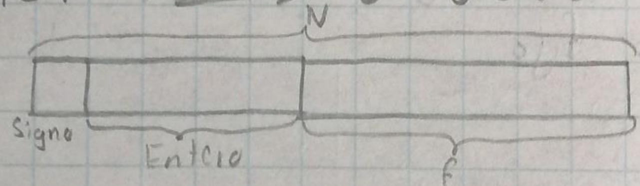
Formato de punto fijo

Ejemplo 2

Con $\beta = 10$ $N = 11$ $f = 6$

$-30.412 \longrightarrow 1\ 0030\ 412000$

$0.0437 \longrightarrow 0\ 0000\ 043700$



Formato de Punto Flotante

Ejemplo 4

5777_{10}

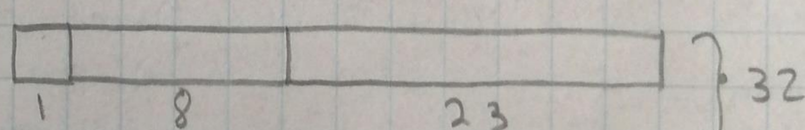
Signo $= 0$

5777 a binario 1011010010001

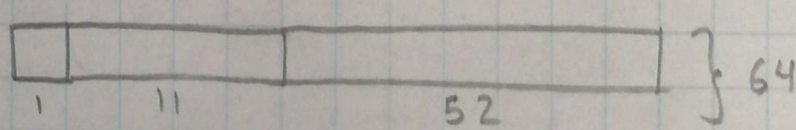
Normalizado $1.011010010001 \times 10^{12}$

Exponente $= 12 + 127 = 139_{10}$ en binario 10001011

Precisión simple
127



Precisión doble
1023



Infinitos

Cifras Significativas

Exactitud y Precisión

11010.01010001

$\frac{1000-999}{1}$ $\frac{10-9}{1}$

Error absoluto $E_x = x - x^*$

Error relativo $r_x = \frac{E_x}{x}$

Convergencia

Estabilidad

Error inherente (del mismo fenómeno)

Error de redondeo

Error de truncamiento

Propagación del error

En la suma: Es la suma de los errores absolutos

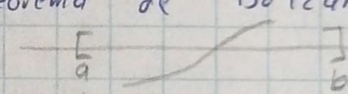
Serie de Taylor

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a) \cdot (x-a)^n}{n!}$$

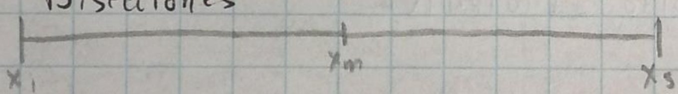
Método de Punto fijo

$$f(x) = x^2 - x + 1$$
$$0 = x^2 - x + 1$$
$$x = x^2 + 1 \rightarrow x_n = x_{n-1}^2 + 1$$

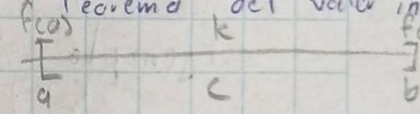
Teorema de Bolzano



Método de Bisecciones



Teorema del valor intermedio



Metodo de Falsa Posición

$$x_m = x_s - f(x_s) \frac{x_s - x_i}{f(x_s) - f(x_i)}$$

Metodo de Newton - Raphson

$$x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})}$$

$x_n = e^{-x_{n-1}}$

$f(x)\ e^{x} - x$

$x = e^{-x}$

$x = 0$

e^{x}

Analizando Regla de Cramer

1	2	3	4	17
5	6	7	8	18
9	10	11	12	19
13	14	15	16	20

Con un sistema $n \times n$ dado
Tengo n variables
n ecuaciones
$n+1$ coeficientes por ecuación

Para calcular Δ usaremos:

$$\begin{matrix} 11 & 12 & 13 & \cdots & 1n \\ 21 & 22 & 23 & \cdots & 2n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n1 & n2 & n3 & \cdots & nn \end{matrix}$$

$\therefore$ excluimos

11	12	13	14
21	22	23	24
31	32	33	34

$\Delta = (11)(22)(33) + (12)(23)(31) + (13)(21)(32) - (31)(22)(13) - (32)(23)(11) - (33)(21)(12)$

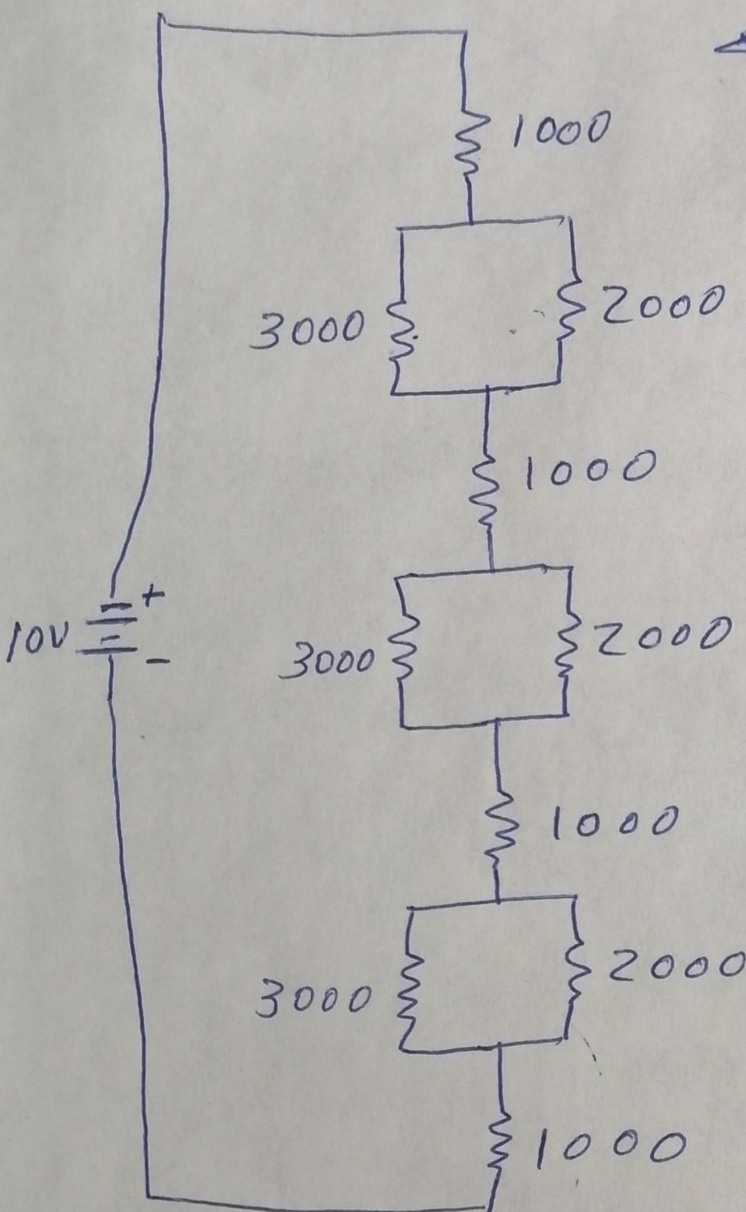
00	01	02	03
10	11	12	13
20	21	22	23

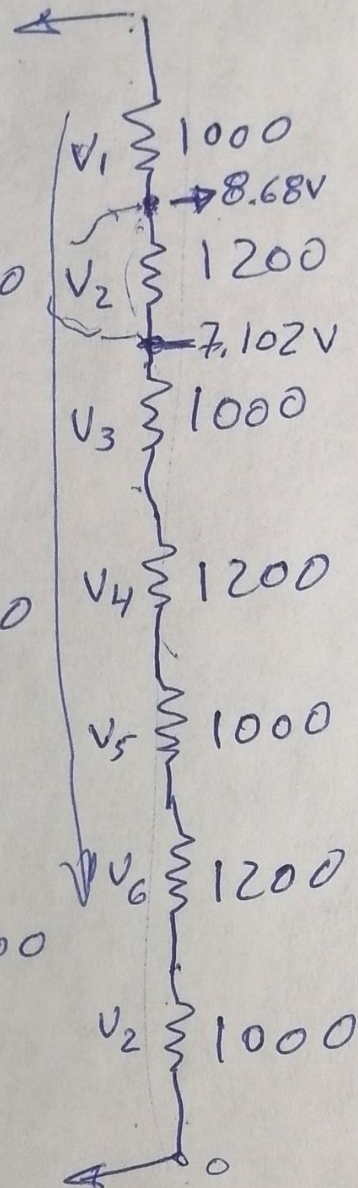
x: 00 por 03
10 13
20 23

y: 01 03
11 13
21 23

z: 02 03
12 13
22 23

$\boxed{V = IR}$





$\boxed{R_t = 7600\,\Omega}$

$I_t = \frac{10}{7600} =$

$\boxed{I_t = 0.001315}$

$V_1 = 1000 \times 0.001315$

$V_1 = 1.315$

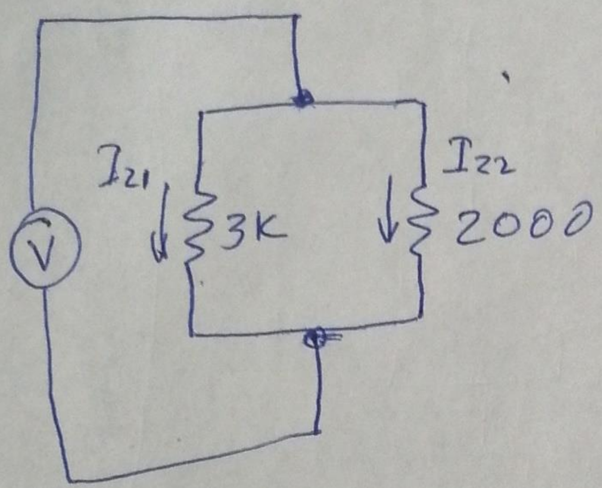
$V_2 = 1200 \times 0.001315$

$\boxed{V_2 = 1.578 \text{ Volts}}$

$$R_t = \frac{1}{\frac{1}{3000} + \frac{1}{2000}} = \frac{1}{\frac{2000+3000}{6000000}} = 1200\,\Omega$$

$I_1 = 0.001315$

$\begin{cases} I_{21} = \\ I_{22} = \end{cases}$

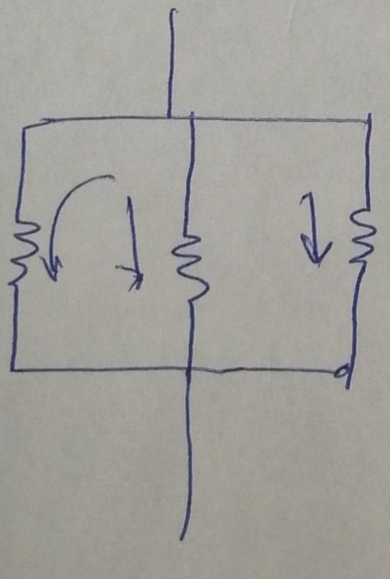


$V = 1.578\,V$

$I_{21} = \dfrac{1.578}{3000} = 0.000526\,A$ R_2

$I_{22} = \dfrac{1.578}{2000} = 0.000789\,A$ R_3

$I_2 = \longrightarrow 0.001315$



$\dfrac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}} =$