$_{42}C_{30}$

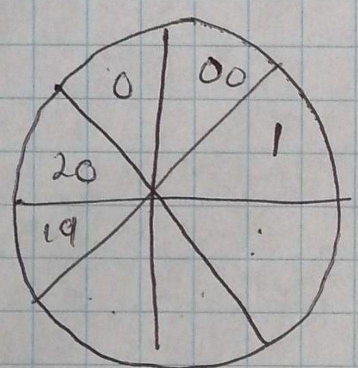
12-08-2019

Docente: Netzahualcóyotl Castañeda Leyva
Materia: Estadística Descriptiva y Probabilidad

14-08-2019

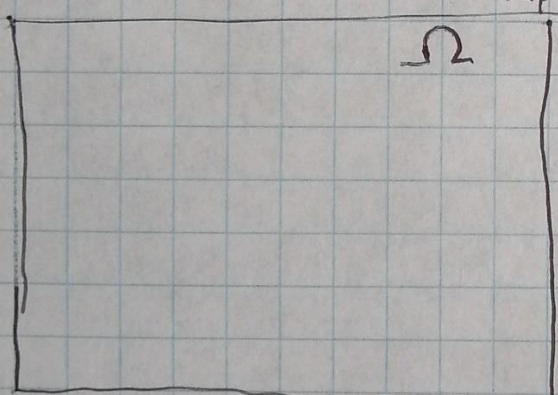
Introducción a la Probabilidad

Ejemplo de la ruleta



0 al 20 y 00

Espacio Muestral



El conjunto tiene 22 eventos simples

Tiene los subconjuntos:

$\emptyset$, $\{0\}$ $\{00\}$ ... $\{19\}$, $\{20\}$ ... Ω

El espacio muestral es el conjunto de todos los resultados posibles de un experimento y se llama Ω

El siguiente paso es procesar los datos

$x > a$ ó $-x < -a$

Tarea: Resolver con $a<0$:

$|x| > a$

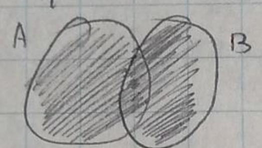
$|x| \geq a$

$|x| < a$

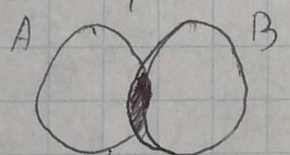
$|x| \leq a$

Algebra de Conjuntos

$a \in A$ ó $a \in B$



$a \in A$ y $a \in B$



$|x| > a$ pero $a<0$

$x > a$ ó $-x < -a$

$x - a > 0$ ó $a - x < 0$ $\quad$ 2 $\quad x - a \geq 0$ ó $a - x \leq 0$

~~Sea ahora $-a \geq 0$~~

~~$x+a > 0$ ó $-a-x<0$~~

1.- Si $a<0$ y $|x| > a$, entonces $x = \mathbb{R}$

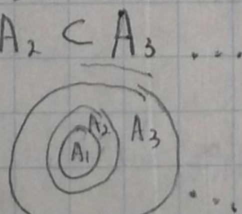
2.- Si $a<0$ y $|x| \geq a$, entonces $x = \mathbb{R}$

3.- Si $a<0$ y $|x| < a$, entonces $x = \emptyset$

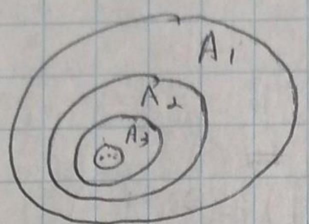
4.- Si $a<0$ y $|x| \leq a$, entonces $x = \emptyset$

Una sucesión de eventos es creciente si

$A_1 \subset A_2 \subset A_3 \ldots$ tal que $\{A_n\}$, $n \geq 1$



Una sucesión de eventos $\{A_n\}_{n\geq 1}$ es decreciente si $A_1 \supset A_2 \supset A_3 \dots$



Encontrar el conjunto para

1.- $A_n = [0, 1 + \frac{1}{n}]$

$$A_1 = [0, 2]$$
$$A_2 = [0, 1.5]$$
$$A_3 = [0, 1.333\dots]$$
$$A_4 = [0, 1.25]$$

Si $n \to \infty$, $\frac{1}{n} \to 0$

$\therefore A_n = [0, 1]$

2.- $A_n = [0, 1 - \frac{1}{n}]$

$$A_1 = [0, 0] = \{0\}$$
$$A_2 = [0, 0.5]$$
$$A_3 = [0, 0.666\dots]$$
$$A_4 = [0, 0.75]$$

Si $n \to \infty$, $\frac{1}{n} \to 0$

$\therefore A_n = [0, 1)$

28-09-2019

Espacios de probabilidad

Modelo matemático que describe los fenómenos aleatorios

1.- Se establece el espacio muestral
2.- Establecer la familia de eventos $\mathcal{A}$
3.- Definir la medida de probabilidad en cada evento

$$A \in \mathcal{A} \to (A \subset \Omega)$$

A^c también es un evento

$$A^c \in \mathcal{A} \to (A \subset \Omega)$$
$$P(A^c) = 1 - P(A)$$

Axiomas de Kolmogorov

$$P(\Omega) = 1$$
$$P(A) \geq 0$$

Si $A_1, A_2 \dots$ es una sucesión de eventos excluyentes, es decir, $A_i \cap A_j \neq 0$ para $1 \leq i < j$ entonces $P(A_1 \cup A_2 \dots) = P(A_1) + P(A_2) \dots$

Propiedades

1- $0 \leq P(A) \leq 1$

2- Si $A \subset B$ entonces $P(A) \leq P(B)$

3- $P(\emptyset) = 0$

4- $P(A^c) = 1 - P(A)$

5- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B)$

6- $P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap B^c)$

Ej: Lanzar una moneda 3 veces

$$\Omega = \begin{Bmatrix} CCC & CSS & SCS \\ CCS & SSS & SCC \\ CSC & SSC & \end{Bmatrix}$$

Mejor aaa aas asa ass
sss ssa sas saa

Escribir los 256

Lanzar una moneda 3 veces tiene 8 eventos simples. Sus agrupaciones son

1- $\emptyset$
2- aaa
3- aas
4- asa
5- ass
6- sss
7- ssa
8- sas
9- saa
10- aaa, aas
11- aaa, asa
12- aaa, ass
13- aaa, sss
14- aaa, ssa
15- aaa, sas
16- aaa, saa
17- aas, asa
18- aas, ass
19- aas, sss
20- aas, ssa
21- aas, sas
22- aas, saa
23- asa, ass
24- asa, sss
25- asa, ssa
26- asa, sas
27- asa, saa
28- ass, sss
29- ass, ssa
30- ass, sas
31- ass, saa
32- sss, ssa
33- sss, sas
34- sss, saa
35- ssa, sas

36:- ssa, saa

37:- sas, saa

38:- aaa, aas asa

39:- aaa, aas, ass

40:- aaa, aas, sss

41:- aaa, aas, ssa

42:- aaa, aas, sas

43:- aaa, aas, saa

44:- aaa, asa, ass

45:- aaa, asa, sss

46:- aaa, asa, ssa

47:- aaa, asa, sas

48:- aaa, asa, saa

49:- aaa, ass, sss

50:- aaa, ass, ssa

51:- aaa, ass, sas

52:- aaa, ass, saa

53:- aaa, sss, ssa

54:- aaa, sss, sas

55:- aaa, sss, saa

56:- aaa, ssa, sas

57:- aaa, ssa, saa

58:- aaa, sas, saa

59:- aas, asa, ass

60:- aas, asa, sss

61:- aas, asa, ssa

62:- aas, asa, sas

63:- aas, asa, saa

64:- aas, ass, sss

65:- aas, ass, ssa

66:- aas, ass, sas

67:- aas, ass, saa

68:- aas, sss, ssa

69:- aas, sss, sas

70:- aas, sss, saa

71:- aas, ssa, sas

72:- aas, ssa, saa

73:- aas, sas, saa

74:- asa, ass, sss

75:- asa, ass, ssa

76:- asa, ass, sas

77:- asa, ass, saa

78:- asa, sss, ssa

79:- asa, sss, sas

80:- asa, sss, saa

81:- asa, ssa, sas

82:- asa, ssa, saa

83:- asa, sas, saa

84:- ass, sss, ssa

85:- ass, sss, sas

86:- ass, sss, saa

87:- ass, ssa, sas

88:- ass, ssa, saa

89:- ass, sas, saa

90:- sss, ssa, sas

91:- sss, ssa, saa

92:- sss, sas, saa

93:- ssa, sas, saa

94:- aaa, aas, asa, ass

95:- aaa, aas, asa, sss

96:- aaa, aas, asa, ssa

97:- aaa, aas, asa, sas

98:- aaa, aas, asa, saa

99:- aaa, aas, ass, sss

100:- aaa, aas, ass, ssa

101:- aaa, aas, ass, sas

102:- aaa, aas, ass, saa

103:- aaa, aas, sss, ssa

104:- aaa, aas, sss, sas

105:- aaa, aas, sss, saa

106:- aaa, aas, ssa, sas

107:- aaa, aas, ssa, saa

108:- aaa, aas, sas, saa

109:- aaa, asa, ass, sss

110:- aaa, asa, ass, ssa

111:- aaa, asa, ass, sas

112:- aaa, asa, ass, saa

113:- aaa, asa, sss, ssa

114:- aaa, asa, sss, sas

115:- aaa, asa, sss, saa

116:- aaa, asa, ssa, sas

117:- aaa, asa, ssa, saa

118:- aaa, asa, sas, saa

119:- aaa, ass, sss, ssa

120:- aaa, ass, sss, sas

121:- aaa, ass, sss, saa

122:- aaa, ass, ssa, sas

123:- aaa, ass, ssa, saa

124:- aaa, ass, sas, saa

125:- aaa, sss, ssa, sas

126:- aaa, sss, ssa, saa

127:- aaa, sss, sas, saa

128:- aaa, ssa, sas, saa

129:- aas, asa, ass, sss

130:- aas, asa, ass, ssa

131:- aas, asa, ass, sas

132:- aas, asa, ass, saa

133:- aas, asa, sss, ssa

134:- aas, asa, sss, sas

135:- aas, asa, sss, saa

136:- aas, asa, ssa, sas

137:- aas, asa, ssa, saa

138:- aas, asa, sas, saa

139:- aas, ass, sss, ssa

140:- aas, ass, sss, sas

141:- aas, ass, sss, saa

142:- aas, ass, ssa, sas

143:- aas, ass, ssa, saa

144:- aas, ass, sas, saa

145:- aas, sss, ssa, sas

146:- aas, sss, ssa, saa

147:- aas, sss, sas, saa

148:- aas, ssa, sas, saa

149:- asa, ass, sss, ssa

150:- asa, ass, sss, sas

151:- asa, ass, sss, saa

152:- asa, ass, ssa, sas

153:- asa, ass, ssa, saa

154:- asa, ass, sas, saa

155:- asa, sss, ssa, sas

156:- asa, sss, ssa, saa

157:- asa, sss, sas, saa

158:- asa, ssa, sas, saa

159:- asa, ass, sss, ssa

160:- asa, ass, sss, sas

161:- asa, ass, sss, saa

162:- asa, ass, ssa, sas

163:- asa, ass, ssa, saa

164:- asa, ass, sas, saa

165:- asa, sss, ssa, sas

166:- asa, sss, ssa, saa

167:- asa, sss, sas, saa

168 - asa, ssa, sas, saa
169 - ass, sss, ssa, sas
170 - ass, sss, ssa, saa
171 - ass, sss, sas, saa
172 - ass, ssa, sas, saa
173 - sss, ssa, sas, saa
174 - aaa, aas, asa, ass, sss
175 - aaa, aas, asa, ass, ssa
176 - aaa, aas, asa, ass, sas
177 - aaa, aas, asa, ass, saa
178 - aaa, aas, asa, sss, ssa
179 - aaa, aas, asa, sss, sas
180 - aaa, aas, asa, sss, saa
181 - aaa, aas, asa, ssa, sas
182 - aaa, aas, asa, ssa, saa
183 - aaa, aas, asa, sas, saa
184 - aaa, aas, ass, sss, ssa
185 - aaa, aas, ass, sss, sas

186 - aaa, aas, ass, sss, saa
187 - aaa, aas, ass, ssa, sas
188 - aaa, aas, ass, ssa, saa
189 - aaa, aas, ass, sas, saa
190 - aaa, aas, sss, ssa, sas
191 - aaa, aas, sss, ssa, saa
192 - aaa, aas, sss, sas, saa
193 - aaa, aas, ssa, sas, saa
194 - aaa, asa, ass, sss, ssa
195 - aaa, asa, ass, sss, sas
196 - aaa, asa, ass, sss, saa
197 - aaa, asa, ass, ssa, sas
198 - aaa, asa, ass, ssa, saa
199 - aaa, asa, ass, sas, saa
200 - aaa, asa, sss, ssa, sas
201 - aaa, asa, sss, ssa, saa
202 - aaa, asa, sss, sas, saa
203 - aaa, asa, ssa, sas, saa

204 - aaa, ass, sss, ssa, sas
205 - aaa, ass, sss, ssa, saa
206 - aaa, ass, sss, sas, saa
207 - aaa, ass, ssa, sas, saa
208 - aaa, sss, ssa, sas, saa
209 - aas, asa, ass, sss, ssa
210 - aas, asa, ass, sss, sas
211 - aas, asa, ass, sss, saa
212 - aas, asa, ass, ssa, sas
213 - aas, asa, ass, ssa, saa
214 - aas, asa, ass, sas, saa
215 - aas, asa, sss, ssa, sas
216 - aas, asa, sss, ssa, saa
217 - aas, asa, sss, sas, saa
218 - aas, asa, ssa, sas, saa
219 - aas, ass, sss, ssa, sas
220 - aas, ass, sss, ssa, saa
221 - aas, ass, sss, sas, saa

222 - aas, ass, ssa, sas, saa
223 - aas, sss, ssa, sas, saa
224 - asa, ass, sss, ssa, sas
225 - asa, ass, sss, ssa, saa
226 - asa, ass, sss, sas, saa
227 - asa, ass, ssa, sas, saa
228 - asa, sss, ssa, sas, saa
229 - ass, sss, ssa, sas, saa
230 - aaa, aas, asa, ass, sss, ssa
231 - aaa, aas, asa, ass, sss, sas
232 - aaa, aas, asa, ass, sss, saa
233 - aaa, aas, asa, ass, ssa, sas
234 - aaa, aas, asa, ass, ssa, saa
235 - aaa, aas, asa, ass, sas, saa
236 - aaa, aas, asa, sss, ssa, sas

237 - aaa, aas, asa, sss, ssa, saa
238 - aaa, aas, asa, sss, sas, saa
239 - aaa, aas, asa, ssa, sas, saa
240 - aaa, aas, ass, sss, ssa, sas
241 - aaa, aas, ass, sss, ssa, saa
242 - aaa, aas, ass, sss, sas, saa
243 - aaa, aas, ass, ssa, sas, saa
244 - aaa, aas, sss, ssa, sas, saa
245 - aas, asa, ass, ssa, sas, saa
246 - aas, ass, sss, ssa, sas, saa
247 - asa, ass, sss, ssa, sas, saa
248 - aaa, aas, asa, ass, sss, ssa, saa
249 - aaa, aas, asa, ass, sss, ssa, saa
250 - aaa, aas, asa, ass, sss, sas, saa
251 - aaa, aas, asa, ass, ssa, sas, saa

252- aaa, aas, asa, sss, ssa, sas, saa
253- aaa, aas, ass, sss, ssa, sas, saa
254- aaa, asa, ass, sss, ssa, sas, saa
255- aas, asa, ass, sss, ssa, sas, saa
256- aaa, aas, asa, ass, sss, ssa, sas, saa

09-09-2019

Independencia

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

Ejemplo: Cuadrado unitario

J1 3v J2 3V

J1		J2
3 - 0		0 - 3
2 - 0		0 - 2
1 - 0		0 - 1

J		J
3	=	0
2	=	0
1		0

1 2 3 4 5 6

1 2

Probabilidad condicional: $P(A|B) \rightarrow$ Probabilidad de A dado B

Formula de Bayes

Ejemplo

Prueba de lab de cierta enfermedad donde el 0.5% la padece

La prueba detecta al 95% de los enfermos mientras que considera como 1% de los sanos

¿Qué tan efectiva es?

De 1000 5 son enfermos

De 20,000 100 son enfermos

De 100 enfermos, 95 los detecta

$\therefore$ De 20,000 95 los detecta

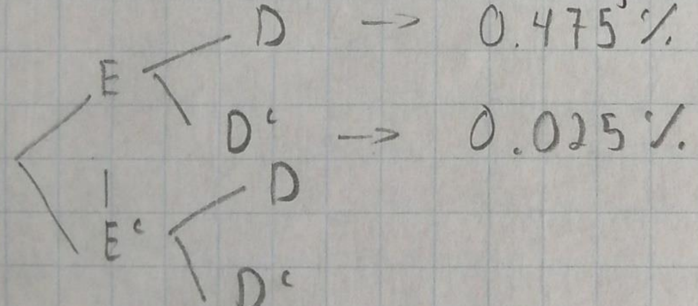
La probabilidad $\frac{95}{20,000} = 0.00475 = 0.475\%$

E La persona seleccionada al azar está enfermo 0.5%

E^c " " " " " " sana 99.5%

D El diagnóstico es positivo 95%

D^c " " " negativo 5%



¿$P(E|D)$?

Probabilidad de E dado D

Formula de Bayes: $P(E|D) = \frac{P(E)\,P(D|E)}{P(E)P(D|E) + P(E^c)P(D|E^c)}$

Estadística Descriptiva

La varianza mide la dispersión de la muestra

Tarea de comportamiento y tendencia de un trabajo de campo e interpretar los datos

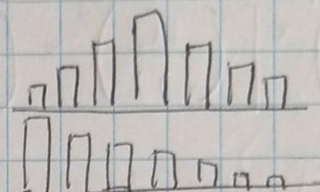
Tomar decisiones

Ideas:

Banco

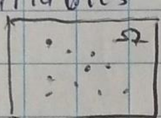
Llegada de camiones

Llegada a la biblio o cafetería



Encuesta ⟶ Posiblemente

Variables Aleatorias



V. Aleatoria Función $X: \Omega \to R$

Ruleta: Apostar rojo $n=10$ veces

$\# \Omega = 2^{10} = 1024$

Si $\omega = \{0,0,0,0,0,0,0,0,0,0\} = X(\Omega) = 0$

V. A. Discretas

Jugar a ruleta

$\# \Omega = 2^{10} = 1024$,

$\Omega = \{\omega = (\omega_1, \dots, \omega_{10}) : \omega_1, \dots, \omega_{10} = 0, 1\}$

$X: \Omega \to R$, $Y: \Omega \to R$

X = No. de juegos ganados Y = Ganancia en dichos juegos

$X = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$ $Y = \{-10,-8,-6,-4,-2,0,2,4,6,8,10\}$

$Y = 2X - 10$

Función Gamma

$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty x^{\alpha-1} e^{-x} dx$

Factorial continuo

Ruleta: 10 rojos, 10 negros, 0 y 00

La prob de perder (no rojo) 10 veces es

$$\frac{12}{22} \cdot \frac{12}{22} \cdots = \left(\frac{12}{22}\right)^{10} \approx 0.0023 = 0.23\%$$

La prob de ganar 1 vez y perder 9 es

$$\left[\frac{10}{22} \cdot \left(\frac{12}{22}\right)^{9}\right] \approx 0.019 = 1.9\%$$

~~Ganar~~ 2: $\binom{10}{2} \times \left[\left(\frac{10}{22}\right)^2 \times \left(\frac{12}{22}\right)^8 \right] = 0.073 = 7.3\%$

: $\binom{n}{x} \times \left[\left(\frac{10}{22}\right)^x \times \left(\frac{12}{22}\right)^{n-x} \right] \longrightarrow$ fórmula importante

03 - 11 - 2019

:

Sea un experimento de n ensayos de éxito - fracaso

~~Ganar 5~~: Ocupamos n = número de ensayos

p = probabilidad de éxito

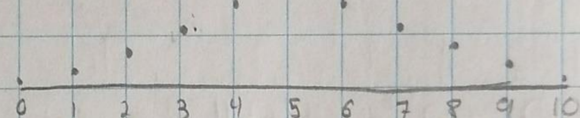
~~Ganar~~ 6: El conjunto de valores posibles de X es:

$X = 0, 1, 2, \ldots, n$

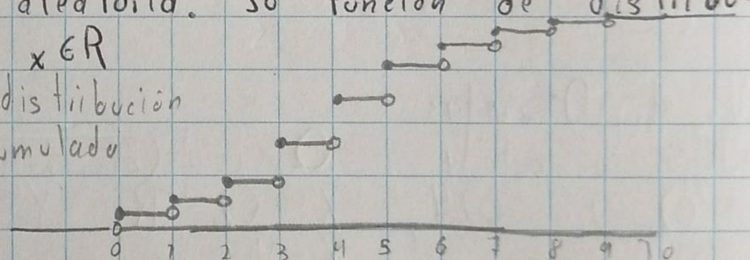
~~Ganar 7~~: Su función de densidad son las probabilidades

$f(x) = P(X = x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$ para $x = 0, 1, \ldots, n$

~~Ganar~~ 8:



Sea $X: \Omega \to R$ una variable aleatoria. Su función de distribución es: $F(x) = P(X \leq x)$ para $x \in R$



Distribucion Geometrica

Se X = No. de ensayos hasta el primer éxito

$f(x) = P(X = x) = p(1-p)^{x-1}$

Ω = Conjunto de resultados posibles del experimento $x = 1, 2, 3, \ldots$

$\Omega = \{ \underbrace{E}_{X(w)=1}, \underbrace{FE}_{X(w)=2}, \underbrace{FFE}_{X(w)=3} \ldots \}$

w	$X(w)$	$P(w)$
E	1	p
FE	2	$(1-p)p$
FFE	3	$(1-p)^2 p$
FFFE	4	$(1-p)^3 p$
⋮	⋮	

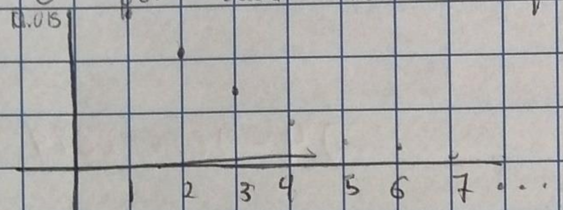
Ejemplo Considere

X = No. de temporadas o años que soporta un anuncio espectacular específico

Asuma que $p = 0.015 = 1.5\%$

Cada 1000 años el espectacular se cae 15 veces

O por cada 1000 espectaculares se caen 15 iguales



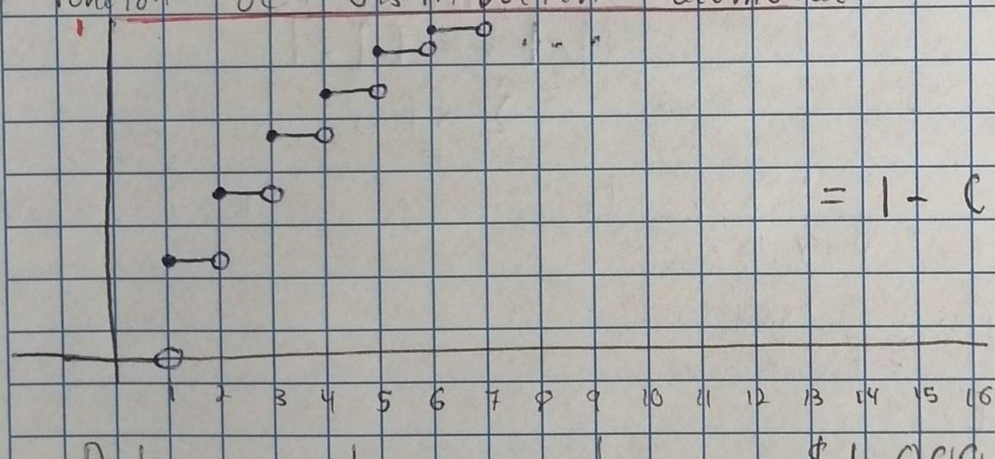
Calcular:

$X = 2$ $\quad f(2) = 1.48\%$

$X \leq 30$ $\quad \sum_{x=1}^{30} f(x) = 36.45\%$

$X > 30$ $\quad 1 - .3645 = 0.6355$

Función de distribución acumulada



$= 1 - (1-p)^x$

Determinar la aseguradora por \$1,000,000

100 asegurados pagan 1.5 daños al año

pagan 1,500,000 cada uno paga

$$\frac{1,500,000}{100} = 15,000$$

Ejercicio 3-76 Montgomery

$p = 20\%$

$X = R\ R\ R\ R\ R\ R\ R\ R\ R\ R\ V$

$\therefore X = 11$

$= 1 - (1-p)^{x}$

$1 - (1-0.2)^{11}$

$1 - (0.8)^{11}$

$= 0.9141$

24-10-2019

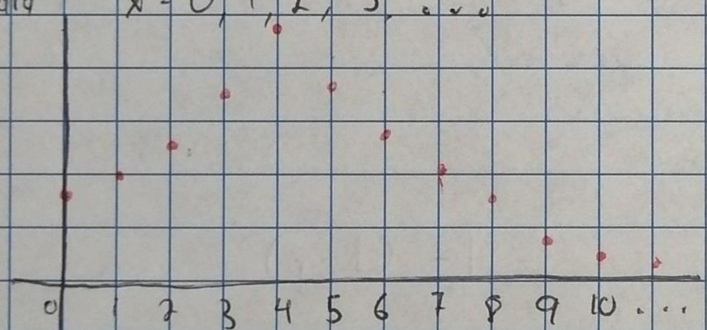
Esperanza y Varianza

de una población discreta de la V.A. discreta X

Sea X una V.A. discreta con función de densidad

$f(x) = P(X = x)$

para $x = 0, 1, 2, 3, \ldots$



La media poblacional o esperanza es:

$$M = E_x = E[x] = \sum_{x=0}^{\infty} x f(x)$$

La media es el centro de la población

Un indicador de dispersión es:

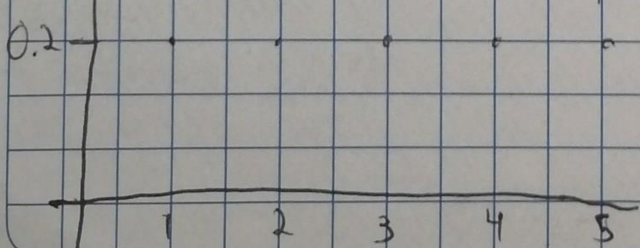
Varianza poblacional definida como:

$$\sigma^2 = V_x = V[x] = E(x-m)^2 = \sum_{x=0}^{\infty} (x-m)^2 f(x)$$ con eso $< \infty$

Considere

$x \sim U(1, 2, 3, 4, 5)$

$f(x) = P(X = x) = \frac{1}{5} = 0.2$ para $x = 1, 2, 3, 4, 5$



$$M = E_x = \sum_{x=0}^{\infty} x f(x) = \sum_{x=1}^{5} x \left(\frac{1}{5}\right) = 3$$

Media

$$\sigma^2 = \sum_{x=0}^{5} (x-3)^2 \frac{1}{5}$$
$$= \frac{1}{5}\left[(1-3)^2 + (2-3)^2 + (3-3)^2 + (4-3)^2 + (5-3)^2\right]$$
$$= \frac{1}{5}\left[4+1+1+4\right] = 2 \quad \text{Varianza}$$
$$\sigma = 1.4142 \quad \text{Desviación Estándar}$$

Si $X \sim U(1, 2, 3, \dots, N)$

$$M = Ex = \frac{N+1}{2} \qquad \sigma^2 = vx = \frac{N^2-1}{12}$$

Si $X \sim U(a, a+1, a+2, \dots, b)$

$$M = Ex = \frac{a+b}{2} \qquad \sigma^2 = vx = \frac{b^2-a^2}{12}$$

Sea X una v.a. discreta con función de densidad Bini

$$Ex = np$$
$$vx = np(1-p)$$

$\left.\begin{array}{l} n = 10 \\ p = 20\% \end{array}\right\}$ 2 éxitos $\rightarrow Ex$; 1,6 éxitos $\rightarrow vx$

01-11-2019

Función Generadora de Momentos

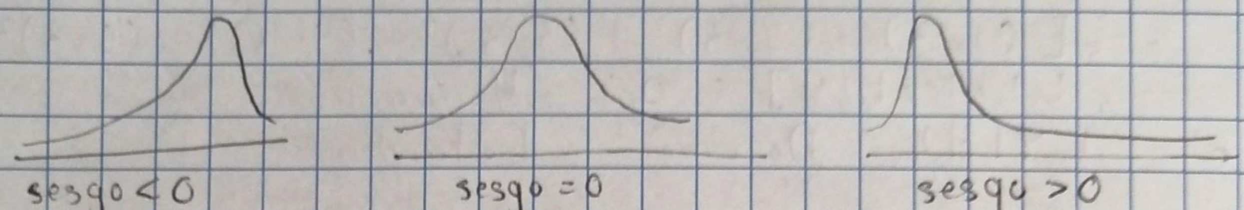
Momentos no centrales de una V.A X	Momentos centrales de la V.A. X
$M = Ex$	$M = Ex$
Ex^2	$\sigma^2 = E(X-M)^2$
Ex^3	$E(X-M)^3$
$\vdots$	$\vdots$
Ex^k	$E(X-M)^k$

M = Centro de la población $\qquad \sigma^2$ = Dispersión

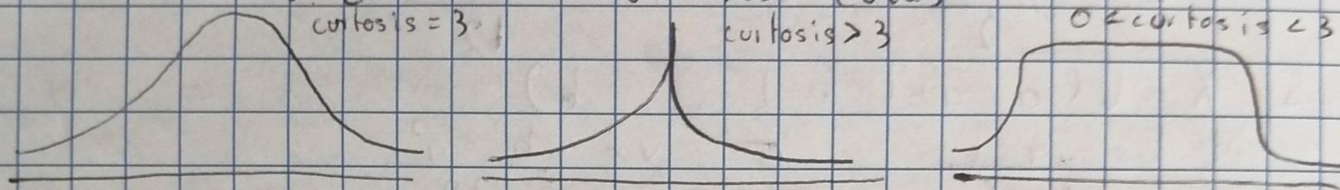
Coeficiente de sesgo $= E\left(\frac{x-M}{\sigma}\right)^3 = \frac{1}{\sigma^3} E(X-M)^3$

$$= \frac{1}{\sigma^3} \cdot EX^3 - 3MEX^2 + 3M^2EX - M^3$$

El coeficiente de sesgo mide la asimetría



$$\text{Curtosis} = E\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right)^4$$ Mide la pesadez de las colas



Ejemplo

Sea X una V.A. discreta con función de densidad

$$f(x) = P(X = x) \quad \text{para} \quad x = 0, 1, 2, \ldots$$

Su función generadora de momentos es

$$M(t) = Ee^{tx} = \sum_{x=0}^{\infty} e^{tx} f(x) \quad \text{para} \quad t \in \mathbb{R}$$ ⇒ de alguna forma se usan series de Taylor

El primer momento se obtiene de la primera derivada $M(0)$

Si $M'(t) = Ee^{tx}$

$M'(t) = Ex$

$M''(t) = Ex^2$ ⇒ segundo momento

En general se tiene que

$$M^{(k)}(0) = Ex^k, \quad k = 0, 1, \ldots$$

Ejemplo

$$X \sim U(1, \ldots, N)$$

$$f(x) = P(X = x) = \frac{1}{N} \qquad x = 1, 2, 3, \ldots, N$$

$$M(t) = Ee^{tx} = \sum_{x=0}^{\infty} e^{tx} f(x) = \sum_{x=1}^{N} e^{tx} f(x)$$

$$= \sum_{x=1}^{N} e^{tx} \frac{1}{N} = \frac{1}{N} \sum_{x=1}^{n} e^{tx} = \frac{1}{N}\left(e^{t} + e^{2t} + \ldots + e^{Nt}\right), \; t \in \mathbb{R}$$

$$= \frac{e^{t}(1 - e^{Nt})}{N(1 - e^{t})} \Rightarrow M'(t) = \frac{1}{N}\left(e^{t} + 2e^{2t} + \ldots + Ne^{nt}\right)$$

$$= \frac{1}{N}\left(\frac{N(N+1)}{2}\right) = \frac{N+1}{2}$$

Independencia de V. A.

X y Y son V. A. discretas debe cumplirse

$$P(X=3, Y=8) = P(X=3)\, P(Y=8)$$

Función de densidad conjunta

$$f(x,y) = f_X(x)\, f_Y(y)$$

Ejemplo 2 softwares

Distribución de Poisson

Cuando $\mu \to \infty$ $\sqrt{\mu} \to \infty$ y $\frac{1}{\mu} \to 0$

Aproximación de Poisson

Si $X \sim bin(n, p)$

con n grande

y p pequeño $\to$ se aproxima a Poisson

Ej. Considere 90 hackers y $p = 0.12$

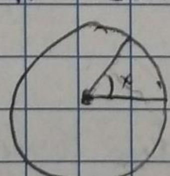
$X = 0, 1, \ldots, 90$

$E_X = 10.8$

Por aproximación de Poisson

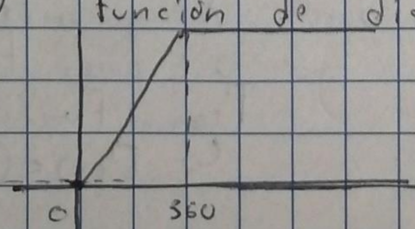
$$X \sim P_o(\mu = 10.8)$$

V. A. Continua



x vive en $0 \leq x \leq 360$

Función de distribución



~~Para~~ la

$$F(x) = P(X \le x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \le 0 \\ \frac{x}{360} & \text{si } 0 \le x \le 360 \\ 1 & \text{si } x \ge 360 \end{cases}$$

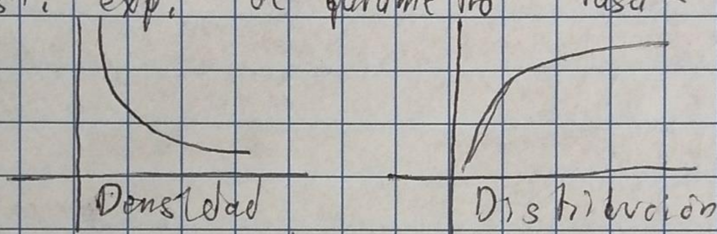
La funcion de densidad es

$$f(x) = \frac{d}{dx} F(x)$$

$$f(x) = \frac{d}{dx} F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \frac{1}{360} & \text{si } 0 < x < 360 \\ 0 & \text{si } x > 360 \end{cases}$$

15-11-2019

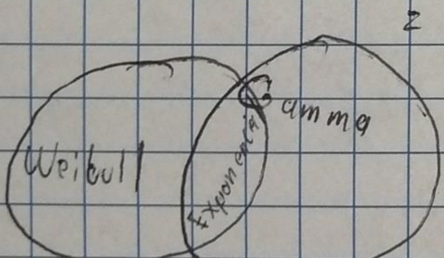
Sea X = vida útil de un comp. eléctrico
Modelar con dist. exp. de parámetro tasa = 3 unidades por año



La garantía del componente es de 2 meses ¿qué porcentaje de unidades fallarán antes del tiempo de garantía?

$\frac{2 \text{ meses}}{\text{año}} = \frac{1}{6}$

$$F\left(\tfrac{1}{6}\right) = P\left(X \le \tfrac{1}{6}\right) = P(X \le 0.16667)$$
$$= 1 - e^{-3(1/6)} = 0.3934$$



Distribucion Gamma

La funcion de densidad es:

$$f(x) = F'(x) = \frac{\lambda^{\alpha} x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} e^{-\lambda x}$$ donde λ = parametro tasa
α = parametro de Gamma
$\Gamma(\alpha)$ = Funcion gamma
↳ $\Gamma(n) = (n-1)!$

Repaso Estadística: Segundo Parcial

Concepto de Variable Aleatoria

Sean X: Variable aleatoria
S: Espacio muestral
e: Cualquier elemento de S
x: Valor que puede tomar X
$\mathbb{R}$: Conjunto de números reales

X es la correspondencia que establece la variable aleatoria

Ejemplo 1 (p. 68):
X puede tomar cualquiera de los números 0, 1, 2, 3

Ejemplo 2 (p. 68):

e	x
(c, c, c)	0
(c, c, s)	1
(c, s, c)	1
(s, c, c)	1
(c, s, s)	2
(s, c, s)	2
(s, s, c)	2
(s, s, s)	3

Dominio $X = S$
Rango $X = \{0, 1, 2, 3\}$

Distribución de Probabilidad de V. A. Discretas

Ejemplo 1 (p. 70):

x	$P(X = x)$
0	$1/8$
1	$3/8$
2	$3/8$
3	$1/8$

Ejemplo 2 (p. 70):
$(a_1, a_2), (a_1, d_1), (a_1, d_2), (a_1, d_3), (a_2, d_1), (a_2, d_2),$
$(a_2, d_3), (d_1, d_2), (d_1, d_3), (d_2, d_3)$

x	$P(X=x)$
0	1/10
1	6/10
2	3/10

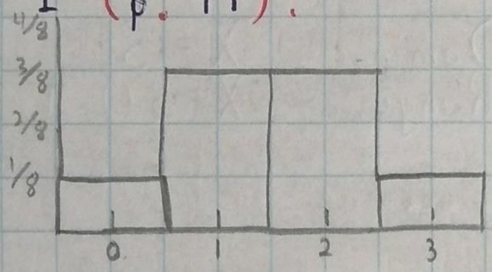
Ejemplo 3 (p. 70):

Como $\sum f(x) = 1$

$$\sum_{x=0}^{3} kx^2 = k(0)^2 + k(1)^2 + k(2)^2 + k(3)^2 = 1 \rightarrow k = \frac{1}{14}$$

$$\therefore P(X=2) = \frac{1}{14}(2)^2 = \frac{2}{7}$$

Ejemplo 1 (p. 71):



Distibución de probabilidad acumulada de V. A. Discretas

Ejemplo 2 (p. 71):

x	$P(X \leq x)$
0	1/8
1	4/8
2	7/8
3	8/8

Valor esperado de una V. A. Discreta

Ejemplo 1 (p. 74):

$$\mu = E(X) = \sum_{x=0}^{3} x f(x) = 0\left(\frac{1}{8}\right) + 1\left(\frac{3}{8}\right) + 2\left(\frac{3}{8}\right) + 3\left(\frac{1}{8}\right) = 1.5$$

$$\therefore E(X) = 1.5$$

Ejemplo 2 (p. 74):

$$\mu = E(X) = \sum_{x=0}^{2} x f(x) = 0\left(\tfrac{1}{10}\right) + 1\left(\tfrac{6}{10}\right) + 2\left(\tfrac{3}{10}\right) = 1.2$$

$\therefore E(X) = 1.2$ artículos defectuosos

Valor esperado de expresiones con una variable aleatoria

Ejemplo 1 (p. 75):

$$E(X) = \sum_{x=1}^{4} G(x) f(x) = (2(.1)+1)(1) + (2(.4)+1)(2) + (2(.3)+1)(3) + (2(.2)+1)(4) = 6.2$$

$\therefore E(X) = 6.2$

Varianza de una V. A. Discreta

Ejemplo 2 (p. 77):

$$\sigma^2 = \sum_{x=0}^{3} (x-\mu)^2 f(x) = (0-1.5)^2\left(\tfrac{1}{8}\right) + (1-1.5)^2\left(\tfrac{3}{8}\right) + (2-1.5)^2\left(\tfrac{3}{8}\right) + (3-1.5)^2\left(\tfrac{1}{8}\right) = 0.75$$

Función Generadora de Momentos

Ejemplo 1 (p. 82):

a) $$E(X) = \sum_{x=1}^{4} x f(x) = 1(0.2) + 2(0.3) + 3(0.4) + 4(0.1) = 2.4$$

$$E(X^2) = \sum_{x=1}^{4} x^2 f(x) = 1^2(0.2) + 2^2(0.3) + 3^2(0.4) + 4^2(0.1) = 6.6$$

$$\sigma^2 = E(X-\mu)^2 = E(X)^2 - \mu^2 = 6.6 - (2.4)^2 = 0.84$$

$$V = \frac{\sigma}{\mu} = \frac{\sqrt{0.84}}{2.4} = 0.3819$$

b) $$E(X^3) = \sum_{x=1}^{4} x^3 f(x) = 1^3(0.2) + 2^3(0.3) + 3^3(0.4) + 4^3(0.1) = 19.8$$

$$\mu_3 = E(X-\mu)^3 = E(X^3) - 3\mu\mu_2 + 2\mu^3 = 19.8 - 3(2.4)(6.6) + 2(2.4)^3 = -0.072$$

Coeficiente de asimetría: $\frac{\mu_3}{(\mu_2)^{3/2}} = \frac{-0.072}{(0.84)^{3/2}} = -0.0935$

Siendo valor negativo, es asimétrica con sesgo a la izquierda

c) $M_X(t) = E(e^{tX}) = \sum_x e^{tx} f(x) = 0.2e^{t} + 0.3e^{2t} + 0.4e^{3t} + 0.1e^{4t}$

d) $M_X'(t) = 0.2e^{t} + 0.3(2e^{2t}) + 0.4(3e^{3t}) + 0.1(4e^{4t})$
$= 0.2 + 0.6 + 1.2 + 0.4$
$= 2.4$

Ejercicio 1 (p. 84):

Con la distribución

x	$f(x)$
1	0.1
2	0.2
3	0.5
4	0.15
5	0.05

a) $\mu_1 = E(X) = \sum_{x=1}^{5} x f(x) = 0.1 + 0.4 + 1.5 + 0.6 + 0.25$
$= 2.88$

$\mu_2 = E(X^2) = \sum_{x=1}^{5} x^2 f(x) = 0.1 + 0.8 + 4.5 + 2.4 + 1.25$

$V(X) = \mu_2 - \mu_1^2 = 1.1875$

$\frac{\sigma}{\mu} = 4.75$

b) $E(X^3) = \sum_{x=1}^{5} x^3 f(x) = 0.1 + 1.6 + 13.5 + 9.6 + 6.25$
$= 31.05$

$\mu_3 = E(X^3) - 3\mu\mu_2 + 2\mu^3 = 31.05 - 78.192 + 47.77$
$= 0.6337$

Coeficiente de asimetría: $\frac{\mu_3}{(\mu_2)^{3/2}} = \frac{0.6337}{(9.05)^{3/2}} = 0.0233$

Siendo valor positivo, es asimétrica con sesgo a la derecha

c) $M_4 = 0.2\,[12.49 + 0.599 + 2.07\times10^{-4} + 1.57 + 20.14]$
$= 6.973$

$\frac{M_4}{S_n^4} = \frac{6.973}{1.1875} = 5.872$

Con curtosis > 3, la distribución es puntiaguda o leptocúrtica

d) $M_x(t) = 0.1e^{t} + 0.2e^{2t} + 0.5e^{3t} + 0.15e^{4t} + 0.05e^{5t}$

e) $M_x'(t) = 0.1e^{t} + 0.4e^{2t} + 1.5e^{3t} + 0.6e^{4t} + 0.25e^{5t}$

Evaluando $t = 0$

$$0.1 + 0.4 + 1.5 + 0.6 + 0.25 = 2.85$$

Distribuciones de Probabilidad Discretas

Distribución Discreta Uniforme

Una variable aleatoria tiene distribución discreta uniforme si su espacio muestral tiene n resultados y cada uno con igual probabilidad

Ejemplo 1 (p. 86):

Sea X la variable aleatoria correspondiente a los resultados posibles, entonces

$$P(X = x) = f(x) = \begin{cases} \frac{1}{6} & \text{si } x = 1, 2, \dots, 6 \\ 0 & \text{para otro } x \end{cases}$$

Media y Varianza de la Distribución Discreta Uniforme

Ejemplo 2 (p. 86):

x	$f(x)$
0	$\frac{1}{5}$
1	$\frac{1}{5}$
2	$\frac{1}{5}$
3	$\frac{1}{5}$
4	$\frac{1}{5}$

$\frac{3}{5}$

Distribución de Bernoulli

Experimento éxito - fracaso. Éxito = p. Fracaso = q = 1 - p.

p es constante. Experimentos independientes

Ejemplo 1 (p. 87):

Sea $p = 0.2$. Para obtener 1, 0, 0, 0, 1

$P(X = 1) = 0.2$ $P(X = 0) = 0.8$

$$(0.2)(0.8)(0.8)(0.8)(0.2) = 0.0205$$

$\therefore P(X=1) \cdot P(X=0) \cdot P(X=0) \cdot P(X=0) \cdot P(X=1) = 2.05\%$

Distribución Binomial

Similar a un experimento de Bernoulli pero ahora es de interés la cantidad de éxitos. Ensayos finitos $= n$

Ejemplo 1 (p. 88):

Sea $N = 8$ y $p = \frac{1}{6}$

X es la variable aleatoria discreta (veces que sale 6)

$x = 0, 1, 2, \ldots, 8$

Entonces

$$P(X = 4) = \binom{8}{4} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^4 \left(\frac{5}{6}\right)^4 = 0.026 = 2.6\%$$

Ejemplo 2 (p. 88):

Sea $N = 20$ y $p = 0.05$

$P(X=0) = \binom{20}{0} \cdot 0.05^0 \cdot 0.95^{20} = 0.3584$

$P(X=1) = \binom{20}{1} \cdot 0.05^1 \cdot 0.95^{19} = 0.3773$

$P(X=0) + P(X=1) = 0.7358$

y como $x = 0, 1, 2, 3, \ldots, 20$

Para conocer $P(X \geq 2) = 1 - P(X < 2) = 1 - (P(X=0) + P(X=1))$

$1 - 0.7358 = 0.2642 \rightarrow 26.42\%$

Demostración

En los n ensayos se han producido x éxitos y $n-x$ fracasos, por lo tanto, siendo ensayos independientes la probabilidad de obtener estos resultados es

$p^x (1-p)^{n-x}$

Pero en los n ensayos realizados hay nCx formas diferentes de obtener los x éxitos y $n-x$ fracasos

Demostración de la función generadora de momentos de la distribución binomial

Tenemos que

$$f(x) = \binom{N}{x} \cdot p^x (1-p)^{N-x}$$

Observamos que coincide con el desarrollo del binomio $(q+p)^N$ que es igual $[(1-p)+p]^N$

Es decir:

$$(q+p)^N = \sum_{x=0}^{N} \binom{N}{x} \cdot p^x \cdot q^{N-x}$$

La función generadora de momentos es:

$$m(t) = E(e^{tx}) = \sum_x e^{tx} f(x) = \sum_x e^{tx} \cdot \binom{N}{x} \cdot p^x \cdot q^{N-x}$$

$$= \sum_x \binom{N}{x} \cdot e^{tx} p^x q^{N-x} = \sum_x \binom{N}{x} (e^t p)^x \cdot q^{N-x}$$

Lo anterior es igual a $[(e^t p) + q]^N$

Distribución Binomial Negativa

Similares a los experimentos binomiales. Ahora la variable de interés se refiere a la cantidad de ensayos que se realizan hasta obtener una cantidad requerida de éxitos: k

Demostración

Cada éxito ocurre con una probabilidad p y cada fracaso con $1-p$. En algún ensayo x se tendrán finalmente k éxitos, obtenida por el producto $p^k (1-p)^{x-k}$

Pero antes de obtener el k-ésimo éxito se realizaron $x-1$ ensayos, de ellos $k-1$ fueron éxitos. Esto puede ocurrir de $\binom{x-1}{k-1}$ formas diferentes

Ejemplo 1 (p. 94):

Tenemos que $p = 0.3$ y $k = 4$ $x = 4, 5, 6, \ldots$, entonces:

$$P(X=10) = \binom{9}{3} \cdot 0.3^4 \cdot (0.7)^6 = 0.08 = 8\%$$

Distribución Geométrica

Caso especial de la binomial negativa cuando $k=1$. O sea hasta el primer éxito

Ejemplo 1 (p. 95):

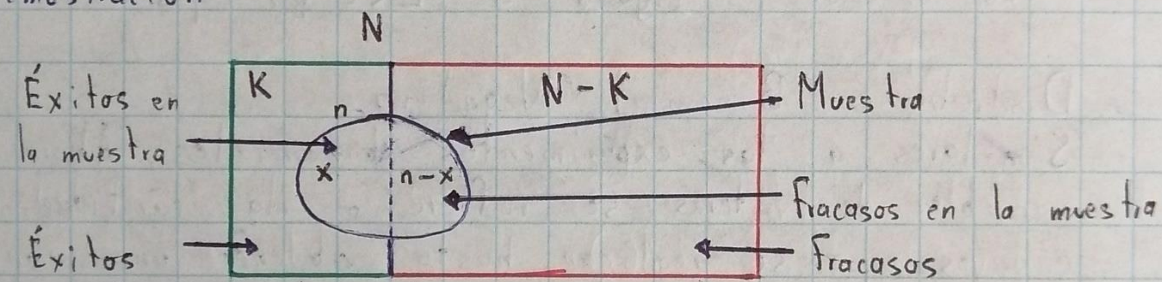
Obtener tres sellos tiene como $p = \frac{1}{8}$ entonces

$$P(X=5) = \left(\frac{1}{8}\right)\left(\frac{7}{8}\right)^4 = 0.073 = 7.3\%$$

Distribución Hipergeométrica

Consiste en tomar muestras sin reemplazo de un conjunto finito con elementos considerados como éxitos y el resto como fracasos

Demostración



Con referencia al gráfico

- $\binom{K}{x}$ es la cantidad total de formas de tomar x éxitos de los K existentes
- $\binom{N-K}{n-x}$ es la cantidad de formas de tomar $n-x$ fracasos de los $N-K$ existentes
- $\binom{N}{n}$ cantidad total de formas de tomar n elementos del conjunto de N elementos

Mediante asignación clásica de probabilidad de eventos obtenemos la fórmula

Ejemplo 1 (p. 97):

Tenemos $N=9$ $n=3$ y $K=4$

a) $$P(X=0) = \frac{\binom{4}{0}\binom{5}{3}}{\binom{9}{3}} = 0.119$$

b) Si $x = 0, 1, 2, 3$ y en a) tenemos $P(X=0)$, aquí piden el complemento, es decir

$1 - 0.119 = 0.881$

c) $P(X=3) = \dfrac{\binom{4}{3}\binom{5}{0}}{\binom{9}{3}} = 0.0476 \rightarrow 1 - 0.0476 = 0.9524$

Aproximación de la Distribución Hipergeométrica con la Distribución Binomial

Si n es muy pequeño respecto a N, se puede usar la fórmula de distribución binomial con $p = \dfrac{K}{N}$

Distribución de Poisson

Modelo para calcular la probabilidad del número de éxitos que ocurren en una región específica, si se conoce el promedio de éxitos que ocurren

Ejemplo 1 (p. 101):

Con $\lambda = 5$

a) $P(X=1) = e^{-5} \cdot 5^{1} = 0.0337 = 3.37\%$

b) $P(X \geq 3) = \dfrac{e^{-5} \cdot 5^{1}}{1} + \dfrac{e^{-5} \cdot 5^{2}}{2} + \dfrac{e^{-5} \cdot 5^{0}}{1}$

$= 0.0012 + 0.0337 + 0.0842 = 0.1247$

y $1 - 0.1247 = 0.8743$

c) Ahora $\lambda = 10$

$P(X \leq 2) = \dfrac{e^{-10} \cdot 10^{0}}{1} + \dfrac{e^{-10} \cdot 10^{1}}{1} + \dfrac{e^{-10} \cdot 10^{2}}{2}$

$= 4.53 \times 10^{-5} + 4.53 \times 10^{-4} + 2.26 \times 10^{-3}$

$= 0.0028 = 0.28\%$

Demostración de la función generadora de momentos de la Distribución de Poisson

Tenemos que

$$f(x) = \frac{e^{-\lambda} \cdot \lambda^x}{x!}$$

La función generadora de momentos es

$$m(t) = E[e^{tx}] = \sum_x e^{tx} f(x) = \sum_x e^{tx} \cdot \frac{e^{-\lambda} \cdot \lambda^x}{x!}$$

$$= e^{-\lambda} \sum_x \frac{(e^t \lambda)^x}{x!}$$

Con el desarrollo de la función exponencial

$$e^y = 1 + y + \frac{y^2}{2!} + \frac{y^3}{3!} + \dots$$

Haciendo $y = e^t \lambda$

$$e^{-\lambda} \cdot e^{e^t \lambda} = e^{\lambda(e^t - 1)}$$

Aproximación de la Distribución Binomial con la Distribución de Poisson

En la distribución binomial, cuando n es grande, no es práctico. Así se usaría Poisson con $\lambda = np$

~~Repaso~~ Repaso Estadística: Tercer Parcial

Variables Aleatorias Continuas

Permiten establecer correspondencia de los resultados obtenidos en experimentos cuyos valores deben medirse en escala continua y los números reales

Ejemplo 1 (p. 105):

a) Es claro que $f(x) \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Luego

$$\int_0^1 \frac{2}{5}(x+2)\,dx = \frac{2}{5}\left(\frac{x^2}{2}+2x\right)\Big|_0^1 = 1$$

b) $$P\left(\tfrac{1}{4} \leq X \leq \tfrac{1}{2}\right) = \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} \frac{2}{5}(x+2)\,dx = \frac{2}{5}\left(\frac{x^2}{2}+2x\right)\Big|_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} = \frac{9}{20} - \frac{17}{80}$$

$$= \frac{19}{80} = 0.2375$$

Función de Distibución

Ejemplo 1 (p. 106):

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = \int_0^x \frac{2}{5}(t+2)\,dt = \frac{2}{5}\left(\frac{t^2}{2}+2t\right)\Big|_0^x$$

$$= \frac{2}{5}\left(\frac{x^2}{2}+2x\right)$$

Esta es:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \frac{2}{5}\left(\frac{x^2}{2}+2x\right) & 0 \leq x \leq 1 \\ 1 & x > 1 \end{cases}$$

Para calcular $P\left(\tfrac{1}{4} \leq X \leq \tfrac{1}{2}\right)$:

$$F\left(\tfrac{1}{2}\right) - F\left(\tfrac{1}{4}\right)$$

$$\frac{9}{20} - \frac{17}{80} = \frac{19}{80} = 0.2375$$

$u = 0.25x$
$du = 0.25dx$

Ejercicio 2 (p. 106):

Tenemos:

$$f(x) = \begin{cases} 0.25e^{-0.25x} & , x > 0 \\ 0 & , \text{otro } x \end{cases} \quad , x \text{ en minutos}$$

$P(X > 5) = 1 - P(X \leq 5)$

$$\int_0^5 0.25e^{-0.25x} dx = -\int_a^b e^u du = -e^u \Big|_a^b = -e^{-0.25x} \Big|_0^5 = -0.28 - (-1)$$

$= 0.7135$

$\therefore P(X > 5) = 1 - 0.7135 = 0.2865$

Media y Varianza de V.A. Continuas

Ejemplo 1 (p. 108):

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \frac{2}{5}(x+2)\, dx = \int_0^1 \frac{2}{5}(x^2 + 2x)\, dx = \frac{2}{5}\left(\frac{x^3}{3} + x^2\right)\Big|_0^1$$

$= \frac{8}{15} - 0 = 0.533$

$$\sigma^2 = E(X-\mu)^2 = E(X^2) - \mu^2 = \int_0^1 x^2 \cdot \frac{2}{5}(x+2)\, dx - \left(\frac{8}{15}\right)^2$$

$= 0.0822$

Propiedades de la Media y la Varianza

Las demostraciones y los corolarios son similares al caso de las V.A. discretas con la diferencia que en lugar de somas, se usan integrales

Valor esperado de expresiones con una V.A.

Ejemplo 1 (p. 109):

$E(g(x)) = E(10 + 5X) = E(10) + E(5X) = 10 + 5E(X)$

$= 10 + 5\left(\frac{8}{15}\right) = 12.667$

Momentos y función generadora de momentos para V.A. continuas

Las definiciones para V.A. discretas se extienden al caso continuo sustituyendo somas por integrales

Distribuciones de Probabilidad Continuas

Distribución Uniforme Continua

Corresponde a una V. A. continua cuyos valores tienen igual probabilidad en un intervalo especificado para la variable

Ejemplo 1 (p. 112):

a) $f(x) = \frac{1}{5-1} = \frac{1}{4} \Rightarrow \int_2^5 \frac{dx}{4} = \frac{x}{4}\Big|_2^5 = \frac{5}{4} - \frac{2}{4} = \frac{3}{4}$

$\therefore P(X \geq 2) = 0.75$

b) $\frac{5+1}{2} = 3$ $\therefore$ $E(X) = 3$ horas

b) $C = g(x) = 100 + 10x^2$

$E(g(x)) = 100 + 10\,E(x^2)$

$= 100 + 10 \int_1^5 x^2 \left(\frac{1}{4}\right) dx = 100 + \frac{10x^3}{12}\Big|_1^5$

$= 100 + 10\left(\frac{31}{3}\right) = \$203.33$

Ejercicio 2 (p. 113):

a) $f(x) = \frac{1}{30}$

$P(X \leq 140) = \int_{130}^{140} \frac{dx}{30} = \frac{140-130}{30} = \frac{10}{30} = \frac{1}{3}$

b) $\frac{160+130}{2} = \frac{290}{2} = 145$ ml

c) $\frac{100}{12} = \frac{50}{6} = \frac{25}{3}$

$V(X) = \frac{25}{3}$ ó 8.333

Distribución Normal

Muy importante con ciertas características

- Es simétrica alrededor de μ
- Su asíntota es el eje horizontal
- Sus puntos de inflexión están en $\mu - \sigma$ y $\mu + \sigma$

Distribución Normal Estándar

Para generalizar y facilitar el cálculo de probabilidad con la distribución normal, conviene definir la distribución obtenida haciendo $\mu = 0$ y $\sigma^2 = 1$

Para calcular probabilidad con la distribución normal estándar se puede usar la definición de la función de distribución

$$F(z) = P(Z \leq z) = \int_{-\infty}^{z} f(t)\,dt = \int_{-\infty}^{z} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2}t^2}\,dt, \quad -\infty < z < +\infty$$

O bien usar tablas con valores de $F(z)$ para algunos valores de z

Ejemplo 1 (p. 116):

a) $P(Z \leq 1.45) = 0.9265$

b) $P(Z \leq -1.45) = 0.0735$

c) $P(Z \geq 1.45) = 1 - 0.9265 = 0.0735$

d) $P(1.25 \leq Z \leq 1.45) = 0.9265 - 0.8944 = 0.0321$

e) $P(Z \leq z) = 0.64$ quiere decir que $z = 0.365$ aproximadamente

Estandarización de la Distribución Normal

Sea X una variable aleatoria con distribución: $X \sim Norm(\mu, \sigma)$

Entonces, la variable $Z = \dfrac{X - \mu}{\sigma}$

Tiene distribución normal estándar $Z \sim Norm(0, 1)$

Ejemplo 1 (p. 117):

a) $Z = \frac{9-10}{2} = -0.5$

$P(Z < -0.5) = 0.3085$

b) $Z = \frac{11-10}{2} = 0.5$, $Z = \frac{12-10}{2} = 1$

$P(0.5 < Z < 1) = 0.8413 - 0.6915 = 0.1498$

Ejemplo 1 (p. 118):

Sabemos que:

$X \sim Norm(10, \sigma)$ y $P(X \leq 9) = 0.025$

Deducimos por tabla que -1.96 es el valor estandarizado de 9 es decir:

$\frac{9-10}{\sigma} = -1.96 \rightarrow \frac{-1}{-1.96} = \sigma \quad \therefore \quad \sigma = 0.5102$

Distribución Gamma

Modelo básico definido como:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\beta^{\alpha}\Gamma(\alpha)} \cdot x^{\alpha-1} \cdot e^{\frac{-x}{\beta}}, & x > 0 \\ 0, & \text{otro } x \end{cases}$$

$\alpha > 0$, $\beta > 0$ son parámetros del modelo

$\Gamma(\alpha)$ es la función gamma que está definida como:

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} dx$$

Si α es un entero positivo, entonces

$\Gamma(\alpha) = (\alpha - 1)!$

Demostración

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} dx$$

Para integrar por partes: $u = x^{\alpha-1} \rightarrow du = (\alpha-1)x^{\alpha-2}dx$

$dv = e^{-x}dx \rightarrow v = -e^{-x}$

Se obtiene:

$$\Gamma(\alpha) = (\alpha-1)\int_0^{\infty} x^{\alpha-2} e^{-x}dx = (\alpha-1)\,\Gamma(\alpha-1)$$

Sucesivamente

$$\Gamma(\alpha) = (\alpha-1)(\alpha-2)(\alpha-3)\ldots\Gamma(1)$$ que $\Gamma(1) = 1$

Media y Varianza para la Distribución Gamma

Ejemplo 1 (p. 124):

a) $f(x) = \frac{1}{16}\cdot x^2 \cdot e^{-\frac{x}{2}}$

$P(X > 8) = 1 - P(X \leq 8)$

$$\frac{1}{16}\int_0^8 x^2 \cdot e^{-\frac{x}{2}}dx \sim \frac{1}{16}\left[-2x^2 e^{-\frac{x}{2}} + 4\left(-2xe^{-\frac{x}{2}} + 2\left(-2e^{-\frac{x}{2}}\right)\right)\right]_0^8$$

$= 0.7619$

$1 - 0.7619 = 0.2381$

$\therefore P(X > 8) = 0.2381$

Distibución Exponencial

Caso particular de la distibución gamma con $\alpha = 1$ en esta distibución

Su gráfico es la típica exponencial decreciente

Problema (p. 126): Con el cambio de que en lugar de instalar 3 componentes, sólo será 1 y se buscará su funcionamiento

$f(x) = \frac{1}{4}\cdot e^{-\frac{x}{4}}$

$$\int_0^6 \frac{1}{4}\cdot e^{-\frac{x}{4}}dx = 0.2231$$

Distibución de Weibull

Se usa para problemas de confiabilidad

Si $\beta = 1$ se reduce a exponencial

Ejemplo 1 (p. 131):

a) $E(X) = \frac{1}{0.1} \cdot 6 = 60$

b) $f(x) = 0.5 \cdot 0.1^{0.5} x^{-0.5} e^{-(0.1x)^{0.5}}$

$\int_0^{300} f(x)\, dx = 0.995$

$\therefore P(X > 300) = 0.005$

Distribución Ji - Cuadrada

Modelo importante en estadística inferencial