Universidad Autónoma
de Aguascalientes

Centro de Ciencias Básicas

Departamento de Matemáticas y Física

Álgebra Lineal

3° "A"

Apuntes

Profesor: Jaime Trujillo Domínguez

Alumno: Joel Alejandro Espinoza Sánchez

12-08-2019

Docente: Jaime Trujillo Dominguez
Materia: Álgebra Lineal

Grossman McGraw Hill $\longrightarrow$ The Best

Sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas
Conceptos fundamentales de la línea recta
Los problemas directos son aquellos en los que los datos conducen directamente a los resultados. Si se conocen los resultados y se buscan los datos que se necesitarían para obtener dichos resultados, es un problema inverso, así:

$$ax + by = \alpha$$
$$cx + dy = \beta$$

Hay que determinar x, y que conducen a α, β dados

Definición: Se llama ecuación lineal en las incógnitas (o indeterminadas) $x_1, x_2, \ldots, x_n$ a una expresión de la forma:

$$\sum_{k=1}^{n} a_k x_k = \bar{b}, \quad a_k \in \mathbb{R}, \quad \forall k = 1, 2, \ldots, n$$

donde a los números a_k se les llama coeficiente de la incógnita x_k, $k = 1, 2, \ldots, n$ y al número $\bar{b}$ se le conoce como término independiente de la ecuación

Ojo:
- Si $\bar{b} = 0$, a la ecuación se le llama homogénea, de lo contrario se dice no homogénea
- Si en la ecuación $n = 2$ se tiene:

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 = \bar{b}$$

que al tomar $a_1 = c$, $a_2 = -d$, $x_1 = x$, $x_2 = y$, es decir se tiene:

$$cx - dy = \bar{b}$$

La ecuación nos queda como la previa, de donde:

$$cx - \bar{b} = dy$$

esto es:

$$y = \frac{c}{d}x - \frac{\bar{b}}{d} \qquad \text{con} \quad d \neq 0$$

Así se tiene que:

$$y = mx + b$$

que es la ecuación de la recta, donde:

$$m = \frac{c}{d}, \qquad b = -\frac{\bar{b}}{d}$$

donde m es la pendiente de la recta y b es la ordenada al origen

Sistemas de dos ecuaciones con dos incógnitas

Si se tienen dos ecuaciones lineales con dos incógnitas que se cumplen al mismo tiempo, podemos verlas como:

✓!

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2$$

como por ejemplo:

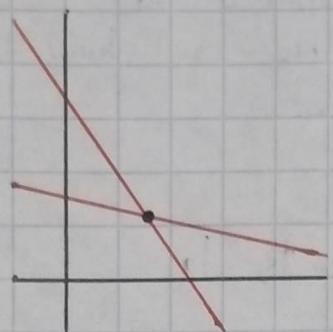
a)
$$x - y = 2$$
$$x + y = 0$$

b)
$$-4a + b = -3$$
$$8a - 2b = 6$$

c)
$$2n + m = -11$$
$$10n + 5m = 30$$

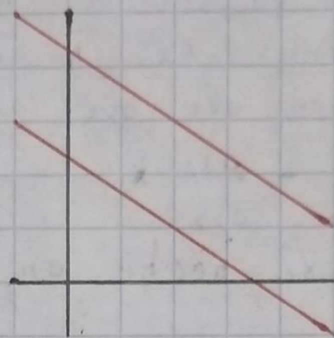
Solución formal y su interpretación geométrica

Cuando resolvemos un sistema de ecuaciones 2×2, la solución se interpretaría de manera que se puede enmarcar en cada uno de los siguientes casos:



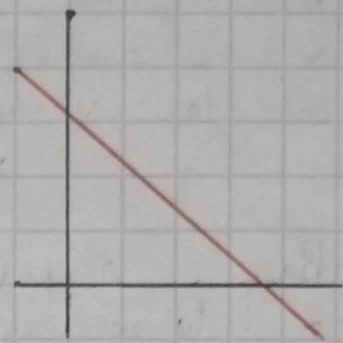
Solución unica

Rectas no paralelas
Una intersección



Sin solución

Rectas paralelas
Sin intersecciones



Numero infinito de soluciones

Rectas que coinciden
Infinitas intersecciones

Para la solución formal del sistema, consideremos;

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2$$

Primero multiplicamos la primera ecuación por $-a_{22}$ y la segunda por a_{12}:

$$-a_{22}(a_{11}x_1 + a_{12}x_2) = -a_{22}(b_1)$$
$$a_{12}(a_{21}x_1 + a_{22}x_2) = a_{12}(b_2)$$

Así:

$$-a_{11}a_{22}x_1 - a_{12}a_{22}x_2 = -a_{22}b_1$$
$$a_{12}a_{21}x_1 + a_{12}a_{22}x_2 = a_{12}b_2$$

Si sumamos ambas ecuaciones, observamos que algunos términos se eliminarán, de modo que resulte:

$$a_{12}a_{21}x_1 - a_{11}a_{22}x_1 = a_{12}b_2 - a_{22}b_1$$

Factorizamos x_1:

$$x_1(a_{12}a_{21} - a_{11}a_{22}) = a_{12}b_2 - a_{22}b_1$$

Que al despejar x_1:

$$x_1 = \frac{a_{12}b_2 - a_{22}b_1}{a_{12}a_{21} - a_{11}a_{22}}$$

siempre que $a_{12}a_{21} - a_{11}a_{22} \neq 0$

Del sistema original, ya sea de la primera o la segunda ecuación, despejamos x_2. En este caso se hará con la segunda ecuación, así que procedemos:

$$x_2 = \frac{b_2}{a_{22}} - \frac{a_{21}}{a_{22}} x_1$$

Bajo el despeje de x_1 hecho anteriormente, lo sustituimos aquí:

$$x_2 = \frac{b_2}{a_{22}} - \frac{a_{21}}{a_{22}} \left(\frac{a_{12} b_2 - a_{22} b_1}{a_{12} a_{21} - a_{11} a_{22}} \right)$$

Realizamos los cálculos pertinentes:

$$x_2 = \frac{b_2}{a_{22}} - \frac{a_{21}(a_{12} b_2 - a_{22} b_1)}{a_{22}(a_{12} a_{21} - a_{11} a_{22})}$$

$$x_2 = \frac{b_2}{a_{22}} \left(\frac{a_{12} a_{21} - a_{11} a_{22}}{a_{12} a_{21} - a_{11} a_{22}} \right) - \frac{a_{21}(a_{12} b_2 - a_{22} b_1)}{a_{22}(a_{12} a_{21} - a_{11} a_{22})}$$

$$x_2 = \frac{b_2(a_{12} a_{21} - a_{11} a_{22}) - a_{21}(a_{12} b_2 - a_{22} b_1)}{a_{22}(a_{12} a_{21} - a_{11} a_{22})}$$

$$x_2 = \frac{\cancel{a_{12} a_{21} b_2} - a_{11} a_{22} b_2 - \cancel{a_{12} a_{21} b_2} + a_{21} a_{22} b_1}{a_{22}(a_{12} a_{21} - a_{11} a_{22})}$$

$$x_2 = \frac{\cancel{a_{22}}(a_{21} b_1 - a_{11} b_2)}{\cancel{a_{22}}(a_{12} a_{21} - a_{11} a_{22})}$$

$$\therefore \quad x_2 = \frac{a_{21} b_1 - a_{11} b_2}{a_{12} a_{21} - a_{11} a_{22}}$$

Así, la solución es:

$$(x_1, x_2) = \left(\frac{a_{12} b_2 - a_{22} b_1}{a_{12} a_{21} - a_{11} a_{22}}, \frac{a_{21} b_1 - a_{11} b_2}{a_{12} a_{21} - a_{11} a_{22}} \right)$$

O lo que es lo mismo:

$$(x_1, x_2) = \left(\frac{a_{22} b_1 - a_{12} b_2}{a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}}, \frac{a_{11} b_2 - a_{21} b_1}{a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}} \right)$$

Ejemplos:

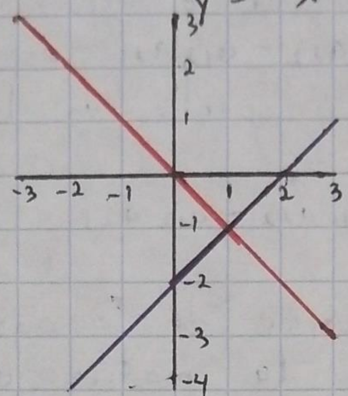
a)

$$x - y = 2$$
$$x + y = 0$$

$(1, 3)$ $(a,b),\ \forall a \in D: f(x),\ \forall b \in \overline{D}: f(x)$

$x - y = 2 \longrightarrow y = x - 2$

$x + y = 0 \qquad y = -x$



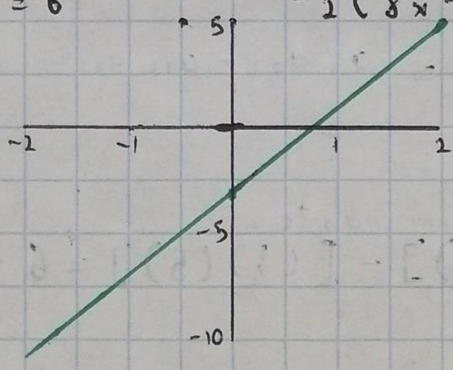
$(1, -1)$

b)

$-4x + y = -3$
$8x - 2y = 6$

$-4x + y = -3 \longrightarrow -4 + y = -3$ despejando $= y = 4x - 3$

$8x - 2y = 6 \qquad -\frac{1}{2}(8x - 2y) = -\frac{1}{2}(6) = y = 4x - 3$



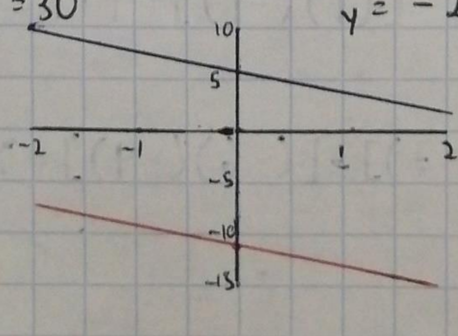
$(x, 4x - 3),\ x \in \mathbb{R}$

c)

$2x + y = -11$
$10x + 5y = 30$

$2x + y = -11 \longrightarrow y = -2x - 11$

$10x + 5y = 30 \qquad y = -2x + 6$



$S = \varnothing$

Definición de determinante de 2×2

En la solución formal del sistema de ecuaciones de 2×2 se vio que el valor $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ es importante. Esta expresión la obtenemos a partir de la "matriz" de coeficientes del sistema:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

Al elemento del lado izquierdo de la igualdad se le conoce como "determinante" de la matriz de coeficientes. Se desarrolla de la siguiente manera:

1.- Se realiza el producto de a_{11} por a_{22}

2.- Se realiza el producto de a_{12} con a_{21} respetando sus signos pero restando un producto en diagonal a otro:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

Ejemplos: Calcular el determinante

a) $\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = [(2)(3)] - [(1)(5)] = 6 - 5 = 1$

b) $\begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 6 & 4 \end{vmatrix} = [(5)(4)] - [(6)(3)] = 20 - 18 = 2$

c) $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = [(1)(1)] - [(1)(-1)] = 1 + 1 = 2$

d) $\begin{vmatrix} -3 & -4 \\ -6 & -7 \end{vmatrix} = [(-3)(-7)] - [(-6)(-4)] = 21 - 24 = -3$

$a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = a_{11}b_2 - a_{21}b_1$

$a_{11}a_{22} - a_{11}b_2 = a_{12}a_{21} - a_{21}b_1$

$a_{11}(a_{22} - b_2) = a_{21}(a_{12} - b_1) \Rightarrow \dfrac{a_{22}-b_2}{a_{12}-b_1} = \dfrac{a_{21}}{a_{11}}$

Condiciones para que la solución del sistema sea única, sea un número infinito o no existan

Llevando el sistema a su forma matricial y que al resolver:

$$\left[\begin{array}{cc|c} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & \frac{a_{12}}{a_{11}} & \frac{b_1}{a_{11}} \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & \frac{a_{12}}{a_{11}} & \frac{b_1}{a_{11}} \\ 0 & \frac{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}{a_{11}} & \frac{a_{11}b_2-a_{21}b_1}{a_{11}} \end{array}\right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & \frac{a_{12}}{a_{11}} & \frac{b_1}{a_{11}} \\ 0 & 1 & \frac{a_{11}b_2-a_{21}b_1}{a_{11}a_{21}-a_{11}a_{22}} \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \frac{a_{22}b_1-a_{12}b_2}{a_{11}a_{21}-a_{11}a_{22}} \\ 0 & 1 & \frac{a_{11}b_2-a_{21}b_1}{a_{11}a_{21}-a_{11}a_{22}} \end{array}\right]$$

En el tercer paso se tiene:

$$\frac{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}{a_{11}}, \quad \frac{a_{11}b_2-a_{21}b_1}{a_{11}}$$

Dichas cantidades son cero si:

$$a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}=0, \quad a_{11}b_2-a_{21}b_1=0$$

De donde la última igualdad implica que:

✓!

$$\frac{b_2}{b_1} = \frac{a_{21}}{a_{11}}$$

Ojo:

- Si $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21} \neq 0$, el sistema tiene solución única
- Si $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21} = 0$ y $\dfrac{b_2}{b_1} = \dfrac{a_{21}}{a_{11}}$, el sistema tiene un número infinito de soluciones
- Si $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21} = 0$ y $\dfrac{b_2}{b_1} \neq \dfrac{a_{21}}{a_{11}}$, el sistema no tiene solución

Ejemplos:

a) $x - y = 2$

$x + y = 0$

$a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21} = (1)(1)-(-1)(1) = 1+1 = 2$

El sistema tiene solución única

b) $-4x + y = -3$
$8x - 2y = 6$

$$a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = (-4)(-2) - (1)(8) = 8 - 8 = 0$$

y $\frac{b_2}{b_1} = \frac{a_{21}}{a_{11}} \rightarrow \frac{6}{-3} = -2 = \frac{8}{-4}$

Por tanto, el sistema tiene un nomero infinito de soluciones

c) $2x + y = -11$
$10x + 5y = 30$

$$a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = (2)(5) - (1)(10) = 10 - 10 = 0$$

y $\frac{b_2}{b_1} = \frac{a_{21}}{a_{11}} \rightarrow \frac{30}{-11} \approx -2.727273 \neq 5 = \frac{10}{2}$

Por tanto, el sistema no tiene solución

19-08-2019

Vectores y Matrices

Definición de vectores y matrices

Su estudio inicia con Sir William Hamilton que, al querer representar ciertos objetos en el plano ($\mathbb{R}^2$) y el espacio ($\mathbb{R}^3$) lo llevó a descubrir los cuaterniones. Ramas como la física clásica y moderna, e incluso la Biología y las Ciencias Sociales se emplea el lenguaje de los vectores

Definición: Al arreglo con n números de la forma $[x_1, x_2, \dots, x_n]$, $x_k \in \mathbb{R}$, $k = 1, 2, \dots, n$ se le conoce como vector renglón

Ojo:

- Si el arreglo es de la forma

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

el vector es conocido como vector columna

- A los números $x_k \in \mathbb{R}^n$, $k = 1, 2, \dots, n$ se les conoce como las coordenadas del vector
- Se utiliza a $\mathbb{R}^n$ para denotar al conjunto de vectores con n componentes

Definición: Sean $x, y \in \mathbb{R}^n$, entonces $x = [x_1, x_2, \dots x_n]$, $y = [y_1, y_2, \dots, y_n]$. Se dice que x es igual a y si y sólo si $x_1 = y_1, x_2 = y_2, \dots, x_n = y_n$

En símbolos:

$$x = y \text{ si y sólo si } x_k = y_k; \ \forall k = 1, 2, \dots, n$$

Definición: A un arreglo rectangular de mn números dispuestos en m renglones y n columnas como:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

donde $a_{ij} \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2, \ldots, m$, $j = 1, 2, \ldots, n$, se le llama matriz

Ojo:
- A los números $a_{ij} \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2, \ldots, m$, $j = 1, 2, \ldots, n$ se les conoce como elementos (o entradas) de la matiz
- El elemento a_{ij} se encuentra en el i-ésimo renglón y en la j-ésima columna
- Se utilizan letras mayúsculas (las primeras del alfabeto) para representar matices y minúsculas (las primeras del alfabeto) para sus elementos
- Se utiliza a $\mathbb{M}_{m \times n}$ para denotar al conjunto de las matices vectores con mn entradas
- Se utiliza $[a_{ij}]$ $i = 1, 2, \ldots, m$, $j = 1, 2, \ldots, n$ para representar a la matiz A de manera compacta

! - Si $m > n$ se dice que la matiz es rectangular y si $m = n$ se dice que es cuadrada

Definición: Sean $A, B \in \mathbb{M}_{m \times n}$
Se dice que $A = B$ si y sólo si $a_{ij} = b_{ij}$, $\forall i = 1, 2, \ldots, m$, $j = 1, 2, \ldots, n$

Operaciones de vectores y matices

Definición: Sean $A, B \in \mathbb{M}_{m \times n}$
La suma de A con B es la matiz $A + B \in \mathbb{M}_{m \times n}$ dada por:

$$A + B = [a_{ij}] + [b_{ij}] = [a_{ij} + b_{ij}]$$
$$\forall i = 1, 2, \ldots, n, \ j = 1, 2, \ldots, n$$

Esto es:

$$A+B=\begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \dots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \dots & a_{2n}+b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \dots & a_{mn}+b_{mn} \end{bmatrix}$$

Ejemplos: Sumar las matrices dadas a continuación

1.- $A=\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}, \quad B=\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$

$$=\begin{bmatrix} 1+(-1) & -1+1 \\ 2+0 & 2+(-3) \end{bmatrix}$$

$$\therefore \quad A+B=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

2.- $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad B=\begin{bmatrix} -1 & 5 & -2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

$$=\begin{bmatrix} 1+(-1) & 2+5 & 3+(-2) \\ -1+2 & 0+2 & 2+1 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \quad A+B=\begin{bmatrix} 0 & 7 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

3.- $A=\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}, \quad B=\begin{bmatrix} -1 & 5 & -2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

Definición: Sean $A \in M_{m\times n}$ y $\alpha \in R$

El producto de la matiiz A con el escalar α, que denotamos con $\alpha A \in M_{m\times n}$ es la matiiz dada por:

$$\alpha A = \alpha [a_{ij}] = [\alpha a_{ij}]$$

$$\forall i = 1, 2, \dots, m, \quad j = 1, 2, \dots, n$$

Esto es:

$$\alpha A = \begin{bmatrix} \alpha a_{11} & \alpha a_{12} & \cdots & \alpha a_{1n} \\ \alpha a_{21} & \alpha a_{22} & \cdots & \alpha a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha a_{m1} & \alpha a_{m2} & \cdots & \alpha a_{mn} \end{bmatrix}$$

Ejemplos: Realizar el producto para A y α dados

1.- $\alpha = 2$, $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ -2 & 1 & 4 \end{bmatrix}$

$$= 2\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ -2 & 1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2(1) & 2(3) & 2(0) \\ 2(-2) & 2(1) & 2(4) \end{bmatrix}$$

$$\therefore \quad 2A = \begin{bmatrix} 2 & 6 & 0 \\ -4 & 2 & 8 \end{bmatrix}$$

2.- $\alpha = 3$, $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 7 & 2 \end{bmatrix}$

$$= 3\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 7 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3(2) & 3(-1) & 3(1) \\ 3(3) & 3(7) & 3(2) \end{bmatrix}$$

$$\therefore \quad 3A = \begin{bmatrix} 6 & -3 & 3 \\ 9 & 21 & 6 \end{bmatrix}$$

3.- $\alpha = -4$, $A = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 5 \\ -2 & 4 & 6 \end{bmatrix}$

$$= -4\begin{bmatrix} -3 & 0 & 5 \\ -2 & 4 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4(-3) & -4(0) & -4(5) \\ -4(-2) & -4(4) & -4(6) \end{bmatrix}$$

$$\therefore \quad -4A = \begin{bmatrix} 12 & 0 & -20 \\ 8 & -16 & -24 \end{bmatrix}$$

Ejemplos: Para $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ -2 & 1 & 4 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 7 & 2 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 5 \\ -2 & 4 & 6 \end{bmatrix}$

calcular:

1.- $A - B$

$$\begin{bmatrix} -1 & 4 & -1 \\ -5 & -6 & 2 \end{bmatrix}$$

2.- $A + 2C - 3B$

$$\begin{bmatrix} -11 & 6 & 7 \\ -15 & -12 & 10 \end{bmatrix}$$

3.- $2A - 3B + 4C$

$$\begin{bmatrix} -16 & 9 & 17 \\ -21 & -3 & 26 \end{bmatrix}$$

4.- $3A - 2C$

$$\begin{bmatrix} 9 & 9 & -10 \\ -2 & -5 & 0 \end{bmatrix}$$

Ojo:

- Si consideramos $X \in M_{1xn}$, $X = [x_1 \quad x_2 \quad \dots \quad x_n]$, en este caso $M_{1xn} = R^n$
- Si consideramos $X \in M_{nx1}$,

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

tambien, en este caso $M_{nx1} = R^n$

- Las definiciones de las operaciones dadas para matrices son válidas para este tipo especial de matrices, que en realidad son vectores

Definición: Sean $X, Y \in R^n$

La suma de X con Y es el vector $X + Y \in R^n$ dado por:

$$X + Y = [x_1 + y_1 \quad x_2 + y_2 \quad \dots \quad x_n y_n]$$

Ejemplos:

1.- $X = [1, -1, 1]$, $Y = [-2, 3, 1]$

$$X + Y = [-1, 2, 2]$$

2.- $X = [-2, -3]$, $Y = [1, 2]$

$$X + Y = [-1, -1]$$

3.- $X = [1, 0, -1, 1, 5]$, $Y = [-2, 5, -3, 2, -1]$

$$X + Y = [-1, 5, -4, 3, 4]$$

Definición: Sean $X \in R^n$ y $\alpha \in R$
El producto del vector X con el escalar α que denotaremos con $\alpha X \in R^n$ es el vector dado por:

$$\alpha X = \alpha [x_1, x_2, \dots x_n] = [\alpha x_1, \alpha x_2, \dots \alpha x_n]$$

Ejemplos: Realizar las operaciones para:

$$X = [-2, 1, 3], \quad Y = [2, 1, 1], \quad Z = [-\sqrt{2}, 0, 1]$$

1.- $X - Z$

$$X - Z = [\sqrt{2} - 2, 1, 2]$$

2.- Determinar W tal que $Y = 2W + X - Z$

$$[2, 1, 1] = 2 \cdot [w_1 + w_2 + w_3] + [-2, 1, 3] + (-1) \cdot [-\sqrt{2}, 0, 1]$$

$$[2, 1, 1] = [2w_1 + 2w_2 + 2w_3] + [\sqrt{2} - 2, 1, 2]$$

$$[2, 1, 1] = [2w_1 + \sqrt{2} - 2, \ 2w_2 + 1, \ 2w_3 + 2]$$

Así:

$$2w_1 + \sqrt{2} - 2 = 2$$

$$2w_2 + 1 = 1$$

$$2w_3 + 2 = 1$$

$$W = \left[\frac{4 - \sqrt{2}}{2}, 0, -\frac{1}{2} \right]$$

Propiedades de los vectores y las matrices

Las propiedades de los vectores se describen a continuación:

J! Sea $X, Y, W \in R^n$ y $\alpha, \beta \in R$ arbitrarios dados, luego se cumple que:

1. $X + Y = Y + X$
2. $X + (Y + Z) = (X + Y) + Z$
3. $\exists!\, 0 \in R^n \ni X + 0 = X$
4. $\exists!\, (-X) \in R^n \ni X + (-X) = 0$
5. $\alpha (X + Y) = \alpha X + \alpha Y$
6. $(\alpha + \beta) X = \alpha X + \beta X$
7. $\alpha (\beta X) = (\alpha \beta) X$
8. $1 (X) = X$

Las propiedades de las matrices se enuncian a continuación:

Sea $A, B, C \in M_{m \times n}$ y $\alpha, \beta \in R$ arbitrarios dados, luego se cumple que:

1. $A + B = B + A$
2. $A + (B + C) = (A + B) + C$
3. $\exists!\, 0 \in M_{m \times n} \ni A + 0 = A$
4. $\exists!\, (-A) \in M_{m \times n} \ni A + (-A) = 0$
5. $\alpha (A + B) = \alpha A + \alpha B$
6. $(\alpha + \beta) A = \alpha A + \beta A$
7. $\alpha (\beta A) = (\alpha \beta) A$
8. $1 (A) = A$

Producto vectorial y matricial

J! Definición: Sean $X, Y \in R^n$ el producto escalar (o de punto o interno) que denotamos $X \cdot Y$, es dado por:

$$X \cdot Y = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k$$

Nota: Si $X, Y \in R^3$ entonces:

$$X \cdot Y = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3$$

√! **Ojo:** $\hat{\imath}\cdot\hat{\imath} = 1, \quad \hat{\jmath}\cdot\hat{\jmath} = 1 \quad \hat{k}\cdot\hat{k} = 1$

$$\hat{\imath}\cdot\hat{\jmath} = \hat{\jmath}\cdot\hat{k} = \hat{k}\cdot\hat{\imath} = 0$$

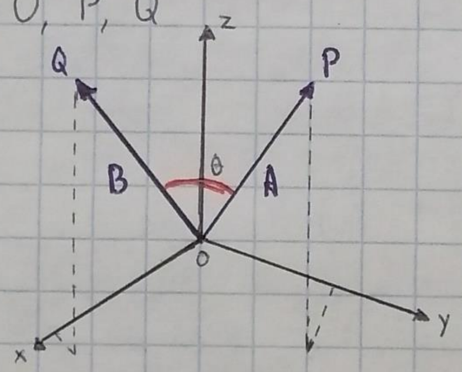
Teorema: Sean $X, Y \in \mathbb{R}^n$, entonces:

- $X \cdot Y = Y \cdot X$
- $(X + Y)\cdot W = X\cdot W + Y \cdot W, \ \forall\, W \in \mathbb{R}^n$

Teorema: Sean $X, Y \in \mathbb{R}^n$ y $\alpha \in \mathbb{R}$, entonces

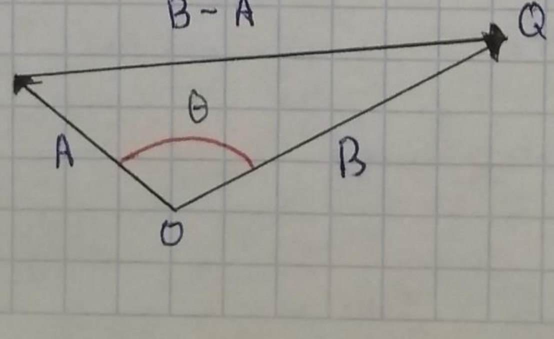
- $\alpha(X \cdot Y) = (cX)\cdot Y = X \cdot cY$
- $0 \cdot X = 0$
- $X \cdot X = \|X\|^2$

Definición: Sean $A, B \in \mathbb{R}^3$ no nulos
El ángulo entre los vectores A y B es el ángulo de medida positiva entre A y B e interior al triángulo determinado por O, P, Q



Teorema: Si θ es el ángulo entre los vectores A y B, ambos no nulos, entonces:

$$A \cdot B = \|A\|\,\|B\| \cos(\theta)$$

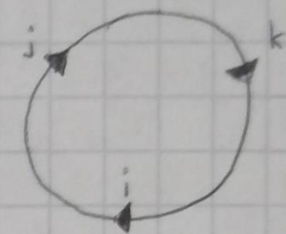


Existe otro producto de vectores que es exclusivo de R^3

! **Definición:** $\hat{i}\times\hat{i}=0$, $\hat{j}\times\hat{j}=0$, $\hat{k}\times\hat{k}=0$

$\hat{i}\times\hat{j}=\hat{k}$, $\hat{j}\times\hat{k}=\hat{i}$, $\hat{k}\times\hat{i}=\hat{j}$

$\hat{j}\times\hat{i}=-\hat{k}$, $\hat{k}\times\hat{j}=-\hat{i}$, $\hat{i}\times\hat{k}=-\hat{j}$



De esta manera, si $A, B \in R^3$, entonces:

$$A\times B=\langle a_2b_3-a_3b_2,\ a_3b_1-a_1b_3,\ a_1b_2-a_2b_1\rangle$$

! **Nota:** El producto cruz también se denomina producto vectorial o producto exterior

Ojo:
$$A\times B=\langle a_2b_3-a_3b_2,\ a_3b_1-a_1b_3,\ a_1b_2-a_2b_1\rangle$$
$$=\begin{vmatrix} a_2 & a_3\\ b_2 & b_3\end{vmatrix}\hat{i}-\begin{vmatrix} a_1 & a_3\\ b_1 & b_3\end{vmatrix}\hat{j}+\begin{vmatrix} a_1 & a_2\\ b_1 & b_2\end{vmatrix}\hat{k}$$
$$=\begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\end{vmatrix}$$

Teorema: Sea $A\in R^3$ entonces:
- $A\times A=0$
- $0\times A=0$
- $A\times 0=0$

! **Teorema:** Sean $A, B\in R^3$ entonces:

$$A\times B=-(B\times A)$$

Teorema: Sean $A, B, C\in R^3$ entonces:

$$A\times(B+C)=(A\times B)+(A\times C)$$

! **Teorema:** Sean $A, B, C \in \mathbb{R}^3$ entonces

$$A \times (B \times C) = (A \cdot C)B - (A \cdot B)C$$
$$(A \times B) \times C = (A \cdot C)B - (B \cdot C)A$$

Teorema: Sean $A, B \in \mathbb{R}^3$ y $c \in \mathbb{R}$ entonces

- $(cA) \times B = A \times (cB)$
- $(cA \times B = c(A \times B)$

Teorema: Sean $A, B \in \mathbb{R}^3$ y θ el ángulo entre A y B, entonces:

$$\|A \times B\| = \|A\| \, \|B\| \operatorname{sen}(\theta)$$

Teorema: Sean $A, B \in \mathbb{R}^3$, A y B son paralelos si y sólo si $A \times B = 0$

√! **Teorema:** Sean $A, B \in \mathbb{R}^3$, $A \times B$ es ortogonal a A y a B

Para desarrollar el producto entre matrices, nos apoyaremos en el producto escalar, teniendo como ventaja el hecho de que: Si $X, Y \in \mathbb{R}^n$ donde X es un vector renglón y Y es un vector columna, entonces:

$$X \cdot Y = [x_1, x_2, \dots, x_n] \cdot \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k$$

Ahora también del hecho de que a la matriz $A \in M_{m \times p}$ la podemos ver como:

$$A = \begin{bmatrix} [a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1p}] \\ [a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2p}] \\ & \vdots & & \\ [a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mp}] \end{bmatrix}$$

Así como la matiiz $B \in M_{p\times n}$ también la podemos ver como:

$$B = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ \vdots \\ b_{p1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{12} \\ b_{22} \\ \vdots \\ b_{p2} \end{bmatrix} \cdots \begin{bmatrix} b_{1n} \\ b_{2n} \\ \vdots \\ b_{pn} \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

Podemos ver que la matiiz A tiene m renglones, los cuales, cada uno tiene p componentes.

√! Ojo: Si realizamos el producto escalar del i-ésimo renglón de la matilz A, A_i, con la j-ésima columna de la matiiz B, B_j, se tiene:

$$A_i \cdot B_j = [a_{i1} \quad a_{i2} \dots a_{ip}] \cdot \begin{bmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \vdots \\ b_{pj} \end{bmatrix} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik} b_{kj}$$

! Definición: Sean $A \in M_{m\times p}$ y $B \in M_{p\times n}$
El producto de A con B es la matriz $C \in M_{p\times n}$, que denotamos como $C = AB$, dada por:

$$C = AB = \left[\sum_{k=1}^{p} a_{ik} b_{kj}\right]_{\substack{i=1,2,\dots,m \\ j=1,2,\dots,n}}$$

Esto es:

$$C = AB = \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^{p} a_{1k} b_{k1} & \sum_{k=1}^{p} a_{1k} b_{k2} & \cdots & \sum_{k=1}^{p} a_{1k} b_{kn} \\ \sum_{k=1}^{p} a_{2k} b_{k1} & \sum_{k=1}^{p} a_{2k} b_{k2} & \cdots & \sum_{k=1}^{p} a_{2k} b_{kn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ \sum_{k=1}^{p} a_{mk} b_{k1} & \sum_{k=1}^{p} a_{mk} b_{k2} & \cdots & \sum_{k=1}^{p} a_{mk} b_{kn} \end{bmatrix}$$

Teorema: Sean A, B, C matrices de orden tales que las operaciones indicadas tienen sentido, y $\alpha \in \mathbb{R}$, arbitrarios dados. Entonces se cumple que:

1.- $A(BC) = (AB)C$

2.- $A(B+C) = AB + AC$

3.- $(A+B)C = AC + BC$

4.- $\alpha(AB) = (\alpha A)B = A(\alpha B)$

5.- $IA = AI = A$, con I la matriz identidad

6.- $0A = A0 = 0$, con 0 la matriz nula

Demostración:

1.- Para la demostración primero vemos que con un poco de álgebra se prueba que:

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}\left(\sum_{s=1}^{p} b_{ks} c_{sj}\right) = \sum_{s=1}^{p}\left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{ks}\right) c_{sj}$$

Luego:

$$A(BC) = \left[\sum_{k=1}^{n} a_{ik}\left(\sum_{s=1}^{p} b_{ks} c_{sj}\right)\right] = \left[\sum_{s=1}^{p}\left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{ks}\right) c_{sj}\right] = (AB)C$$

2.-
$$A(B+C) = \left[\sum_{k=1}^{n} a_{ik}(b_{kj} + c_{kj})\right] = \left[\sum_{k=1}^{n}(a_{ik} b_{kj} + a_{ik} c_{kj})\right]$$
$$= \left[\sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} + \sum_{k=1}^{n} a_{ik} c_{kj}\right]$$
$$= \left[\sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}\right] + \left[\sum_{k=1}^{n} a_{ik} c_{kj}\right]$$
$$\therefore A(B+C) = AB + AC$$

3.- Es semejante a la anterior

4.-

$$\alpha(AB) = \alpha \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} = \sum_{k=1}^{n} \alpha(a_{ik} b_{kj}) = \sum_{k=1}^{n} (\alpha a_{ik}) b_{kj} = (\alpha A)B$$

Y como:

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha(a_{ik} b_{kj}) = \sum_{k=1}^{n} (a_{ik} b_{kj})\alpha = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}(b_{kj}\alpha) = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}(\alpha b_{kj}) = A(\alpha B)$$

$$\therefore \alpha AB = (\alpha A)B = A(\alpha B)$$

! 5.- Es trivial

! 6.- Es trivial

QED

Matrices Especiales

Sea $A \in M_{m\times n}$,

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

1.- Si $m \neq n$ a esta matriz se le dice matriz rectangular

2.- Si $m = n$ a esta matriz se le dice matriz cuadrada

3.- Si $a_{ij} = 0$, $i > j$, $i = 1, 2, \ldots, m$, $j = 1, 2, \ldots, n$, esto es:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

A esta matriz se le conoce como matriz triangular superior

4.- Si $a_{ij} = 0$, $i < j$, $i = 1, 2, \ldots, m$, $j = 1, 2, \ldots, n$, esto es:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

A esta matiiz se le conoce como matiiz tiiangular inferior

5.- Si $a_{ij} \neq 0$ $i=j$, $i=1,2,\ldots,m$, $j=1,2,\ldots,n$, esto es:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

A esta matiiz se le conoce como matiiz diagonal

Nótese que esta matriz es a la vez tiiangular supeiior y tiiángular infeiior

✓! 6.- Si en una matiiz diagonal $a_{ii} = \alpha$, $i=j$, $i=1,2,\ldots,m$

$$A = \begin{bmatrix} \alpha & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \alpha & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \alpha \end{bmatrix}$$

A esta matriz se le conoce como matriz escalar

Ojo:

- Si en la matiiz escalar, $\alpha = 1$, la matriz es conocida como matiiz identidad y se representa con I. Asi

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

- Si en la matriz escalar, $\alpha = 0$, la matiiz es conocida como matiiz nula y se representa con 0. Asi

$$0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

! Un tipo especial de matriz es la siguiente:
Sea $A \in M_{n \times n}$
Si se cumple que $A^{k+1} = A$, siendo $k \in \mathbb{Z}^+$, a la matriz se le llama matriz periódica y se dice que k es el periodo

Ojo: Si $k=1$, esto es $A^2 = A$ la matriz se dice idempotente

Ejemplos:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

! Otro tipo especial de matriz es la siguiente:
Sea $A \in M_{n \times n}$
Si se cumple que $A^p = 0$, siendo $p \in \mathbb{Z}^+$ (el mínimo entero), a la matriz se le llama matriz nilpotente de índice p

Ejemplos:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ j & 0 & 0 \\ 1-j & -j & 0 \end{bmatrix}$$

7.- Sea $A \in M_{m \times n}$. A la matriz que se obtiene a partir de A al cambiar sus renglones por sus columnas se le conoce como matriz transpuesta y se denota con A^t
Esto es:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

!

$$A^t = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} & \cdots & a \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} & \cdots & a \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a \end{bmatrix}$$

Ejemplos: Determinar la matiz transpuesta de las dadas:

a) $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$

$A^t = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ $B^t = \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$

b) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$

$A^t = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & -3 \end{bmatrix}$, $B^t = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & -2 \end{bmatrix}$

c) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 3 & 2 \\ 3 & 4 & 5 & 3 \end{bmatrix} \rightarrow A^t = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

Teorema: Sean $A, B \in M_{m \times n}$
Se cumple que $(A + B)^t = A^t + B^t$

Demostración:

$$A + B = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{2n}+b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{bmatrix}$$

Luego:

$$(A+B)^t = \begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{21}+b_{21} & \cdots & a_{m1}+b_{m1} \\ a_{12}+b_{12} & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{m2}+b_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n}+b_{1n} & a_{2n}+b_{2n} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{21} & \cdots & b_{m1} \\ b_{12} & b_{22} & \cdots & b_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{1n} & b_{2n} & \cdots & b_{mn} \end{bmatrix}$$

$$\therefore (A+B)^t = A^t + B^t$$

QED

Teorema: Sean $A \in M_{m \times p}$ y $B \in M_{p \times n}$

Se cumple que $(AB)^t = B^t A^t$

Demostración:

Vemos que:

$$AB = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mp} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{p1} & b_{p2} & \cdots & b_{pn} \end{bmatrix}$$

Así

$$AB = \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^{p} a_{1k}b_{k1} & \sum_{k=1}^{p} a_{1k}b_{k2} & \cdots & \sum_{k=1}^{p} a_{1k}b_{kn} \\ \sum_{k=1}^{p} a_{2k}b_{k1} & \sum_{k=1}^{p} a_{2k}b_{k2} & \cdots & \sum_{k=1}^{p} a_{2k}b_{kn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{k=1}^{p} a_{mk}b_{k1} & \sum_{k=1}^{p} a_{mk}b_{k2} & \cdots & \sum_{k=1}^{p} a_{mk}b_{kn} \end{bmatrix}$$

$$(AB)^t = \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^{p} a_{1k}b_{k1} & \sum_{k=1}^{p} a_{2k}b_{k1} & \cdots & \sum_{k=1}^{p} a_{mk}b_{k1} \\ \sum_{k=1}^{p} a_{1k}b_{k2} & \sum_{k=1}^{p} a_{2k}b_{k2} & \cdots & \sum_{k=1}^{p} a_{mk}b_{k2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{k=1}^{p} a_{1k}b_{kn} & \sum_{k=1}^{p} a_{2k}b_{kn} & \cdots & \sum_{k=1}^{p} a_{mk}b_{kn} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^{p} b_{k1}a_{1k} & \sum_{k=1}^{p} b_{k1}a_{2k} & \cdots & \sum_{k=1}^{p} b_{k1}a_{mk} \\ \sum_{k=1}^{p} b_{k2}a_{1k} & \sum_{k=1}^{p} b_{k2}a_{2k} & \cdots & \sum_{k=1}^{p} b_{k2}a_{mk} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{k=1}^{p} b_{kn}a_{1k} & \sum_{k=1}^{p} b_{kn}a_{2k} & \cdots & \sum_{k=1}^{p} b_{kn}a_{mk} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} b_{11} & b_{21} & \cdots & b_{p1} \\ b_{12} & b_{22} & \cdots & b_{p2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{1n} & b_{2n} & \cdots & b_{pn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1p} & a_{2p} & \cdots & a_{mp} \end{bmatrix} = B^t A^t$$

$$\therefore (AB)^t = B^t A^t$$

QED

Definición de matriz inversa y sus propiedades

Definición: Sea $A \in M_{n\times n}$. Si $B \in M_{n\times n}$ es tal que $AB = BA = I$ se dice que A es invertible y que B es la inversa de A, la cual se denota como A^{-1}

Ejemplos:

a) $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$, $A^{-1} = \begin{bmatrix} 5/14 & -1/14 \\ -1/14 & 3/14 \end{bmatrix}$

b) $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$, $B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1/4 \\ 2 & -1 & 1/4 \\ 0 & 0 & 1/4 \end{bmatrix}$

Teorema: Sea $A \in M_{n\times n}$
Si A es invertible, entonces su inversa es única

Demostración:
Por contradicción
Supongamos que A es invertible y que la inversa de A no es única
S.P.G. Supongamos que B, C son inversas de A y que $B \neq C$
Como B es la inversa de A, entonces $AB = BA = I$
De manera semejante se tiene para C $AC = CA = I$
Nótese que $C = CI = C(AB) = (CA)B = IB = B$

$$\therefore B = C$$

Contradiciendo el hecho de que $B \neq C$
Así, la inversa de A es única

QED

Corolario: Sea $A \in M_{n\times n}$
Si A es invertible, su inversa también es invertible y $(A^{-1})^{-1} = A$

Demostración:
Supongamos que A es invertible, luego:

$$\exists A^{-1} \ni AA^{-1} = A^{-1}A = I$$

De este hecho se infiere que A^{-1}, es de esperarse que la inversa sea $(A^{-1})^{-1}$, sólo hay que ver que $(A^{-1})^{-1} = A$
Para ello partimos del hecho de que:

$$(A^{-1})^{-1} = (A^{-1})^{-1} I = (A^{-1})^{-1}[A^{-1}A] = [(A^{-1})^{-1}A^{-1}]A = IA = A$$

$$\therefore (A^{-1})^{-1} = A$$

QED

Teorema: Sean $A, B \in M_{n \times n}$
Si A, B son invertibles, entonces AB también es invertible
y $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

Demostración:
Supongamos que A, B son invertibles. Luego se tiene que
$AA^{-1} = A^{-1}A = I$ y $BB^{-1} = B^{-1}B = I$
Nótese que:
- $I = AA^{-1} = A(IA^{-1}) = A(BB^{-1}A^{-1}) = (AB)(B^{-1}A^{-1})$
- $I = B^{-1}B = B^{-1}(IB) = B^{-1}(A^{-1}AB) = (B^{-1}A^{-1})(AB)$

Hemos visto que $(AB)(B^{-1}A^{-1}) = (B^{-1}A^{-1})(AB = I$
Lo cual implica que la matriz AB es invertible
De manera natural se infiere que la inversa es $(AB)^{-1}$
Sólo falta ver que $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$, para ello notemos que:

$$
\begin{aligned}
(AB)^{-1} &= (AB)^{-1}I = (AB)^{-1}[(AB)(B^{-1}A^{-1})] \\
&= [(AB)^{-1}(AB)](B^{-1}A^{-1}) \\
&= I(B^{-1}A^{-1}) \\
&= B^{-1}A^{-1}
\end{aligned}
$$

$$\therefore (AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

QED

28-08-2019

Sistemas de m ecuaciones lineales con n incógnitas

Definición de sistema de m ecuaciones lineales con n incógnitas

Al conjunto de m ecuaciones lineales como:

$$
\begin{aligned}
E_1 &\quad a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\
E_2 &\quad a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\
&\quad \vdots \\
E_m &\quad a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m
\end{aligned}
$$

donde $a_{ij}, b_i \in \mathbb{K}$, $\forall i = 1, 2, \dots, m$, $j = 1, 2, \dots, n$ dados se le llama sistema de m ecuaciones lineales en las n incógnitas $x_1, x_2, \dots, x_n$

Ojo:

- El conjunto K puede ser R o C
- A los valores $x_i \in K$, $i = 1, 2, \dots, n$ se les llama solución del sistema si estos números satisfacen todas y cada una de las m ecuaciones
- El sistema anterior se puede representar en términos de matices y vectores como:

Sistemas Equivalentes

Definición: Se dice que dos sistemas de ecuaciones lineales son equivalentes si ambos poseen el mismo número de ecuaciones e incógnitas y poseen también el mismo conjunto solución

Ejemplos:

1- $\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = -1 \\ x_3 = 4 \end{cases}$ y $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - 5x_3 = -21 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 = 12 \\ 5x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 23 \end{cases}$ son equivalentes

2- $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 = 7 \\ x_1 + x_2 = 3 \end{cases}$, $\begin{cases} x_1 + x_2 = 3 \\ -x_2 = -2 \end{cases}$ y $\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 2 \end{cases}$ son equivalentes

3: $\begin{matrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{matrix}$ y $\begin{matrix} -a_{11}a_{22}x_1 - a_{12}a_{22}x_2 = a_{22}b_1 \\ a_{12}a_{21}x_1 + a_{12}a_{22}x_2 = a_{12}b_2 \end{matrix}$ son equivalentes

Conjunto solución de un Sistema de Ecuaciones

Definición: Consideremos el sistema

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} \qquad (*)$$

Una solución es el vector:

$$s = \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ \vdots \\ s_n \end{bmatrix}$$

en R^n tal que $As = B$

Al conjunto de todas las soluciones del sistema $(*)$, denotado con S, se le llama conjunto solución del sistema

Ejemplos:

1: $s = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ es solución de $\begin{matrix} x + y = 3 \\ x - y = 1 \end{matrix}$

2: $s_1 = \begin{bmatrix} -6 \\ 2 \\ 7 \end{bmatrix}$ y $s_2 = \begin{bmatrix} 8 \\ -4 \\ -3 \end{bmatrix}$ son de las muchas soluciones del sistema $\begin{matrix} 2x + 3y + z = 1 \\ x - y + 2z = 6 \end{matrix}$

Así, para los ejemplos anteriores:

1: $S = \left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$

2: $S = \left\{ \left(\frac{19}{5} - \frac{7z}{5}, -\frac{11}{5} + \frac{3z}{5}, z \right) \middle| z \in R \right\}$

Método de Eliminación Gaussiana

Consiste en llevar un sistema de ecuaciones a un sistema equivalente que sea más sencillo de resolver.
Para tal efecto, utilizaremos tres operaciones básicas a realizarse en el sistema:

1.- Se puede intercambiar la i-ésimo ecuación por la j-ésima
2.- Se puede multiplicar una ecuación por un escalar $\alpha \in \mathbb{R} - \{0\}$
3.- A una ecuación se le puede sumar el múltiplo escalar de otra ecuación

Ejemplos:

1.- $2x + 3y + z = 1$

$x - y + 2z = 6$

La matriz aumentada es:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 6 \end{array}\right] \xrightarrow{R_2 \leftrightarrow R_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 6 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{(R_2 - 2R_1) \to R_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 6 \\ 0 & 5 & -3 & -11 \end{array}\right]$$

Así el sistema equivalente es:

$x - y + 2z = 6$ que al resolver "hacia atrás"

$5y - 3z = -11$

De $5y - 3z = -11$ se tiene que $y = \frac{3z}{5} - \frac{11}{5}$

que al sustituir en $x - y + 2z = 6$ se tiene:

$$x = y - 2z + 6 \rightarrow x = \left(\frac{3z}{5} - \frac{11}{5}\right) - 2z + 6$$

$$\therefore x = -\frac{7z}{5} + \frac{19}{5}$$

Así el conjunto solución es:

$$S = \left\{\left(-\frac{7z}{5} + \frac{19}{5}, \frac{3z}{5} - \frac{11}{5}, z\right) \middle| z \in \mathbb{R}\right\}$$

2.- $x + 2y - 4z = -4$

$5x + 11y - 21z = -22$

$3x - 2y + 3z = 11$

La matriz aumentada es:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -4 & -4 \\ 5 & 11 & -21 & -22 \\ 3 & -2 & 3 & 11 \end{array}\right] \xrightarrow[R_3-3R_1\to R_3]{R_2-5R_1\to R_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -4 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & -8 & 15 & 23 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{R_3+8R_2\to R_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -4 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 7 & 7 \end{array}\right]$$

El sistema equivalente es:

$$\begin{aligned} x+2y-4z &= -4 \\ y-z &= -2 \\ 7z &= 7 \end{aligned}$$

Que al resolver hacia atrás:

De $7z=7 \to z=1$

De $y-z=-2 \to y=z-2 \to y=-1$

Y de $x+2y-4z=-4 \to x=4z-2y-4 \to x=2$

Así la solución del sistema es:

$$S=\left\{\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$$

Ejercicios: Resolver

a) $2x+4y+6z=18$

$4x+5y+6z=24$

$3x+y-2z=4$

La matriz aumentada es:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 6 & 18 \\ 4 & 5 & 6 & 24 \\ 3 & 1 & -2 & 4 \end{array}\right] \xrightarrow{\frac{R_1}{2}\to R_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 9 \\ 4 & 5 & 6 & 24 \\ 3 & 1 & -2 & 4 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[R_3-3R_1\to R_3]{R_2-4R_1\to R_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 9 \\ 0 & -3 & -6 & -12 \\ 0 & -5 & -11 & -23 \end{array}\right] \xrightarrow{R_3-\frac{5R_2}{3}\to R_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 9 \\ 0 & -3 & -6 & -12 \\ 0 & 0 & -1 & -3 \end{array}\right]$$

El sistema equivalente es:

$$\begin{aligned} x+2y+3z&=9\\ -3y-6z&=-12\\ -z&=-3\end{aligned}$$

Así:

$z=3$

$-3y=6 \rightarrow y=-2$

$x=9-9+4 \rightarrow x=4$

La solución del sistema es:

$$S=\left\{\begin{bmatrix}4\\-2\\3\end{bmatrix}\right\}$$

b) $x+3y+5w+z=4$

$2x+5y-2w+4z=6$

La matriz aumentada es:

$$\left[\begin{array}{cccc|c}1&3&5&1&4\\2&5&-2&4&6\end{array}\right]\xrightarrow{R_2-2R_1\rightarrow R_2}\left[\begin{array}{cccc|c}1&3&5&1&4\\0&-1&-12&2&-2\end{array}\right]$$

El sistema equivalente es:

$$\begin{aligned} x+3y+5w+z&=4\\ -y-12w+2z&=-2\end{aligned}$$

Al tratar de despejar no se obtiene ningún valor para alguna variable

$\therefore$ El sistema no tiene solución

c) $2x-6y+7z=15$

$2x-4y+10z=20$

$4y+8z=8$

La matriz aumentada es:

$$\left[\begin{array}{ccc|c}2&-6&7&15\\2&-4&10&20\\0&4&8&8\end{array}\right]\xrightarrow{R_1\leftrightarrow R_2}\left[\begin{array}{ccc|c}2&-4&10&20\\2&-6&7&15\\0&4&8&8\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{R_2 - R_1 \to R_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -4 & 10 & 20 \\ 0 & -2 & -3 & -5 \\ 0 & 4 & 8 & 8 \end{array}\right] \xrightarrow{R_3 + 2R_2 \to R_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -4 & 10 & 20 \\ 0 & -2 & -3 & -5 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \end{array}\right]$$

El sistema equivalente es:

$$\begin{aligned} 2x - 4y + 10z &= 20 \\ -2y - 3z &= -5 \\ 2z &= -2 \end{aligned}$$

Resolviendo "hacia atrás"

$z = -1$

$-2y = -8 \quad \therefore \quad y = 4$

$2x = 46 \quad \therefore \quad x = 23$

Así, la solución del sistema es:

$$S = \left\{ \begin{bmatrix} 23 \\ 4 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}$$

! Matriz Escalonada Reducida

Se dice que una matriz se encuentra en su forma escalonada reducida si:

- Todos los renglones (si los hay) cuyos elementos son todos cero aparecen en la parte inferior de la matriz
- El primer número diferente de cero (comenzando por la izquierda) en cualquier renglón cuyos elementos no todos son cero, es 1
- Si dos renglones sucesivos tienen elementos distintos de cero, entonces el primer 1 en el renglón de abajo está más hacia la derecha que el primer 1 del renglón de arriba
- Cualquier columna que contiene el primer 1 en un renglón tiene ceros en el resto de sus elementos. El primer número diferente de cero en un renglón (si lo hay) se llama pivote para ese renglón

Ejemplos:

1.- $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

2.- $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

3.- $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

4.- $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Cálculo de la matriz inversa

El procedimiento es el siguiente:

1.- Construimos una matilz "aumentada" como la siguiente: $[A \mid I]$. De un lado estarán las entradas de la matiiz A

2.- Realizar operaciones operaciones para obtener la matiiz $[I \mid B]$ Donde $B = A^{-1}$ (Si la matiiz no tiene inversa, se llama matiiz singular)

Ejemplos: Calcular la matiiz inversa de las matiices

1.- $\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 3 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{R_1 - R_2 \to R_1} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & -6 & 1 & -1 \\ 2 & 5 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{R_2 - 2R_1 \to R_2} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & -6 & 1 & -1 \\ 0 & 17 & -2 & 3 \end{array}\right] \xrightarrow{\frac{1}{17}R_2 \to R_2} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & -6 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -\frac{2}{17} & \frac{3}{17} \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{R_1 + 6R_2 \to R_1} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{5}{17} & \frac{1}{17} \\ 0 & 1 & -\frac{2}{17} & \frac{3}{17} \end{array}\right]$$

De esta manera

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{5}{17} & \frac{1}{17} \\ -\frac{2}{17} & \frac{3}{17} \end{bmatrix}$$

2.- $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 5 & 11 & -21 \\ 3 & -2 & 3 \end{bmatrix}$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -4 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & 11 & -21 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[R_3 - 3R_1 \to R_3]{R_2 - 5R_1 \to R_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -5 & 1 & 0 \\ 0 & -8 & 15 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[R_3 + 8R_2 \to R_3]{R_1 - 2R_2 \to R_1} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -2 & 11 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & -43 & 8 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{\frac{1}{7}R_3 \to R_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -2 & 11 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{43}{7} & \frac{8}{7} & \frac{1}{7} \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[R_1 + 2R_3 \to R_1]{R_2 + R_3 \to R_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{9}{7} & \frac{2}{7} & \frac{2}{7} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{78}{7} & \frac{15}{7} & \frac{1}{7} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{43}{7} & \frac{8}{7} & \frac{1}{7} \end{array}\right]$$

$$\therefore A^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{9}{7} & \frac{2}{7} & \frac{2}{7} \\ -\frac{78}{7} & \frac{15}{7} & \frac{1}{7} \\ -\frac{43}{7} & \frac{8}{7} & \frac{1}{7} \end{bmatrix}$$

Sistemas Homogéneos

Un sistema homogéneo se tiene haciendo la matiz de términos independientes igual a cero, $b = 0$, es decir, $Ax = 0$ y en consecuencia:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

Para resolverlos se utilizarán operaciones renglón, ya sea por Eliminación Gaussiana o Gauss-Jordan

Ejemplos:

1.- $$\begin{aligned} 2x + y + 3z &= 0 \\ x + y \quad &= 0 \\ y + z &= 0 \end{aligned}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{R_2 - 2R_1 \to R_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[R_3 + R_2 \to R_3]{R_1 + R_2 \to R_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[\frac{1}{4}R_3 \to R_3]{-1R_2 \to R_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[R_1 - 3R_3 \to R_1]{R_2 + 3R_3 \to R_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

El sistema equivalente es:

$$x = 0$$
$$y = 0$$
$$z = 0$$

Y en consecuencia, el conjunto solución es:

$$S = \{[0, 0, 0] \mid z \in \mathbb{R}\}$$

Existe una relación fundamental entre los sistemas homogéneos y los no homogéneos

Teorema: Sea y_0 una solución particular del sistema no homogéneo y U la solución general del sistema no homogéneo. Entonces la solución general del sistema no homogéneo dado es:

$$U = \gamma_0 + W = \{\gamma_0 + w \mid w \in W\}$$

Donde W es la solución general del sistema no homogéneo

Ejemplos:

1- $x + 2y - z = 2$
$2x + 3y + 5z = 5$
$-x - 3y + 8z = -1$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 5 & 5 \\ -1 & -3 & 8 & -1 \end{array}\right] \xrightarrow[R_3 + R_1 \to R_3]{R_2 - 2R_1 \to R_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 7 & 1 \\ 0 & -1 & 7 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[R_3 - R_2 \to R_3]{R_1 + 2R_2 \to R_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 13 & 4 \\ 0 & -1 & 7 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

El sistema equivalente es:

$$\begin{aligned} x + 13z &= 4 \\ -y + 7z &= 1 \end{aligned} \longrightarrow \begin{aligned} x &= 4 - 13z \\ y &= -1 + 7z \end{aligned}$$

Así la solución general es:

$$U = \{[4, -1, 0] + [-13, 7, 1]z \mid z \in \mathbb{R}\}$$

Donde $[4, -1, 0]$ es una solución particular del sistema no homogéneo

$W = \{[-13, 7, 1]z \mid z \in \mathbb{R}\}$ es la solución general del sistema homogéneo asociado:

$$\begin{aligned} x + 2y - z &= 0 \\ 2x + 3y + 5z &= 0 \\ -x - 3y + 8z &= 0 \end{aligned}$$

Ojo:

- $[-13, 7, 1]$, $[65, -35, -5]$ ambas son soluciones del sistema homogéneo asociado
- $[-13, 7, 1] + [65, -35, -5] = [52, -28, -4]$ también es solución del sistema homogéneo asociado
- $[4, -1, 0]$, $[30, -15, -2]$ son soluciones del sistema no homogéneo

$-[4,-1,0]-[30,-15,-2]=[-26,14,2]$ es solución del sistema no homogéneo

Teorema: Si x_1, x_2 son soluciones del sistema no homogéneo $Ax=b$ entonces su diferencia es solución del sistema homogéneo asociado

11-09-2019

Determinantes

Determinante de orden 3

Sea $A \in M_{3\times3}$ arbitraria

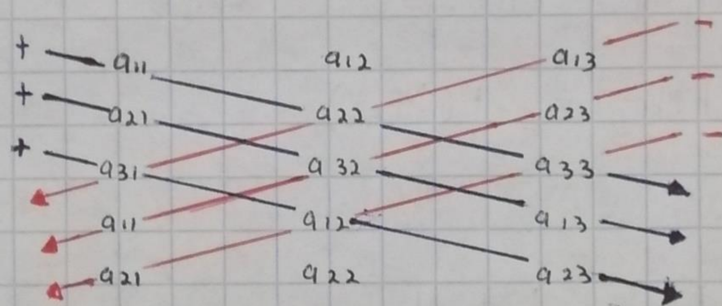
El determinante de la matriz A se define como:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{13}a_{21}a_{32} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$$

Podemos ver que hay 6 productos que tienen signo positivo y otros 3 que tienen signo negativo

Esto se debe a una regla de Sarrus en honor al matemático francés Pierre Fréderic Sarrus:



Ojo: Esta regla solamente es válida para matrices $A \in M_{3\times3}$

Ejemplos:

a) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & -2 \\ 1 & -3 & 4 \end{vmatrix}$ $[(2)(5)(4)+(1)(-2)(1)+(0)(-3)(1)-(1)(5)(1)-(-3)(-2)(2)-(4)(0)(1)]$

$40-2+0-5-12-0=21$

b) $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 5 \\ 6 & 3 & 4 \end{vmatrix}$ $[(2)(1)(4)+(-1)(5)(6)+(4)(0)(3)-(6)(1)(4)-(3)(5)(2)-(4)(0)(-1)]$

$8-30+0-24-30+4=-72$

Determinante de $n \times n$

Ojo: $\det(A)$ de la sección previa

$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{13}a_{21}a_{32} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$

$= a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}$

$= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31})$

$= a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$

Este es un método más general para calcular determinantes para matrices $M_{n\times n}$, $n \geq 3$

! **Definición:** Sea $A \in M_{n\times n}$ y sea M_{ij} la submatriz que se obtiene de la matriz A al eliminar el i-ésimo renglón y la j-ésima columna. El ij-ésimo menor de la matriz A es dado por:

$$|M_{ij}| = \det(M_{ij})$$

Ejemplos: Calcular para:

a) $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 5 \\ 6 & 3 & 4 \end{bmatrix}$, $|M_{13}|$, $|M_{32}|$

$|M_{13}| = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 6 & 3 \end{vmatrix} = 0 - 6 = -6$, $|M_{32}| = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} = 0 - 20 = -20$

$|M_{13}| = -6$ $\qquad$ $|M_{32}| = -20$

b) $\begin{bmatrix} 1 & -3 & 5 & 6 \\ 2 & 4 & 0 & 3 \\ 1 & 5 & 9 & -2 \\ 4 & 0 & 2 & 7 \end{bmatrix}$, $|M_{24}|$, $|M_{32}|$, $|M_{44}|$

$|M_{24}| = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 5 \\ 1 & 5 & 9 \\ 4 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -192$

$$|M_{32}| = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 6 \\ 2 & 0 & 3 \\ 4 & 2 & 7 \end{vmatrix} = 8$$

$$|M_{44}| = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 5 \\ 2 & 4 & 0 \\ 1 & 5 & 9 \end{vmatrix} = 120$$

! **Definición:** Sea $A \in M_{n\times n}$, el ij-ésimo cofactor, que denotamos con A_{ij}, es dado por:

$$A_{ij} = (-1)^{i+j}\,|M_{ij}|$$

Nótese que:

$$(-1)^{i+j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i+j \text{ es par} \\ -1 & \text{si } i+j \text{ es impar} \end{cases}$$

Definición: Sea $A \in M_{n\times n}$

El determinante de la matriz A es dado por:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} a_{1k} A_{1k}$$

En algunos libros, esta definición se le llama desarrollo de cofactores, aunque es más conocido como la expansión (o desarrollo) de Laplace

Ejemplos:

a) $$\begin{vmatrix} 1 & -3 & 5 & 6 \\ 2 & 4 & 0 & 3 \\ 1 & 5 & 9 & -2 \\ 4 & 0 & 2 & 7 \end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix} 4 & 0 & 3 \\ 5 & 9 & -2 \\ 0 & 2 & 7 \end{vmatrix} - (-3)\begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 1 & 9 & -2 \\ 4 & 2 & 7 \end{vmatrix} + 5\begin{vmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 1 & 5 & -2 \\ 4 & 0 & 7 \end{vmatrix} - 6\begin{vmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 1 & 5 & 9 \\ 4 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

$$1\begin{vmatrix}4&0&3\\5&9&-2\\0&2&7\end{vmatrix}+3\begin{vmatrix}2&0&3\\1&9&-2\\4&2&7\end{vmatrix}+5\begin{vmatrix}2&4&3\\1&5&-2\\4&0&7\end{vmatrix}-6\begin{vmatrix}2&4&0\\1&5&9\\4&0&2\end{vmatrix}$$

$$[(4)(9)(7)+(0)(-2)(0)+(3)(5)(2)-(0)(9)(3)-(2)(-2)(4)-(7)(5)(0)]$$
$$+3[(2)(9)(7)+(0)(-2)(4)+(1)(2)(3)-(4)(9)(3)-(2)(-2)(2)-(7)(1)(0)]$$
$$+5[(2)(5)(7)+(4)(-2)(4)+(3)(1)(0)-(4)(5)(3)-(0)(-2)(2)-(7)(1)(4)]$$
$$-6[(2)(5)(2)+(4)(9)(4)+(0)(1)(0)-(4)(5)(0)-(0)(9)(2)-(2)(1)(4)]$$
$$=298+3(32)+5(-50)-6(156)$$
$$=298+96-250-936$$
$$=-792$$

b) $$\begin{vmatrix}1&3&5&2\\0&-1&3&4\\2&1&9&6\\3&2&4&8\end{vmatrix}$$

$$=1\begin{vmatrix}-1&3&4\\1&9&6\\2&4&8\end{vmatrix}-0\begin{vmatrix}3&5&2\\1&9&6\\2&4&8\end{vmatrix}+2\begin{vmatrix}3&5&2\\-1&3&4\\2&4&8\end{vmatrix}-3\begin{vmatrix}3&5&2\\-1&3&4\\1&9&6\end{vmatrix}$$
$$=1(-92)-0(136)+2(84)-3(-28)$$
$$=-92-0+168+84$$
$$=168+84-92$$
$$=252-92$$
$$=160$$

Propiedades de los Determinantes

Teorema: Sea $A \in M_{n\times n}$, se tiene que:

$$\det(A)=\sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{ik}$$

O bien

$$\det(A)=\sum_{k=1}^{n} a_{kj}A_{kj}$$

Ojo: El teorema nos indica que el determinante se puede desarrollar en cualquier renglón o columna.

! Teorema: Sea $A \in M_{n\times n}$. Si A es una matriz triangular superior (o inferior), entonces:

$$\det(A) = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}$$

Ejemplo: Calcular

a) $\begin{vmatrix} -1 & 2 & 4 & -8 \\ 0 & -3 & 7 & 3 \\ 0 & 0 & -5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{vmatrix}$

$(-1)\begin{vmatrix} -3 & 7 & 3 \\ 0 & -5 & 6 \\ 0 & 0 & -4 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 0 & 7 & 3 \\ 0 & -5 & 6 \\ 0 & 0 & -4 \end{vmatrix} + 4\begin{vmatrix} 0 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & -4 \end{vmatrix} - (-8)\begin{vmatrix} 0 & -3 & 7 \\ 0 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$

$= -1(-60) - 2(0) + 4(0) + 8(0)$

$= -1(-60)$

$= 60$

Igualmente:

$(-1)(-3)(-5)(-4$

$= 60$

Teorema: Sea $A \in M_{n\times n}$. Si A tiene un renglón (o columna) de ceros, entonces $\det(A) = 0$

Ejemplo: Calcular

a) $\begin{vmatrix} 0 & 3 & 5 & 2 \\ 0 & -1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 9 & 6 \\ 0 & 2 & 4 & 8 \end{vmatrix}$

$$= 0\begin{vmatrix} -1 & 3 & 4 \\ 1 & 9 & 6 \\ 2 & 4 & 8 \end{vmatrix} - 0\begin{vmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 1 & 9 & 6 \\ 2 & 4 & 8 \end{vmatrix} + 0\begin{vmatrix} 3 & 5 & 2 \\ -1 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 8 \end{vmatrix} - 0\begin{vmatrix} 3 & 5 & 2 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & 9 & 6 \end{vmatrix}$$

$= 0(-92) - 0(136) + 0(84) - 0(-28)$

$= 0(-92 - 136 + 84 + 28)$

$= 0(84 + 28 - 136 - 92)$

$= 0(112 - 228)$

$= 0(-116)$

$= 0$

Teorema: Sea $A \in M_{n \times n}$. Si A tiene dos renglones (o columnas) iguales, entonces $\det(A) = 0$

Ejemplos: Calcular

a) $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 9 & 2 \\ 3 & 2 & 4 & 3 \end{vmatrix}$

$$= 1\begin{vmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 1 & 9 & 2 \\ 2 & 4 & 3 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 2 & 9 & 2 \\ 3 & 4 & 3 \end{vmatrix} + 5\begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 3 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 9 \\ 3 & 2 & 4 \end{vmatrix}$$

$= 1(-16) - 3(0) + 5(0) - 1(-16)$

$= -16 + 0(5 - 3) + 16$

$= 16 - 16 + 0(2)$

$= 16 - 16 + 0$

$= 16 - 16$

$= 0$

Donde C_1 y C_4 eran iguales

b) $\begin{vmatrix} 1 & -3 & 5 & 6 \\ 2 & 4 & 0 & 3 \\ 1 & 5 & 9 & -2 \\ 2 & 4 & 0 & 3 \end{vmatrix}$

$= 1\begin{vmatrix} 4 & 0 & 3 \\ 5 & 9 & -2 \\ 4 & 0 & 3 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} -3 & 5 & 6 \\ 5 & 9 & -2 \\ 4 & 0 & 3 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} -3 & 5 & 6 \\ 4 & 0 & 3 \\ 4 & 0 & 3 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} -3 & 5 & 6 \\ 4 & 0 & 3 \\ 5 & 9 & -2 \end{vmatrix}$

$= 1(0) - 2(-412) + 1(0) - 2(412)$

$= 0 + 824 + 0 - 824$

$= 824 - 824$

$= 0$

Donde R_2 y R_4 eran iguales

Teorema: Sea $A \in M_{n \times n}$. Si A tiene un renglón (o columna) que es múltiplo escalar de otro renglón (columna), entonces $\det(A) = 0$

Ejemplo: Calcular

a) $\begin{vmatrix} 1 & -3 & 5 & 6 \\ 2 & 4 & 0 & 3 \\ -3 & 9 & -15 & -18 \\ 4 & 0 & 2 & 7 \end{vmatrix}$

$= 1\begin{vmatrix} 4 & 0 & 3 \\ 9 & -15 & -18 \\ 0 & 2 & 7 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} -3 & 5 & 6 \\ 9 & -15 & -18 \\ 0 & 2 & 7 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} -3 & 5 & 6 \\ 4 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 7 \end{vmatrix} - 4\begin{vmatrix} -3 & 5 & 6 \\ 4 & 0 & 3 \\ 9 & -15 & -18 \end{vmatrix}$

$= 1(-222) - 2(0) - 3(-74) - 4(0)$

$= -222 - 0 + 222 - 0$

$= -222 + 222$

$= 222 - 222$

$= 0$

Nótese que $R_3 = -3R_1$

Teorema: Sea $A \in M_{n\times n}$. Si a un renglón (o columna) de A se multiplica por un escalar $\alpha \neq 0$, para obtener la matriz B, entonces $\det(B) = \alpha \det(A)$

Ejemplos: Calcular

a) $\begin{vmatrix} 1 & -3 & 5 & 6 \\ 2 & 4 & 0 & 3 \\ 1 & 5 & 9 & -2 \\ 4 & 0 & 2 & 7 \end{vmatrix}$

$= -5\begin{vmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 1 & 5 & -2 \\ 4 & 0 & 7 \end{vmatrix} + 0\begin{vmatrix} 1 & -3 & 6 \\ 1 & 5 & -2 \\ 4 & 0 & 7 \end{vmatrix} - 9\begin{vmatrix} 1 & -3 & 6 \\ 2 & 4 & 3 \\ 4 & 0 & 7 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 1 & -3 & 6 \\ 2 & 4 & 3 \\ 1 & 5 & -2 \end{vmatrix}$

$= -5(-50) + 0(-40) - 9(-62) + 2(-8)$

$= 250 + 0 + 558 - 16$

$= 808 - 16$

$= 792$

El resultado anterior influye en el siguiente inciso

b) $\begin{vmatrix} 1 & -3 & 15 & 6 \\ 2 & 4 & 0 & 3 \\ 1 & 5 & 27 & -2 \\ 4 & 0 & 6 & 7 \end{vmatrix}$

$= -15\begin{vmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 1 & 5 & -2 \\ 4 & 0 & 7 \end{vmatrix} + 0\begin{vmatrix} 1 & -3 & 6 \\ 1 & 5 & -2 \\ 4 & 0 & 7 \end{vmatrix} - 27\begin{vmatrix} 1 & -3 & 6 \\ 2 & 4 & 3 \\ 4 & 0 & 7 \end{vmatrix} + 6\begin{vmatrix} 1 & -3 & 6 \\ 2 & 4 & 3 \\ 1 & 5 & -2 \end{vmatrix}$

$= -15(-50) + 0(-40) - 27(-62) + 6(-8)$

$= (3)(-5)(-50) + (3)(0)(-40) + (3)(-9)(-62) + (3)(2)(-8)$

$\therefore 3[-5(-50) + 0(-40) - 9(-62) + 2(-8)]$

$= 3(792)$

$= 2{,}376$

Nótese que $\det(b) = 3\det(a)$

Porque C_3 del b) es $3C_3$ del a)

Teorema: Sean $A, B, C \in M_{n\times n}$ tales que:

$$A = [a_{ij}], \quad B = \begin{cases} b_{ij} = a_{ij}, & i = 1, 2, \dots, n;\ j = 1, 2, \dots, n \\ b_{ik} = a_{ik} & i = 1, 2, \dots, n \end{cases}$$

$$C = \begin{cases} c_{ij} = a_{ij}, & i = 1, 2, \dots, n;\ j = 1, 2, \dots, n \\ cb_{ik} = a_{ij} + a_{ik} & i = 1, 2, \dots, n \end{cases}$$

Entonces: $\det(C) = \det(A) + \det(B)$

Ejemplos: Calcular

a) $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \\ 0 & -2 & 5 \end{vmatrix}$

$= 1\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 5 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 0 & -2 \end{vmatrix}$

$= 1(5+8) + 1(15-0) + 2(-6-0)$

$= 1(13) + 1(15) + 2(-6)$

$= 13 + 15 - 12$

$= 15 + 1$

$= 16$

b) $\begin{vmatrix} 1 & 7 & 2 \\ 3 & 4 & 4 \\ 0 & 6 & 5 \end{vmatrix}$

$= 1\begin{vmatrix} 4 & 4 \\ 6 & 5 \end{vmatrix} - 7\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 6 \end{vmatrix}$

$= 1(20-24) - 7(15-0) + 2(18-0)$

$= 1(-4) - 7(15) + 2(18)$

$= -4 - 105 + 36$

$= 36 - 109$

$= -73$

c) $\begin{vmatrix} 1 & 6 & 2 \\ 3 & 5 & 4 \\ 0 & 4 & 5 \end{vmatrix}$

$= 1\begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} - 6\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 0 & 4 \end{vmatrix}$

$= 1(9) - 6(15) + 2(12)$

$= 9 - 90 + 24$

$= -57$

Nótese que $\det(a) = 16$ y $\det(b) = -73$

y que $16 - 73 = -57$

Teorema: Sea $A \in M_{n\times n}$. Si a la matriz se le permutan dos renglones (o columnas) para obtener una matriz B, entonces $\det(B) = -\det(A)$

Ejemplos: Calcular

a) $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \\ 0 & -2 & 5 \end{vmatrix} \Rightarrow$ De un ejemplo anterior $\Rightarrow 16$

b) $\begin{vmatrix} 0 & -2 & 5 \\ 3 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix}$

$= 0\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} -2 & 5 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} -2 & 5 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}$

$= 0(2+4) - 3(-4+5) + 1(-8-5)$

$= 0(6) - 3(1) + 1(-13)$

$= 0 - 3 - 13$

$= 0 - 16$

$= -16$

Y $\det(a) = 16$, mientras en b) se cambió $R_1 \leftrightarrow R_3$

c) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 4 & 1 \\ 0 & 5 & -2 \end{vmatrix}$

$= 1\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 5 \end{vmatrix}$

$= 1(-8-5) - 2(-6-0) - 1(15-0)$

$= 1(-13) - 2(-6) - 1(15)$

$= -13 + 12 - 15$

$= -16$

Y $\det(a) = 16$, mientras en c) cambió $C_2 \leftrightarrow C_3$

Teorema: Sea $A \in M_{n \times n}$. Si a la matriz A se le suma α veces el renglón (o columna) i al renglón (o columna) para obtener una matriz B, entonces $\det(B) = \det(A)$

Ejemplos:

a) $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \\ 0 & -2 & 5 \end{vmatrix} \rightarrow$ De un ejemplo anterior $\rightarrow$ 16

b) $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 6 & -2 & 10 \\ 0 & -2 & 5 \end{vmatrix}$

$= 1\begin{vmatrix} -2 & 10 \\ -2 & 5 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 6 & 10 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 6 & -2 \\ 0 & -2 \end{vmatrix}$

$= 1(-10+20) + 1(30-0) + 2(-12-0)$

$= 1(10) + 1(30) + 2(-12)$

$= 10 + 30 - 24$

$= 40 - 24$

$= 16$

Y $\det(a) = 16$

Nótese que R_2 de b) es $R_2 + 3R_1$ de a)

c) $\begin{vmatrix} 1 & 7 & 2 \\ 3 & 17 & 4 \\ 0 & 18 & 5 \end{vmatrix}$

$= 1\begin{vmatrix} 17 & 4 \\ 18 & 5 \end{vmatrix} - 7\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 3 & 17 \\ 0 & 18 \end{vmatrix}$

$= 1(85-72) - 7(15-0) + 2(54-0)$

$= 1(13) - 7(15) + 2(54)$

$= 13 - 105 + 108$

$= 16 \quad \Rightarrow Y \ \det(a) = 16$

Nótese que C_2 de c) es $C_2 + 4C_3$ de a)

Ejemplos: Calcular los siguientes determinantes, utilizando las propiedades

1- $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 9 & 2 \\ 2 & 2 & 4 & 3 \end{vmatrix}$

Solución

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 9 & 2 \\ 2 & 2 & 4 & 3 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \\ R_3 - 2R_1 \\ R_4 - 2R_1 \end{matrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & -5 & -1 & 0 \\ 0 & -4 & -6 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \\ R_3 - 5R_2 \\ R_4 - 4R_2 \end{matrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -16 & 0 \\ 0 & 0 & -18 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= -16\begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -18 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \\ R_4 + 18R_3 \\ \end{matrix} = -16\begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (-16)(1)(-1)(1)(1)$$

$$\therefore \begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 9 & 2 \\ 2 & 2 & 4 & 3 \end{vmatrix} = 16$$

11-
$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 & -2 & 1 \\ 4 & 7 & 1 & 1 & 1 \\ 5 & 7 & 2 & -1 & 6 \\ 4 & 3 & -2 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & -3 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Solución

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 & -2 & 1 \\ 4 & 7 & 1 & 1 & 1 \\ 5 & 7 & 2 & -1 & 6 \\ 4 & 3 & -2 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & -3 & 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} = \\ R_2 - 4R_1 \\ R_3 - 5R_1 \\ R_4 - 4R_1 \\ R_5 - 4R_1 \end{matrix} \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 & -2 & 1 \\ 0 & -5 & -15 & 9 & -3 \\ 0 & -8 & -18 & 9 & 1 \\ 0 & -9 & -18 & 9 & -4 \\ 0 & -10 & -19 & 8 & -3 \end{vmatrix}$$

$$= -5 \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & -\frac{9}{5} & \frac{3}{5} \\ 0 & -8 & -18 & 9 & 1 \\ 0 & -9 & -18 & 9 & -4 \\ 0 & -10 & -19 & 8 & -3 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ = \\ R_3 + 8R_2 \\ R_4 + 9R_2 \\ R_5 + 10R_2 \end{matrix} -5 \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & -\frac{9}{5} & \frac{3}{5} \\ 0 & 0 & 6 & -\frac{27}{5} & \frac{29}{5} \\ 0 & 0 & 9 & -\frac{36}{5} & \frac{7}{5} \\ 0 & 0 & 11 & -10 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= (-5)(6) \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & -\frac{9}{5} & \frac{3}{5} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{27}{30} & \frac{29}{30} \\ 0 & 0 & 9 & -\frac{36}{5} & \frac{7}{5} \\ 0 & 0 & 11 & -10 & 3 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \\ = \\ R_4 - 9R_3 \\ R_5 - 11R_3 \end{matrix} -30 \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & -\frac{9}{5} & \frac{3}{5} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{27}{30} & \frac{29}{30} \\ 0 & 0 & 0 & 9 & -73 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -\frac{229}{3} \end{vmatrix}$$

$$= (-30)\left(\tfrac{1}{10}\right)\left(\tfrac{1}{10}\right) \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & -\frac{9}{5} & \frac{3}{5} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{27}{30} & \frac{29}{30} \\ 0 & 0 & 0 & 9 & -73 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -\frac{229}{3} \end{vmatrix} = \frac{3}{10} \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & -\frac{9}{5} & \frac{3}{5} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{27}{30} & \frac{29}{30} \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -\frac{229}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 9 & -73 \end{vmatrix}$$

$$\begin{matrix} \cdot = \\ R_5 + 9R_4 \end{matrix} \frac{3}{10} \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & -\frac{9}{5} & \frac{3}{5} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{27}{30} & \frac{29}{30} \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -\frac{229}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -760 \end{vmatrix} = \left(\frac{3}{10}\right)(1)(1)(1)(-1)(-760)$$

$$\therefore \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 & -2 & 1 \\ 4 & 7 & 1 & 1 & 1 \\ 5 & 7 & 2 & -1 & 6 \\ 4 & 3 & -2 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & -3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 228$$

Regla de Cramer

Teorema: Sea $A \in M_{n \times n}$. Si A es invertible, entonces $\det(A) \neq 0$ y $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$

Demostración:

Para la demostración de $\det(A) \neq 0$, se requiere utilizar matrices elementales y no lo haremos, así que procedemos a la segunda parte

Como $\det(I) = 1$ entonces $\det(AA^{-1}) = 1$, de donde $\det(A^{-1})\det(A) = 1$

$$\therefore \det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$$

QED

Ejemplo:

a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 4 - 6 = -2$$

Como $A^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$, entonces

$$\det(A^{-1}) = \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{vmatrix} = 1 - \frac{3}{2} = -\frac{1}{2}$$

Definición: Sea $A \in M_{n \times n}$. Si $C = [c_{ij}]_{n \times n}$ donde $c_{ij} = A_{ij} = (-1)^{i+j} |M_{ij}|$, entonces la matriz C es conocida como la matriz de cofactores de la matriz A

Ojo: Para el cálculo de M_{ij}, se eliminan en A el renglón i y la columna j

Ejemplos:

a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$

Calculemos:

$$c_{11} = (-1)^{1+1}|4| = 4$$
$$c_{12} = (-1)^{1+2}|3| = -3$$
$$c_{21} = (-1)^{2+1}|2| = -2$$
$$c_{22} = (-1)^{2+2}|1| = 1$$

De esta manera:

$$C = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

Es la matiz de cofactores de la matriz A

b) $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 3 & 5 & 7 \end{bmatrix}$

$a_{11} = 12$ $\quad a_{12} = -3$ $\quad a_{13} = -3$

$a_{21} = -13$ $\quad a_{22} = 5$ $\quad a_{23} = 2$

$a_{31} = -7$ $\quad a_{32} = 2$ $\quad a_{33} = 2$

De esta manera:

$$C = \begin{bmatrix} 12 & -3 & -3 \\ -13 & 5 & 2 \\ -7 & 5 & 2 \end{bmatrix}$$

Definición: Sea $A \in M_{n \times n}$. Se llama matriz adjunta de A, la cual denotamos con $Adj(A)$ a la transpuesta de la matriz de cofactores. Esto es:

$$Adj(A) = C^t$$

Ejemplos:

a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$

Tiene a $C = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$ por matriz de cofactores y:

$$Adj(A) = C^t = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$$

b) $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 3 & 5 & 7 \end{bmatrix}$

Tiene a $C = \begin{bmatrix} 12 & -3 & -3 \\ -13 & 5 & 2 \\ -7 & 2 & 2 \end{bmatrix}$ como matriz de cofactores y:

$$Adj(A) = C^t = \begin{bmatrix} 12 & -13 & -7 \\ -3 & 5 & 2 \\ -3 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

Importante: Cuando se calcula la matriz adjunta, no se debe olvidar transponer la matriz de cofactores

Teorema: Sea $A \in M_{n \times n}$

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik} A_{jk} = 0 \qquad \text{si } i \neq j$$

Teorema: Sea $A \in M_{n \times n}$

$$A \, Adj(A) = \det(A) I_n$$

Demostración:

Sea

$$B = A \, Adj(A) = [a_{ij}][A_{ji}] = \left[\sum_{k=1}^{n} a_{ik} A_{jk} \right]$$

Nótese que:

$$b_{ij} = \begin{cases} \det(A) & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

Esto es:

$$B = \begin{bmatrix} \det(A) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \det(A) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \det(A) \end{bmatrix} = \det(A) \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} = \det(A) I_n$$

$$\therefore \; A \, Adj(A) = \det(A) I_n$$

QED

Teorema: Sea $A \in M_{n \times n}$. Si A es invertible, entonces:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} Adj(A)$$

Demostración:

Supongamos que A es invertible $\rightarrow \det(A) \neq 0$

Luego

$$A\left(\frac{1}{\det(A)} Adj(A)\right) = \frac{1}{\det(A)} (A \, Adj(A)) = \frac{1}{\det(A)} (\det(A) I_n)$$

Por el teorema anterior

$$A\left(\frac{1}{\det(A)} Adj(A)\right) = \frac{1}{\det(A)} (\det(A) I_n)$$

De donde

$$A\left(\frac{1}{\det(A)} Adj(A)\right) = I_n$$

En consecuencia:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} Adj(A)$$

QED

Ejemplos:

a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$

Donde $Adj(A) = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$ y $det(A) = 4 - 6 = -2$

Luego

$$A^{-1} = \frac{1}{det(A)} Adj(A) = -\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\therefore A^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

b) $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 3 & 5 & 7 \end{bmatrix}$

Donde $Adj(A) = \begin{bmatrix} 12 & -13 & -7 \\ -3 & 5 & 2 \\ -3 & 2 & 2 \end{bmatrix}$ y $det(A) = 3$

Luego

$$A^{-1} = \frac{1}{det(A)} Adj(A) = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 12 & -13 & -7 \\ -3 & 5 & 2 \\ -3 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\therefore A^{-1} = \begin{bmatrix} 4 & -\frac{13}{3} & -\frac{7}{3} \\ -1 & \frac{5}{3} & \frac{2}{3} \\ -1 & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

Consideremos el sistema de ecuaciones:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2$$
$$\vdots$$
$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m$$

Que en forma matricial tenemos:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

Si $\det(A) \neq 0$ entonces la matiiz de coeficientes es invertible y como consecuencia, el sistema tiene solución única, dada por:

$$AX = b \rightarrow A^{-1}(AX) = A^{-1}b$$
$$\rightarrow (A^{-1}A)X = A^{-1}b$$
$$\rightarrow (I_n)X = A^{-1}b$$
$$\therefore \quad X = A^{-1}b$$

Otra manera de resolver el sistema sin reducir el sistema ni calcular A^{-1} es la siguiente:

1.- Calculamos el determinante de la matiiz de coeficientes: $\det(A)$

2.- Definimos n nuevas matrices:

$$A_1 = \begin{bmatrix} b_1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_n & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} a_{11} & b_1 & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & b_2 & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & b_n & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}, \dots,$$

$$A_n = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & b_n \end{bmatrix}$$

Al sustituir la i-ésima columna por la columna de términos independientes

3.- Calculamos los determinantes

$$D_1 = \det(A_1), \quad D_2 = \det(A_2), \dots, D_n = \det(A_n)$$

Teorema: Sea $A \in M_{n\times n}$. Si $\det(A) \neq 0$, entonces la solución del sistema $AX = b$ es dada por

$$X_i = \frac{D_i}{D} \quad \forall i = 1, 2, \dots, n$$

Demostración:
Como la solución del sistema es dado por $X = A^{-1}b$, entonces

$$X = \left(\frac{1}{\det(A)} \operatorname{Adj}(A)\right) b = \frac{1}{D}\left(\operatorname{Adj}(A)\, b\right)$$

$$X = \frac{1}{D}\begin{bmatrix} \sum_{k=1}^{n} A_{k1} b_k \\ \sum_{k=2}^{n} A_{k2} b_k \\ \vdots \\ \sum_{k=1}^{n} A_{kn} b_k \end{bmatrix}$$

Nótese que:

$$\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ b_n & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{k=1}^{n} A_{k1} b_k = D_1$$

De esta manera:

$$X = \frac{1}{D}\begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ \vdots \\ D_n \end{bmatrix}$$

$$X = \begin{bmatrix} \frac{D_1}{D} \\ \frac{D_2}{D} \\ \vdots \\ \frac{D_n}{D} \end{bmatrix}$$

QED

$V = \{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & 0 \end{bmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{R} \}$ $V = \{ ax^2 + bx \mid a, b \in \mathbb{R} \}$

Espacios Vectoriales

Se introducirá el concepto de espacio vectorial de dimensión finita. La definición involucra un cuerpo (campo) arbitrario $K = (\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C})$, cuyos elementos se les denomina escalares

Definición: Sea K un campo dado, y V un conjunto no vacío en el cual están definidas dos operaciones:

$$+ : V \times V \to V \qquad \times : K \times V \to V$$
$$(u, v) \mapsto u + v \qquad (a, u) \mapsto au$$

Se dice que $V|K$ si satisface los siguientes axiomas:

a) Adición (A)

1.- Para todo u, v en V se cumple $u + v = v + u$
2.- Para todo u, v, z en V se cumple $u + (v + z) = (u + v) + z$
3.- Existe un único elemento 0 en V tal que $u + 0 = u$, $\forall u \in V$
4.- Existe un único elemento $-u$ en V tal que $u + (-u) = 0$, $\forall u \in V$

b) Multiplicación (M)

5.- $\forall u, v \in V$ y $\forall \alpha \in K$ se cumple $\alpha(u + v) = \alpha u + \alpha v$
6.- $\forall u \in V$ y $\forall \alpha, \gamma \in K$ se cumple $(\alpha + \gamma)u = \alpha u + \gamma u$
7.- $\forall u \in V$ y $\forall \alpha, \gamma \in K$ se cumple $(\alpha\gamma)u = \alpha(\gamma u)$
8.- $\forall u \in V$ existe un único escalar (1) en K tal que $u(1) = u$

Teorema: Sea $V|K$ (un espacio vectorial sobre un campo)
Se cumple que $0v = 0 \quad \forall v \in V$

Demostración:
Sabemos que:

$$(1)v = v \to (1 + 0)v = v \to (1)v + 0v = v \to v + 0v = v$$
$$\to -v + (v + 0v) = -v + v$$
$$\to (-v + v) + 0v = -v + v$$
$$\to 0 + 0v = 0$$
$$\therefore \quad 0v = 0$$

Q.E.D

Teorema: Sea $V|K$. Se cumple que $(-1)v = -v, \ \forall v \in V$

Demostración:
Sea $v \in V$ arbitrario dado
Sabemos que:

$$0v = 0 \rightarrow (1+(-1))v = 0 \rightarrow (1)v + (-1)v = 0$$
$$\rightarrow v + (-1)v = 0 \rightarrow -v + [v + (-1)v] = -v + 0$$
$$\rightarrow (-v+v) + (-1)v = -v + 0 \rightarrow 0 + (-1)v = -v + 0$$
$$\therefore (-1)v = -v$$

QED

Teorema: Sea $V|K$, se cumple que:

1.- $\alpha 0 = 0, \ \forall \alpha \in K$
2.- $-(-v) = v \ \ \forall v \in V$
3.- $(-\alpha)v = \alpha(-v) = -(\alpha v) \ \ \forall \alpha \in K$ y $\forall v \in V$
4.- $(-\alpha)(-v) = \alpha v \ \ \forall \alpha \in K$ y $\forall v \in V$
5.- $u + w = v + w \rightarrow u = v \ \ \forall u, v, w \in V$
6.- $\alpha u = \alpha v \rightarrow u = v$ para $\alpha \neq 0$ en K y $\forall u, v \in V$
7.- $\alpha v = 0 \rightarrow \alpha = 0$ ó $v = 0$

Ejemplo de un espacio vectorial R^n
$R^n = \{[x_1, x_2, \ldots, x_n] \mid x_1, x_2, \ldots, x_n \in R\}$
Sean $x, y, z \in R^n$ y $\alpha, \gamma \in R$ arbitrarios dados

A1:
$$x + y = [x_1, x_2, \ldots, x_n] + [y_1, y_2, \ldots, y_n] = [x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n]$$
Como $x_i + y_i = y_i + x_i \ \ \forall i = 1, 2, \ldots, n$, entonces
$$x + y = [y_1 + x_1, y_2 + x_2, \ldots, y_n + x_n] = [y_1, y_2, \ldots y_n] + [x_1, x_2, \ldots x_n]$$
$$\therefore \ x + y = y + x$$

A2:
$$x + (y + z) = [x_1, x_2, \ldots, x_n] + ([y_1, y_2, \ldots y_n] + [z_1, z_2, \ldots, z_n])$$
$$= [x_1, x_2, \ldots, x_n] + [y_1 + z_1, y_2 + z_2, \ldots, y_n + z_n]$$
$$= [x_1 + (y_1 + z_1), x_2 + (y_2 + z_2), \ldots, x_n + (y_n + z_n)]$$

Y como $x_i + (y_i + z_i) = (x_i + y_i) + z_i$, $\forall i = 1, 2, \dots, n$, entonces

$$x + (y+z) = [x_1 + (y_1 + z_1), x_2 + (y_2 + z_2), \dots, x_n + (y_n + z_n)]$$
$$= [(x_1 + y_1) + z_1, (x_2 + y_2) + z_2, \dots, (x_n + y_n) + z_n]$$
$$= [x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n] + [z_1, z_2, \dots, z_n]$$
$$= ([x_1, x_2, \dots, x_n] + [y_1, y_2, \dots y_n]) + [z_1, z_2, \dots, z_n]$$
$$= (x+y) + z$$
$$\therefore \quad x + (y+z) = (x+y) + z$$

A3:

Proponemos $u \in R^n$ (por determinarse) tal que $x + u = x$

Nótese que $x + u = x \rightarrow [x_1, x_2, \dots, x_n] + [u_1, u_2, \dots, u_n] = [x_1, x_2, \dots x_n]$

$\rightarrow [x_1 + u_1, x_2 + u_2, \dots, x_n + u_n] = [x_1, x_2, \dots, x_n]$

Por igualdad de vectores se tiene:

$x_1 + u_1 = x_1, \quad x_2 + u_2 = x_2, \quad \dots, \quad x_n + u_n = x_n$

Que al resolver para $u_1, u_2, \dots, u_n$ se tiene:

$u_1 = u_2 = u_3 = \dots = u_n = 0$ y en consecuencia

$u = [0, 0, \dots, 0]$

Para la unicidad suponemos que el neutro aditivo no es único, es decir, existe $u^* \in R^n$ con $u \neq u^*$ tal que $x + u^* = x$

En particular, al sustituir $x = u$ se tiene $u^* + u = u$, y al compararlas, se ve que $u^* = u$ lo cual viola la hipótesis del principio.

Como consecuencia, el neutro aditivo es único

A4:

Proponemos $v \in R^n$ (por determinarse) tal que $x + v = 0$

Nótese que $x + v = 0 \rightarrow [x_1, x_2, \dots x_n] + [v_1, v_2, \dots, v_n] = [0, 0, \dots, 0]$

$\rightarrow [x_1 + v_1, x_2 + v_2, \dots, x_n + v_n] = [0, 0, \dots, 0]$

Por igualdad de vectores se tiene:

$x_1 + v_1 = 0, \quad x_2 + v_2 = 0, \quad \dots, \quad x_n + v_n = 0$

Que al resolver para $v_1, v_2, \dots, v_n$ se tiene:

$v_1 = -x_1, \quad v_2 = -x_2, \quad \dots, \quad v_n = -x_n$ y en consecuencia

$v = [-x_1, -x_2, \dots -x_n]$

Para la unicidad suponemos que el inverso aditivo no es único, es decir, existe $v^* \in R^n$ con $v \neq v^*$ tal que $x + v^* = 0$
En particular, al manipular la ecuación, se modifica:

$$\begin{aligned} v^* &= v^* \\ &= v^* + 0 \\ &= v^* + (x + v) \\ &= (v^* + x) + v \\ &= 0 + v \end{aligned}$$

Por transitividad $v^* = v$, lo cual viola la hipótesis de que $v^* \neq v$.
En consecuencia, el inverso aditivo es único

M1:

$$\begin{aligned} \alpha(x+y) &= \alpha([x_1, x_2, \ldots, x_n] + [y_1, y_2, \ldots, y_n]) \\ &= \alpha[x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n] \\ &= [\alpha(x_1 + y_1), \alpha(x_2 + y_2), \ldots, \alpha(x_n + y_n)] \end{aligned}$$

Como $\alpha(x_i + y_i) = \alpha x_i + \alpha y_i$, para toda $i = 1, 2, \ldots, n$, entonces

$$\begin{aligned} \alpha(x+y) &= [\alpha x_1 + \alpha y_1, \alpha x_2 + \alpha y_2, \ldots, \alpha x_n + \alpha y_n] \\ &= [\alpha x_1, \alpha x_2, \ldots, \alpha x_n] + [\alpha y_1, \alpha y_2, \ldots, \alpha y_n] \\ &= \alpha[x_1, x_2, \ldots, x_n] + \alpha[y_1, y_2, \ldots, y_n] \\ \therefore \quad \alpha(x+y) &= \alpha x + \alpha y \end{aligned}$$

M2:

$$(\alpha + \gamma)x = (\alpha + \gamma)[x_1, x_2, \ldots, x_n] = [(\alpha+\gamma)x_1, (\alpha+\gamma)x_2, \ldots, (\alpha+\gamma)x_n]$$

Como $(\alpha + \gamma)x_i = \alpha x_i + \gamma x_i \ \forall i = 1, 2, \ldots, n$ entonces

$$\begin{aligned} (\alpha + \gamma)x &= [\alpha x_1 + \gamma x_1, \alpha x_2 + \gamma x_2, \ldots, \alpha x_n + \gamma x_n] \\ &= [\alpha x_1, \alpha x_2, \ldots, \alpha x_n] + [\gamma x_1, \gamma x_2, \ldots, \gamma x_n] \\ &= \alpha[x_1, x_2, \ldots, x_n] + \gamma[x_1, x_2, \ldots, x_n] \\ \therefore \quad (\alpha + \gamma)x &= \alpha x + \gamma x \end{aligned}$$

M3:

$$(\alpha\gamma)x = (\alpha\gamma)[x_1, x_2, \ldots, x_n] = [(\alpha\gamma)x_1, (\alpha\gamma)x_2, \ldots, (\alpha\gamma)x_n]$$

Como $(\alpha\gamma)x_i = \alpha(\gamma x_i) \ \forall i = 1, 2, \ldots, n$ entonces;

$(\alpha\gamma)x = [\alpha(\gamma x_1), \alpha(\gamma x_2), \ldots, \alpha(\gamma x_n)]$
$= \alpha[\gamma x_1, \gamma x_2, \ldots, \gamma x_n]$
$= \alpha(\gamma[x_1, x_2, \ldots, x_n])$
$\therefore \quad (\alpha\gamma)x = \alpha(\gamma x)$

M4:

$(1)x = (1)[x_1, x_2, \ldots, x_n]$
$= [(1)x_1, (1)x_2, \ldots, (1)x_n]$

Como $(1)x_i = x_i \;\; \forall i = 1, 2, \ldots, n$ entonces
$(1)x = [x_1, x_2, \ldots, x_n]$
$\therefore \quad (1)x = x$

Hemos visto que se cumplen los 8 axiomas en R^n, en consecuencia R^n es un espacio vectorial

Subespacios Vectoriales

Definición: Sean V un espacio vectorial sobre el campo K (que abreviamos con $V|K$) y W un subconjunto de V. Se dice que W es un subespacio de V sí W es también un espacio vectorial con las operaciones de suma y producto por escalar que estaban definidas en V

Ojo: Un espacio vectorial tiene al menos dos subespacios vectoriales, a saber $\{0\}$ y V mismo; estos subespacios se les conoce como subespacios triviales de V
En principio para saber si W es subespacio de V, hay que verificar que la cerradura de las operaciones se cumple en W para luego probar los 8 axiomas de espacio vectorial; esto podría parecer un poco laborioso. Una manera más sencilla y menos laboriosa nos la proporciona el siguiente:

Teorema: Sean $V|K$ y $W \subseteq V$ con $W \neq \emptyset$
W es subespacio de V si y sólo si se cumple:

1- $0 \in W$
2- $u, v \in W \rightarrow u + v \in W$
3- $\alpha \in K \wedge v \in W \rightarrow \alpha \cdot u \in W$

Operaciones con subespacios

Sean W_1, W_2 subespacios del espacio vectorial $V|K$, se cumple que:

1- $W_1 \cap W_2$ es un subespacio vectorial
2- $W_1 + W_2$ es un subespacio vectorial

Combinación Lineal

Definición: Sea V un espacio vectorial sobre el campo K que abreviamos con $V|K$)
Sean $v_1, v_2, \ldots, v_n \in V$ se dice que el vector $v \in V$ es una combinación lineal de los vectores $v_1, v_2, \ldots, v_n$ si existen escalares $c_1, c_2, \ldots c_n$ en K tales que:

$$v = \sum_{k=1}^{n} c_k v_k$$

Esto es:

$$v = c_1 v_1 + c_2 v_2 + \ldots + c_n v_n$$

Ejemplos:

1- $[14, 12, 2]$ es combinación lineal de $[1, 2, -1]$ y $[3, 2, 1]$
pues $[14, 12, 2] = 2[1, 2, -1] + 4[3, 2, 1]$

2- $\begin{bmatrix} -3 & -4 \\ 2 & -5 \end{bmatrix}$ es combinación lineal de $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ y $\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$
pues $\begin{bmatrix} -3 & -4 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} = 3\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

Conjunto Generador y Espacio Generado

Consideremos el conjunto $S = \{v_1, v_2, \dots, v_n\} \subset V$ y formemos un nuevo conjunto, el conjunto de todas las combinaciones lineales de elementos de S, y que se lo denotará con $\mathcal{L}(S)$, entonces:

$$\mathcal{L}(S) = \left\{ \sum_{k=1}^{n} c_k v_k \;\middle|\; c_k \in \mathbb{R},\ v_k \in S,\ k = 1, 2, \dots, n \right\}$$

Nótese que si $x, y \in \mathcal{L}(S)$, $\alpha \in \mathbb{R}$ arbitrarios dados, se tiene que:

$$x = \sum_{k=1}^{n} c_k v_k, \qquad y = \sum_{k=1}^{n} d_k v_k$$

Veamos que:

$$x + y = \sum_{k=1}^{n} c_k v_k + \sum_{k=1}^{n} d_k v_k = \sum_{k=1}^{n} [c_k v_k + d_k v_k]$$

$$= \sum_{k=1}^{n} [c_k + d_k] v_k$$

Y como $c_k + d_k \in \mathbb{R}$, $\forall k = 1, 2, \dots, n$, entonces $x + y \in \mathcal{L}(S)$

Por otro lado

$$\alpha x = \alpha \sum_{k=1}^{n} c_k v_k = \sum_{k=1}^{n} \alpha (c_k v_k) = \sum_{k=1}^{n} (\alpha c_k) v_k$$

Es claro que

$$\alpha x \in \mathcal{L}(S)$$

De esta última expresión también es claro que $0 \in \mathcal{L}(S)$
Por lo tanto $\mathcal{L}(S)$ contiene a un elemento neutro aditivo

Por los grupos denotados con la agrupación [descubrimos que $\mathcal{L}(S)$ es subespacio vectorial de V

Por último, si $W \subset V$ es un subespacio tal que $v_1, v_2, \dots, v_n \in W$ y sea $x \in \mathcal{L}(S)$ arbitrario dado. Nótese que

$$x = \sum_{k=1}^{n} a_k v_k$$

Con $a_k \in R$, $v_k \in S$, $k = 1, 2, \dots, n$.
Luego, al ser W subespacio, entonces

$$\sum_{k=1}^{n} a_k v_k \in W$$

Lo cual implica que $x \in W$ y en consecuencia $\mathcal{L}(S) \subset W$
De donde $\mathcal{L}(S)$ es el mínimo subespacio que contiene a los vectores $v_1, v_2, \dots, v_n$. Así se demuestra lo siguiente:

Teorema: Sean $V|K$, $v_1, v_2, \dots, v_n \in V$
El conjunto $\mathcal{L}\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ formado por todas las combinaciones lineales de $v_1, v_2, \dots, v_n$ es un subespacio vectorial de V y además es el menor de todos los subespacios que contienen a los vectores $v_1, v_2, \dots, v_n$.

Definición: Sean $V|K$ y $v_1, v_2, \dots v_n \in V$. Al subespacio $\mathcal{L}\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ se le llama espacio generado por los vectores $v_1, v_2, \dots, v_n$.

Algunas propiedades del espacio generado son:
1.- $S \subset \mathcal{L}(S)$
2.- Si S es espacio vectorial, entonces $\mathcal{L}(S) = S$

Ejemplos: Probar que:
1.- $\mathcal{L}\{[2,1],[-1,2]\} = R^2$
$\mathcal{L}\{[2,1],[-1,2]\} = R^2 \leftrightarrow \mathcal{L}\{[2,1],[-1,2]\} \subset R^2 \wedge R^2 \subset \mathcal{L}\{[2,1],[-1,2]\}$

Vemos que $\{[2,1],[-1,2]\} \subset R^2 \rightarrow \mathcal{L}\{[2,1],[-1,2]\} \subset \mathcal{L} R^2$
$\therefore \mathcal{L}\{[2,1],[-1,2]\} \subset R^2$

Para la otra contención:
Sean $[x, y] \in R^2$ arbitrarios y $c_1, c_2 \in R$ (por determinarse) tales que:

$$[x, y] = c_1[2, 1] + c_2[-1, 2]$$
$$[x, y] = [2c_1, c_1] + [-c_2, 2c_2]$$
$$[x, y] = [2c_1 - c_2, c_1 + 2c_2]$$

Por igualdad de vectores:

$$2c_1 - c_2 = x$$
$$c_1 + 2c_2 = y$$

En forma matricial, al resolver

$$\left[\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & x \\ 1 & 2 & y \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 0 & -5 & x-2y \\ 1 & 2 & y \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & \frac{2y-x}{5} \\ 1 & 2 & y \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & \frac{2y-x}{5} \\ 1 & 0 & \frac{2x+y}{5} \end{array}\right]$$

Como $\exists\ c_1, c_2 \in R \rightarrow R^2 \subset \mathcal{L}\{[2,1], [-1,2]\}$ y

$$\therefore \mathcal{L}\{[2,1], [-1,2]\}$$

Igualdad de Conjuntos
Definición: Sean A y B conjuntos

$$A = B \text{ si y sólo si } A \subset B \wedge B \subset A$$

Dependencia e Independencia Lineal
Se vio que $\mathcal{L}\{[2,1], [-1,2]\} = R^2$
Ahora pensemos en un vector muy "especial": el vector nulo.
Para construir el cero en el ejemplo anterior:

$$c_1[2,1] + c_2[-1,2] = [0,0]$$
$$\rightarrow [2c_1 - c_2, c_1 + 2c_2] = [0,0]$$

Por igualdad de vectores:

$$\begin{aligned} 2c_1 - c_2 &= 0 \\ c_1 + 2c_2 &= 0 \end{aligned} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Este sistema tiene solución única si el determinante de la matriz de coeficientes es diferente de cero.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}$$
$$= 1 - 4 = -3$$

Luego, la única solución del sistema es:

$$c_1 = 0, \qquad c_2 = 0$$

Definición: $V|K$

Sean $v_1, v_2, \dots v_n \in V$ se dice que estos vectores son linealmente independientes si se cumple

$$\sum_{k=1}^{n} c_k v_k = 0 \rightarrow c_k = 0, \ \forall k = 1, 2, \dots, n$$

En caso contrario se dirá que los vectores son linealmente dependientes, es decir, si existen escalares $c_1, c_2, \dots, c_n \in K$ con al menos uno de ellos diferente de cero tal que

$$\sum_{k=1}^{n} c_k v_k = 0$$

Nótese que no existe distinción en "los vectores $v_1, v_2, \dots, v_n$ son L.I. (o L.D.)" y "el conjunto $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ es L.I. (o L.D.)"

Con esta definición, el ejemplo previo es L.I.

Teorema: Sean $v_1, v_2, \dots, v_n \in V$ $(n \geq 2)$. Se dice que tales vectores son L.D. si y sólo si al menos uno de ellos puede escribirse como combinación lineal de los $n-1$ vectores restantes.

Teorema: Sean $v_1, v_2, \dots, v_n \in V$ con V un espacio vectorial sobre un campo K

i. Si $v_i = v_j$, $i \neq j$, $i, j = 1, 2, \dots, n$. Los vectores son L.D.

ii. Si $\exists i$, $1 \leq i \leq n \ni v_i = 0$. Los vectores son L.D.

iii. Si $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ es L.I. Cualquier subconjunto de él es L.I.

iv. Si $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ es L.D. Para cualquiera vectores $w_1, w_2, \dots, w_m$ el conjunto $\{v_1, v_2, \dots, v_n, w_1, w_2, \dots, w_m\}$ es L.D.

Ahora consideremos $\mathbb{R}^n$. Sean $v_1, v_2, \ldots, v_m \in \mathbb{R}^n$
Siempre que $m > n$ los vectores son L.D.

Teorema: Sean $v_1, v_2, \ldots v_n \in \mathbb{R}^n$ donde $v_k = (a_{1k}, a_{2k}, \ldots, a_{nk})$, $\forall k = 1, 2, \ldots, n$ y consideremos la matriz $A = [a_{ij}]$ (la matriz cuya j-ésima columna está constituida por las coordenadas del j-ésimo vector) entonces los vectores $v_1, v_2, \ldots, v_n$ son L.D. si y sólo si $\det(A) = 0$

Base y Dimensión

Definición: Sean $V|K$ y $\beta = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ un subconjunto del espacio vectorial V. Se dice que β es base de V si:

i) β es linealmente independiente

ii) El espacio generado por β es V, esto es $V = \mathcal{L}(\beta)$

Con esta definición es fácil probar que:

1- $\{[1,0], [0,1]\}$ es base para $\mathbb{R}^2$

2- $\{[1,0,0], [0,1,0], [0,0,1]\}$ es base para $\mathbb{R}^3$

3- $\{1, x, x^2\}$ es base para $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$

4- $\left\{\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0 & 1\\0 & 0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0 & 0\\1 & 0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}\right\}$ es base para $M_{2\times2}(\mathbb{R})$

Definición: Sea $V|K$. Si V posee una base formada por un número finito de vectores; se dice que V es un espacio de dimensión finita. De lo contrario, se dice que V es un espacio de dimensión infinita

Consideremos $V|K$ y $\beta = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ una base para V. De la definición: β es LI y además $V = \mathcal{L}(\beta)$, esto quiere decir que todo vector de V es combinación lineal de los vectores que están en β, en símbolos escribimos:

$$v = \sum_{k=1}^{n} c_k v_k, \quad \forall v \in V$$

En primer lugar diremos que dicha representación es única, más aún veremos que esta unicidad en la representación de v caracteriza el hecho de que β es base de V

Teorema: Sean $V|\mathbb{K}$ y $\beta \subset V$. Se dice que $\beta = \{v_1, v_2, \dots v_n\}$ es base de V si y sólo si cada vector en V de manera única es una combinación lineal de los vectores de β

Teorema: Sean $V|\mathbb{K}$. Supongamos que $\mathcal{L}\{v_1, v_2, \dots, v_n\} = V$, entonces cualquier conjunto L.I. en V es finito y no tiene más de n vectores

Corolario: Sea $V|\mathbb{K}$, donde V es de dimensión finita. Cualesquiera dos bases β_1, β_2 de V tienen el mismo número de vectores

Definición: Sea $V|\mathbb{K}$ con V de dimensión finita. Se define la dimensión de V que denotamos como $\dim(V)$, como el número de vectores en alguna (y por tanto, de cualquier) base de V

Ejemplos:

1.- $\{[1,0], [0,1]\}$ es base para $\mathbb{R}^2 \rightarrow \dim(\mathbb{R}^2) = 2$

2.- $\{[1,0,0], [0,1,0], [0,0,1]\}$ es base para $\mathbb{R}^3 \rightarrow \dim(\mathbb{R}^3) = 3$

3.- $\{1, x, x^2\}$ es base para $\mathbb{P}_2(\mathbb{R}) \rightarrow \dim(\mathbb{P}_2(\mathbb{R})) = 3$

4.- $\left\{\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0 & 1\\0 & 0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0 & 0\\1 & 0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}\right\}$ es base para $M_{2\times2}(\mathbb{R}) \rightarrow \dim(M_{2\times2}(\mathbb{R})) = 4$

Veamos un resultado que establece conexiones entre los conceptos "conjunto generador", "conjunto L.I." y "Base" que facilita la tarea de verificar si un conjunto dado es base para un espacio vectorial. Dos resultados que nos ayudarán a demostrar dicho teorema son:

Lema: Sea $S=\{v_1, v_2, \dots, v_n\} \ni \mathcal{L}(S)=V$ con $V|\mathbb{K}$. Si existe v_j en V para $1 \leq j \leq n$ tal que v_j es elemento de $\mathcal{L}(S\setminus\{v_j\})$, entonces $\mathcal{L}(S\setminus\{v_j\})=\mathcal{L}(S)$

Lema: Sean $V|\mathbb{K}$ y $S=\{v_1, v_2, \dots, v_n\} \subset V$ L.I. Si $\exists v \in V \ni v \notin \mathcal{L}(S)$ entonces el conjunto $S'=S\cup\{v\}$ es L.I.

Teorema: Sea $V|\mathbb{K}$, $\dim(V)<\infty$

I.- Cualquier conjunto de generadores contiene una base para V

II.- Si $\dim(V)=n$, $\{u_1, u_2, \dots, u_m\} \subset V$ que es L.I., $m<n$, entonces $\exists n$ $v_1, v_2, \dots, v_{n-m} \in V \ni \{u_1, u_2, \dots, u_m, v_1, v_2, \dots, v_{n-m}\}$ es base para V

Ojo: La segunda parte del teorema nos dice "todo conjunto L.I. en un espacio vectorial de dimensión finita puede ser completado hasta formar una base para dicho espacio vectorial"

Ejemplos: De los conjuntos dados, extraer una base para el espacio vectorial que los contiene

1.- $\{[1,3,0], [4,1,2], [-2,5,-2]\}$

Sean $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$ (por determinarse) tales que:

$$c_1[1,3,0]+c_2[4,1,2]+c_3[-2,5,-2]=[0,0,0]$$

$$[c_1+4c_2-2c_3,\ 3c_1+c_2+5c_3,\ 2c_2-2c_3]=[0,0,0]$$

Que por igualdad de vectores tenemos:

$$\begin{aligned} c_1 + 4c_2 - 2c_3 &= 0 \\ 3c_1 + c_2 + 5c_3 &= 0 \\ 2c_2 - 2c_3 &= 0 \end{aligned} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 3 & 1 & 5 \\ 0 & 2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & -2 & 0 \\ 3 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \rightarrow \begin{aligned} c_1 + 2c_3 &= 0 \\ c_2 - c_3 &= 0 \end{aligned} \rightarrow \begin{aligned} c_1 &= -2c_3 \\ c_2 &= c_3 \end{aligned}$$

De esta manera el vector solución es $[-2c_3, c_3, c_3]$, es decir $c_3[-2,1,1]$.

Donde si $c_3 = 1 \rightarrow c_1 = -2 \quad c_2 = 1$ y en este caso

$$-2[1,3,0] + [4,1,2] + [-2,5,-2] = 0$$

De donde

$$[-2,5,-2] = 2[1,3,0] - [4,1,2]$$

y

$$\mathcal{L}\{[1,3,0],[4,1,2],[-2,5,-2]\} = \mathcal{L}\{[1,3,0],[4,1,2]\}$$

Vemos que:

$$\mathcal{L}\{[1,3,0],[4,1,2]\} = \{a_1[1,3,0] + a_2[4,1,2]\}$$
$$= \{[a_1+4a_2, 3a_1+a_2, 2a_2] \mid x = a_1+4a_2,\ y = 3a_1+a_2,\ z = 2a_2\}$$
$$= \{[a_1+4a_2, 3a_1+a_2, 2a_2] \mid x = a_1+2z,\ y = 3a_1+\tfrac{z}{2},\ \tfrac{z}{2} = a_2\}$$
$$= \{[a_1+4a_2, 3a_1+a_2, 2a_2] \mid x-2z = a_1,\ 2y = 6a_1+z,\ \tfrac{z}{2} = a_2\}$$
$$= \{[a_1+4a_2, 3a_1+a_2, 2a_2] \mid x-2z = a_1,\ 2y = 6(x-2z)+z,\ \tfrac{z}{2} = a_2\}$$
$$\mathcal{L}\{[1,3,0],[4,1,2]\} = \{[x,y,z] \mid 6x - 2y - 11z = 0\}$$

Claramente $[0,0,0] \in \mathcal{L}\{[1,3,0],[4,1,2]\}$ y para obtener este valor es claro que $a_1 = a_2 = 0$ y no hay otros valores de a_1, a_2 que den la igualdad, así:

$$S_1 = \{[1,3,0],[4,1,2]\}$$

es L.I.

Es evidente que $[0,1,0] \notin \mathcal{L}\{[1,3,0],[4,1,2]\}$ pues si el vector estuviera, se cumpliría que

$$6(0) - 2(1) - 11(0) = 0$$

lo cual es una contradicción.

Luego el segundo lema garantiza que

$$\beta = S_1 \cup \{[0,1,0]\} = \{[1,3,0],[4,1,2],[0,1,0]\} \text{ es L.I.}$$

y el teorema garantiza que es base para $\mathbb{R}^3$

Espacio renglón, espacio columna, rango y nulidad de una matriz

En las aplicaciones del álgebra lineal, los subespacios de $\mathbb{R}^n$ generalmente se presentan en una de dos maneras:

1.- Como el conjunto de todas las soluciones a un sistema de ecuaciones lineales homogéneas

2.- Como el conjunto de todas las combinaciones lineales de ciertos vectores específicos

Pues, consideremos

$$\begin{matrix} x_1 - 3x_2 - 2x_3 = 0 \\ -5x_1 + 9x_2 + x_3 = 0 \end{matrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -3 & -2 \\ -5 & 9 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

El cual tiene por conjunto solución

$$S = \left\{ \left[-\frac{5}{2}x_3, -\frac{3}{2}x_3, x_3 \right] \middle| \, x_3 \in \mathbb{R} \right\}$$

Definición: El espacio nulo de una matriz $A \in \mathbb{M}_{n \times n}$ que denotamos con $\text{Nul}\, A$ ó N_A es el conjunto de todas las soluciones de la ecuación homogénea $AX = 0$ esto es:

$$\text{Nul}\, A = N_A = \{ X \mid X \in \mathbb{R}^n \wedge AX = 0 \}$$

Ejemplos: Determinar el espacio nulo de las siguientes matrices:

1.- $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix}$

Vemos que

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 3 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right] \rightarrow \begin{matrix} x_1 + x_3 = 0 \\ x_2 - x_3 = 0 \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} x_1 = -x_3 \\ x_2 = x_3 \end{matrix}$$

$$\rightarrow S = \{ [-x_3, x_3, x_3] \mid x_3 \in \mathbb{R} \} = \{ x_3 [-1, 1, 1] \mid x_3 \in \mathbb{R} \}$$

Entonces $N_A = \mathcal{L}\{[-1, 1, 1]\}$

2.- $B = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & -2 & 6 \\ -6 & 3 & -9 \end{bmatrix}$

Vemos que

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 3 & 0 \\ 4 & -2 & 6 & 0 \\ -6 & 3 & -9 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \to 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 0$$

$$\to x_2 = 2x_1 + 3x_3$$

$$S = \{[x_1, 2x_1 + 3x_3, x_3] \mid x_1, x_3 \in \mathbb{R}\}$$
$$= \{[x_1, 2x_1, 0] + [0, 3x_3, x_3] \mid x_1, x_3 \in \mathbb{R}\}$$
$$= \{x_1[1, 2, 0] + x_3[0, 3, 1] \mid x_1, x_3 \in \mathbb{R}\}$$
$$= \mathcal{L}\{[1, 2, 0], [0, 3, 1]\}$$

Así: $N_B = \mathcal{L}\{[1, 2, 0], [0, 3, 1]\}$

Definición: Sea $A \in \mathbb{M}_{n\times n}$. A la dimensión del espacio nulo, la cual se denota con $\nu(A)$ se le conoce como la nulidad de A.
Así, de los ejemplos anteriores:
1.- $\nu(A) = 1$
2.- $\nu(B) = 2$

Teorema: Sea $A \in \mathbb{M}_{n\times n}$. A es invertible si y sólo si $\nu(A) = 0$

Teorema: Sea $A \in \mathbb{M}_{n\times n}$. N_A es subespacio de $\mathbb{R}^n$

Demostración: Sean $x_1, x_2 \in N_A$, $\alpha \in \mathbb{R}$
Claramente
i) $0 \in N_A$ pues $A0 = 0$
ii) $(x_1 + x_2) \in N_A$ pues $A(x_1 + x_2) = Ax_1 + Ax_2 = 0 + 0 = 0$
iii) $\alpha x_1 \in N_A$ pues $A(\alpha x_1) = \alpha(Ax_1) = \alpha(0) = 0$

Q E D

Definición: Sea $A \in \mathbb{M}_{m\times n}$. La imagen de la matiz A es el conjunto dado por:

$$Im(A) = \{y \in \mathbb{R}^m \mid Ax = y, \text{ para algún } x \in \mathbb{R}^n\}$$

Teorema: Sea $A \in \mathbb{M}_{m\times n}$. $Im(A)$ es subespacio de $\mathbb{R}^m$

Definición: Sea $A \in \mathbb{M}_{m\times n}$. El rango de la matriz A, que denotamos con $\rho(A)$ es dado por:
$$\rho(A) = \dim(\operatorname{Im}(A))$$

Definición: Sean $A \in \mathbb{M}_{m\times n}$ y $\{r_1, r_2, \dots, r_m\}$ los renglones de A y $\{c_1, c_2, \dots, c_n\}$ las columnas de A

1.- El espacio de renglones de la matriz A es dado por
$$R_A = \mathcal{L}\{r_1, r_2, \dots, r_m\}$$
2.- El espacio de columnas de la matriz A es dado por
$$C_A = \mathcal{L}\{c_1, c_2, \dots, c_n\}$$

Teorema: Sea $A \in \mathbb{M}_{m\times n}$. Se cumple que $C_A = \operatorname{Im}(A)$

Ejemplos: Para las siguientes matrices, calcular N_A, R_A, C_A, $\nu(A)$, $\rho(A)$

1.-
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 2 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 3 \end{bmatrix}$$

Vemos que
$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 3 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \rightarrow \begin{array}{l} x_1 + 2x_3 + x_4 = 0 \\ x_2 + x_3 + x_4 = 0 \end{array}$$

$$\rightarrow \begin{array}{l} x_1 = -2x_3 - x_4 \\ x_2 = -x_3 - x_4 \end{array}$$

El conjunto solución es:
$$\{[x_1, x_2, x_3, x_4] \mid x_1 = -2x_3 - x_4,\ x_2 = -x_3 - x_4,\ x_3, x_4 \in \mathbb{R}\}$$
$$= \{[-2x_3 - x_4, -x_3 - x_4, x_3, x_4] \mid x_3, x_4 \in \mathbb{R}\}$$
$$= \{[-2x_3, -x_3, x_3, 0] + [-x_4, -x_4, 0, x_4] \mid x_3, x_4 \in \mathbb{R}\}$$
$$= \{x_3[-2, -1, 1, 0] + x_4[-1, -1, 0, 1] \mid x_3, x_4 \in \mathbb{R}\}$$
$$= \mathcal{L}\{[-2, -1, 1, 0], [-1, -1, 0, 1]\}$$

Entonces $\underline{\nu(A) = 2}$

Por otro lado

$$A^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Vemos que

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 1 & 3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

De esta manera

$$C_A = \mathcal{L}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} = Im(A) \longrightarrow \rho(A) = 2$$

Entonces

$$N_A = \mathcal{L}\{[-2,-1,1,0],[-1,-1,0,1]\}, \quad \nu(A) = 2$$

$$Im(A) = \mathcal{L}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}, \quad \rho(A) = 2$$

Teorema: Sea $A \in \mathbb{M}_{m \times n}$, entonces $\dim(R_A) = \dim(C_A) = \dim(Im(A)) = \rho(A)$

Teorema: Sean $A, B \in \mathbb{M}_{m \times n}$, si A es equivalente por renglones a B, entonces $R_A = R_B$, $\rho(A) = \rho(B)$, $\nu(A) = \nu(B)$

Teorema: Sea $A \in \mathbb{M}_{m \times n}$, entonces $\rho(A) + \nu(A) = n$

Cambio de Base.

Hemos visto que cada vector en $\mathbb{R}^n$ puede ser expresado en términos de la base canónica $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ donde $e_i = [0, 0, \dots, \underset{i-1}{0}, \underset{i}{1}, \underset{i+1}{0}, \dots, 0]$

Normalmente las bases canónicas se utilizan por su sencillez al trabajar con alguna otra base, esto en virtud de que cada espacio vectorial tiene un número infinito de ellas

Definición: Sean $V|\mathbb{K}$ con $\dim(V)=n$ y $\beta_1=\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ una base de V. Definimos al vector $[c_1, c_2, \dots, c_n]$ con $C_k \in \mathbb{K}$ $k=1,2,\dots,n$, el vector de coordenadas del vector v respecto de la base β donde

$$v=\sum_{k=1}^{n} c_k v_k, \quad \forall v \in V$$

Y denotamos:

$$[v]_{\beta_1}=[c_1, c_2, \dots, c_n]$$

Nótese que $[v]_{\beta_1}$ es una matriz de $n\times 1$ más que un vector en $\mathbb{K}^n$.
Ahora si $\beta_2=\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ también es base de V, como $\beta_2 \subset V$ cada vector de β_2 se puede escribir como combinación lineal de los vectores en β_1 y al revés, cada vector en β_1 se puede escribir como combinación lineal de los vectores en β_2.
Así por ejemplo:

$$u_i=\sum_{j=1}^{n} a_{ij} v_j \quad \forall i=1,2,\dots,n$$

y

$$[u_i]_{\beta_1}=[a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in}], \quad i=1,2,\dots,n$$

Vemos que:

$$u_1=\sum_{j=1}^{n} a_{1j} v_j = a_{11} v_1 + a_{12} v_2 + \dots + a_{1n} v_n$$

$$u_2=\sum_{j=1}^{n} a_{2j} v_j = a_{21} v_1 + a_{22} v_2 + \dots + a_{2n} v_n$$

$$v_3 = \sum_{j=1}^{n} a_{nj} v_j = a_{n1} v_1 + a_{n2} v_2 + \dots + a_{nn} v_n$$

Y notemos que

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}$$

Así tenemos un sistema de ecuaciones $Ax = b$, donde

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix}$$

Si denotamos con

$$P = A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Definición: A la matriz P, donde la i-ésima columna es el vector de coordenadas del i-ésimo vector en β_2 (que es una combinación lineal de los vectores en β_1) se le llama matriz de transición (o matriz de cambio de base) de β_1 a β_2. Y escribimos:

$$P = [p]_{\beta_2}^{\beta_1}$$

Ejemplos:

a) Si $\beta_1 = \{[1,0],[0,1]\}$, $\beta_2 = \{[1,3],[-1,2]\}$ determinar la matriz de transición de β_1 a β_2

Sean $a_1, a_2 \in \mathbb{R} \ni [x,y] = a_1[1,3] + a_2[-1,2]$

$$= [a_1 - a_2, 3a_1 + 2a_2]$$

$$\forall [x,y] \in \mathbb{R}_2$$

Por igualdad de vectores:

$$a_1 - a_2 = x$$
$$3a_1 + 2a_2 = y \rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & x \\ 3 & 2 & y \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & x \\ 0 & 5 & y-3x \end{array}\right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \frac{2x+y}{5} \\ 0 & 1 & \frac{y-3x}{5} \end{array}\right]$$

Así:

$$[[x, y]]_{\beta_2} = \begin{bmatrix} \frac{2x+y}{5} \\ \frac{y-3x}{5} \end{bmatrix}$$

De esta manera:

$$[[1, 0]]_{\beta_2} = \begin{bmatrix} \frac{2}{5} \\ -\frac{3}{5} \end{bmatrix}$$

y

$$[[0, 1]]_{\beta_2} = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} \end{bmatrix}$$

Así, la matiz que buscamos es:

$$P = \begin{bmatrix} \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \\ -\frac{3}{5} & \frac{1}{5} \end{bmatrix} \overset{?}{=} [p]_{\beta_2}^{\beta_1}$$

Ojo: Si se cambia el orden en que se acomodan los vectores de coordenadas, entonces también se cambia el orden de las columnas en la matiz de transición

¿Para qué se utiliza esta matiz?

Por ejemplo

$$[3, 4] = 3[1, 0] + 4[0, 1] \rightarrow [[3, 4]]_{\beta_1} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Luego

$$[[3, 4]]_{\beta_2} = \begin{bmatrix} \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \\ -\frac{3}{5} & \frac{1}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Y calculando con la "fórmula del vector de coordenadas

$$[[3, 4]]_{\beta_2} = \begin{bmatrix} \frac{2(3)+4}{5} \\ \frac{4-3(3)}{5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Esto implica que

$$[3, 4] = 2[1, 3] - [-1, 2]$$

Teorema: Sean β_1, β_2 bases para $V|\mathbb{K}$ con $\dim(V) < \infty$.
Sea $P = [p]_{\beta_1}^{\beta_2}$, entonces

$$[v]_{\beta_1} = [p]_{\beta_1}^{\beta_2} [v]_{\beta_2}$$

Teorema: Si $P = [p]_{\beta_1}^{\beta_2}$, entonces $Q = P^{-1} = [q]_{\beta_2}^{\beta_1}$

Transformaciones Lineales

Definición: Sean U, V espacios vectoriales sobre $\mathbb{K}$
Se dice que una función $T: U \to V$ es una transformación lineal si cumple que:

I. $\forall x_1, x_2 \in U$, $T(x_1 + x_2) = T(x_1) + T(x_2)$

II. $\forall x_1 \in U$ y $\forall \alpha \in \mathbb{K}$, $T(\alpha x_1) = \alpha T(x_1)$

Nota: Al conjunto U se le conoce como dominio de la función y al conjunto V como el contradominio de la función

Ojo:

I: En el caso particular de que $V = U$ se dice que T es un operador lineal

II: Una transformación lineal es una función "que preserva las operaciones de espacio vectorial"

Definición: Sean U, V espacios vectoriales sobre $\mathbb{K}$
La función $T: U \to V$ se dice una transformación lineal si

$$T(\alpha x_1 + \gamma x_2) = \alpha T(x_1) + \gamma T(x_2), \ \forall x_1, x_2 \in U, \ \forall \alpha, \gamma \in \mathbb{K}$$

Teorema: Sean U, V espacios vectoriales sobre $\mathbb{K}$ y $T: U \to V$ una T.L.
Las dos definiciones anteriores son equivalentes.

Propiedades de las Transformaciones Lineales

Teorema: Sea $T: U \to V$ una T.L.
Se cumple que:

I. $T(0_U) = 0_V$

II. Si $W \subset U$ es subespacio, $T(W) = \{T(v) \mid v \in W\}$ es subespacio de V

III. $T(-v) = -T(v) \quad \forall v \in U$

Teorema: Sea $T: U \to V$ una T.L. Si $E \subset U$, entonces $T(\mathcal{L}(E)) = \mathcal{L}(T(E))$

Teorema: Sean $U, V | \mathbb{K}$. Si $\dim(U) < \infty$ y $\beta = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ es base de U entonces para cualquier $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\} \subset V$ (no necesariamente es una base) $\exists!\, T: U \to V$ lineal tal que $T(u_k) = v_k \quad \forall\, k = 1, 2, \ldots, n$

Corolario: Sean $U, V | \mathbb{K}$. Si $\dim(U) < \infty$ y $\beta = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ es base de U y $T_1(u_k) = T_2(u_k)$ con T_1, T_2 T.L. entonces $T_1 = T_2$

Núcleo e Imagen de una Transformación Lineal

Definición: Sea $T: U \to V$ una T.L.

I. El núcleo de la T.L. el cual denotamos con $\mathrm{Ker}(T)$ es el conjunto dado por $\{u \in U \mid T(u) = 0\}$

II. La imagen de la T.L. la cual denotamos con $\mathrm{Im}(T)$ es el conjunto dado por $\{v \in V \mid \exists\, u \in U \ni T(u) = v\}$

Teorema: Sean $U, V | \mathbb{K}$ y $T: U \to V$ una T.L., entonces $\mathrm{Ker}(T)$ e $\mathrm{Im}(T)$ son subespacios de U y V respectivamente

Definición: Sean $U, V | \mathbb{K}$ y $T: U \to V$ una T.L. con $\dim(U) < \infty$

I. La dimensión del núcleo se le conoce como la nulidad de la transformación lineal y se representa por $\nu(T)$

II. La dimensión de la imagen se le conoce como el rango de la transformación lineal y se representa por $\rho(T)$

Teorema: $U, V | \mathbb{K}$ y $T: U \to V$ una T.L.
Se cumple que $\nu(T) + \rho(T) = \dim(U)$