Álgebra Lineal

Editorial McGraw Hill

- Determinantes
  - Determinante de orden 3
  - Determinante de orden n en términos del Menor y Cofactor
  - Propiedades de los determinantes
  - Determinante de un producto de matrices
  - Regla de Cramer

1: Sistemas de Ecuaciones Lineales

Una gran parte de la teoría de álgebra lineal elemental es una generalización de las propiedades de la línea recta. Algunas propiedades sobre las líneas rectas son:

- La pendiente m de una recta que pasa por los puntos (x_1, y_1) y (x_2, y_2) está dada por:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\Delta y}{\Delta x} \quad \text{si} \quad x_1 \neq x_2$$

- Si $x_2 - x_1 = 0$ y $y_2 \neq y_1$, entonces la recta es vertical y se dice que la pendiente es indefinida
- Cualquier recta (excepto aquellas con pendiente indefinida) se puede describir con su ecuación en la forma pendiente - ordenada al origen $y = mx + b$, donde m es la pendiente de la recta y b es la ordenada al origen (el valor de y en el punto en el que la recta cruza el eje y)
- Dos rectas distintas son paralelas si y sólo si tienen la misma pendiente
- Si la ecuación de la recta se escribe en la forma $ax + by = c$, $(b \neq 0)$, entonces se puede calcular fácilmente la pendiente m, como $m = \frac{-a}{b}$

- Si m_1 es la pendiente de la recta L_1, m_2 es la pendiente de la recta L_2, $m_1 \neq 0$ y L_1 y L_2 son perpendiculares, entonces $m_2 = \dfrac{-1}{m_1}$
- Las rectas paralelas al eje x tienen pendiente cero
- Las rectas paralelas al eje y tienen pendiente indefinida

1.1: Dos ecuaciones lineales con dos incógnitas

Considere el siguiente sistema:

$$a_{11}x + a_{12}y = b_1$$
$$a_{21}x + a_{22}y = b_2$$

donde a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}, b_1 y b_2 son números dados. Cada una de estas ecuaciones corresponde a una línea recta. Cualquier par de números reales (x, y) que satisfaga el sistema se le llama solución.

Propiedad A: Si $a=b$ y $c=d$, entonces $a+c = b+d$
Propiedad B: Si $a=b$ y c es cualquier número real, entonces $ca = cb$

Ejemplo: Considere el sistema:

$$3x - 2y = 4$$
$$5x + 2y = 12$$

Si se suman las dos ecuaciones, por la propiedad A, se tiene $8x = 16$, es decir, $x = 2$, y si se despeja la segunda ecuación, se llega a $y = 1$, así, el par $(2, 1)$ satisface el sistema y la forma demuestra que tiene solución única

Ejemplo: Considere el sistema:

$$x - y = 7$$
$$2x - 2y = 14$$

Se observa que estas ecuaciones son equivalentes, pues, si se multiplica por 2 la primera ecuación, se obtiene la segunda, esto es posible por la propiedad B. Así $x - y = 7$ es igual a $y = x - 7$ y el par $(x, x-7)$ es solución al sistema para cualquier número real x y se dice que el sistema tiene un número infinito de soluciones

Ejemplo: Considere el sistema

$$x - y = 7$$
$$2x - 2y = 13$$

Si se multiplica la primera ecuación por 2, por la propiedad B, se obtiene $2x - 2y = 14$ que contradice a la segunda ecuación, por lo tanto, el sistema no tiene solución, a éstos se les llama inconsistentes

Teorema de resumen: El sistema:

$$a_{11}x + a_{12}y = b_1$$
$$a_{21}x + a_{22}y = b_2$$

de dos ecuaciones con dos incógnitas x, y no tiene solución, tiene una solución única o tiene un número infinito de soluciones

Ejercicio: Encuentre el punto de intersección (si hay uno) de las dos rectas

$$-x + 2y = 1$$
$$3x - 5y = 1$$

Por propiedad B: $\quad -3x + 6y = 3$
$\quad 3x - 5y = 1$

Por propiedad A: $\quad y = 4$

Sustituyendo en la ecuación 2:

$$3x - 5(4) = 1$$
$$3x - 20 = 1$$
$$3x = 21$$
$$x = 7$$

Por lo tanto, el par $(7, 4)$ es la única solución

Ejercicio: Encuentre el punto de intersección (si hay uno) de las dos rectas

$$-4x + 2y = -1$$
$$4x - 2y = 1$$

Multiplicando por -1 la ecuación 1

$$4x - 2y = 1 \rightarrow \text{ecuación } 2$$

Por lo tanto, son ecuaciones equivalentes

Despejando y: $\quad y = \dfrac{4x - 1}{2} = 2x - \frac{1}{2}$

Así, se halla que cualquier pareja $(x, 2x - \frac{1}{2})$ es solución, por lo que el sistema tiene infinitas soluciones

Ejercicio: Encuentre el punto de intersección (si hay uno) de las dos rectas

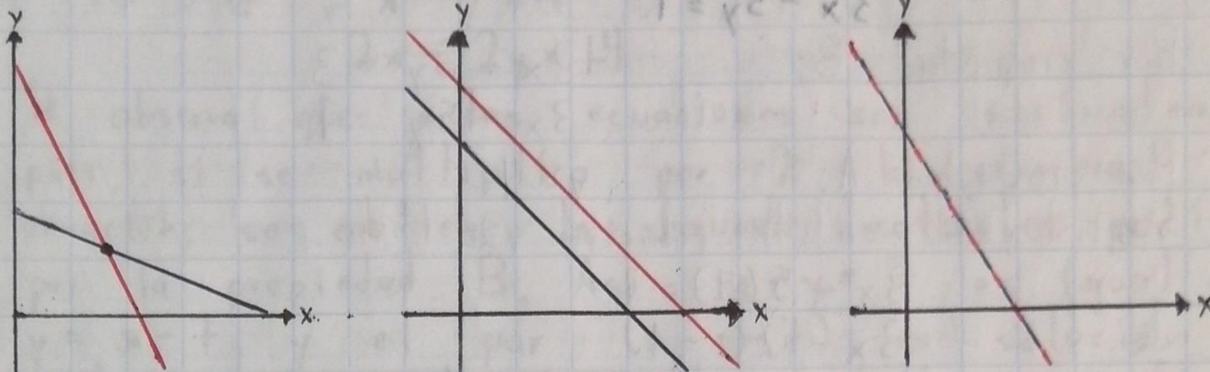
$$-4x + 2y = 1$$
$$4x - 2y = 1$$

Multiplicando por -1 la ecuación 1:

$$4x - 2y = -1$$

Contradice a la ecuación 2, por lo que el sistema es inconsistente

Su significado geométrico es el siguiente



Solución única — Sin solución — Infinitas soluciones

Ejercicio: Dado el sistema

$$a_{11}x + a_{12}y = b_1$$
$$a_{21}x + a_{22}y = b_2$$

Suponga que $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = 0$. Demuestre que las rectas dadas en el sistema de ecuaciones son paralelas. Suponga que $a_{11} \neq 0$ ó $a_{12} \neq 0$ y $a_{21} \neq 0$ ó $a_{22} \neq 0$

$$a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = 0 \to a_{11}a_{22} = a_{12}a_{21}$$

$$\to \frac{a_{22}}{a_{21}} = \frac{a_{12}}{a_{11}}$$

Lo anteior representa la pendiente de ambas ecuaciones, que son iguales

Ejercicio: En un zoológico hay aves (de dos patas) y bestias (de cuatro patas). Si el zoológico contiene 60 cabezas y 200 patas ¿cuántas aves y bestias viven en él?

$$2a + 4b = 200$$
$$a + b = 60$$

Se multiplica la segunda ecuación por -2, que resulta en:

$$2a + 4b = 200$$
$$-2a - 2b = -120$$

Se suman las ecuaciones

$$2b = 80$$
$$b = 40$$

Sustituyendo en la ecuación 2 original

$$a + b = 60$$
$$a + 40 = 60$$
$$a = 20$$

Los pares $(a, b) = (20, 40)$ satisfacen el sistema

Hay 20 aves y 40 bestias

1.2: m ecuaciones con n incógnitas: eliminación de Gauss - Jordan y gaussiana

Considere:

$$2x_1 + 4x_2 + 6x_3 = 18$$
$$4x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 24$$
$$3x_1 + x_2 - 2x_3 = 4$$

El método