Cálculo Integral

Grupo Patiio

Unidad 1: Teorema Fundamental del Cálculo

Aprendizajes Esperados:
- Aprender el concepto del término sumatorio y sus propiedades
- Aplicar la suma de Riemann como un método para el cálculo de áreas
- Conocer el teorema fundamental del cálculo

1.1 Notación Sumatoria

La operación de suma es un operador matemático que permite representar sumas de muchos términos ya sean naturales, complejos o en su caso objetos matemáticos más complicados.

Una sumatoria puede tener un número finito o infinito de términos que, si es así, se le llama suma infinita.

Propiedades de la notación sumatoria

Para dos sucesiones dadas por $x_1, x_2, x_3, x_4 \ldots$ y $y_1, y_2, y_3, y_4 \ldots$, para todo número n entero positivo y para cualquier número real c se cumple lo siguiente:

a) $$\sum_{i=1}^{n} (x_i + y_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i + \sum_{i=1}^{n} y_i$$

b) $$\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i - \sum_{i=1}^{n} y_i$$

c) $$\sum_{i=1}^{n} cx = c \sum_{i=1}^{n} x$$

Ejercicio: Resolver:

$$\sum_{k=1}^{4} \left(\frac{k}{2k+1} \right)$$

$$\frac{1}{2(1)+1} + \frac{2}{2(2)+1} + \frac{3}{2(3)+1} + \frac{4}{2(4)+1} = \frac{506}{315}$$

Ejercicio: Expresar la siguiente suma en notación de sumatoria y obtener el resultado

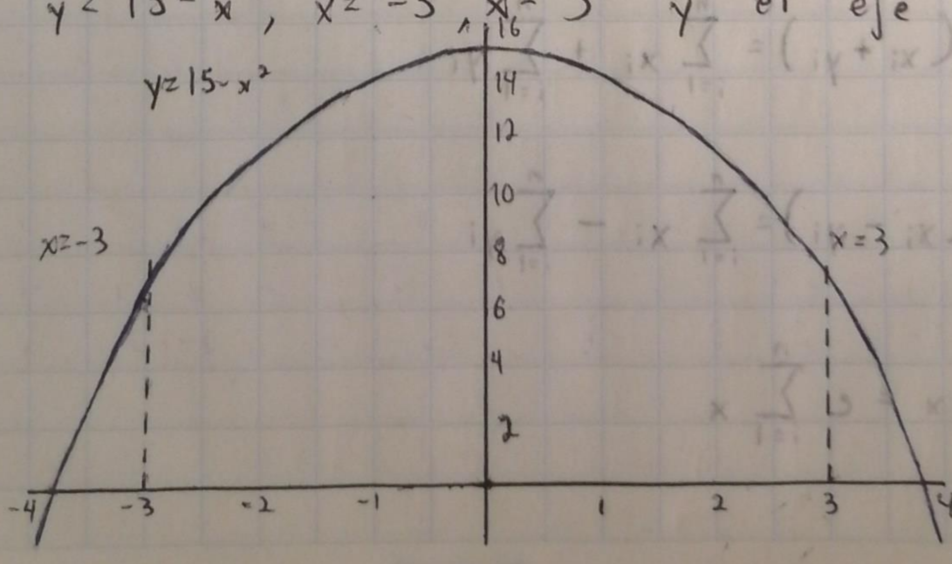
$$3+4+5+6+7$$

$$\sum_{x=3}^{7} x_i = 25$$

1.2 Suma de Riemann

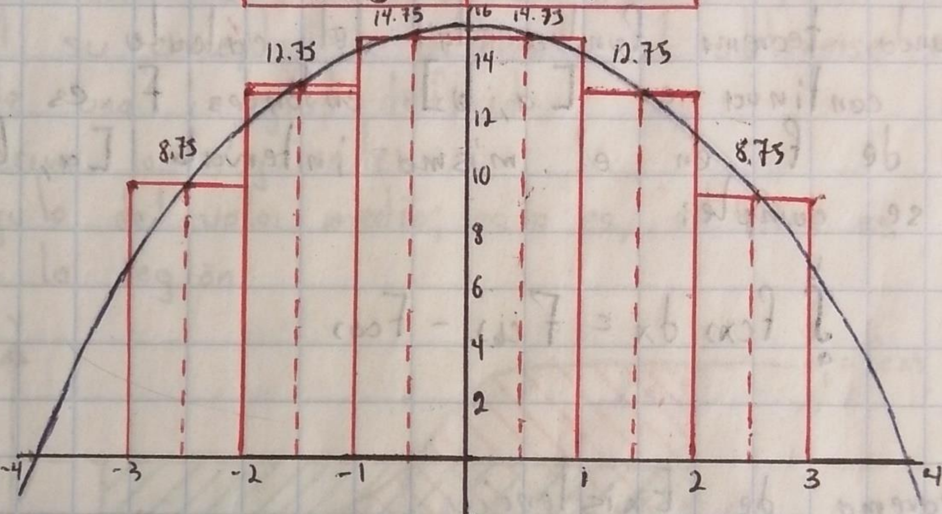
La suma de Riemann consiste en trazar un número finito de rectángulos dentro de un área irregular, calcular el área de cada uno de los rectángulos y sumarlas para obtener el área total. El problema de este método de integración numérica es que al sumar las áreas se puede obtener un margen de error muy amplio

Ejemplo: Calcular mediante sumas de Riemann el área de la región bordeada por la gráfica de las funciones $y = 15 - x^2$, $x = -3$, $x = 3$ y el eje x



Primero se divide al intervalo $[-3,3]$ en una partición de una unidad $(\Delta x = 1)$, con lo que se obtiene la serie de rectángulos a los cuales se calculará su área, para eso se sustituye el punto medio de la base de cada rectángulo en $y = 15 - x^2$ y se realiza una tabla:

x_i	$y_i = 15 - x^2$
± 2.5	8.75
± 1.5	12.75
± 0.5	14.75



Así, el área aproximada será la sumatoria de todos los rectángulos

$$Area = \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i \cdot y_i$$

$$2[(1)(8.75) + (1)(12.75) + (1)(14.75)]$$
$$72.5 \quad u^2$$

1.3 Primer teorema fundamental del cálculo

Sea una función $f(x)$ integrable en el intervalo $[a,b]$ es posible definir $F(x)$ sobre el mismo intervalo como:

$$F(x) = \int_a^x f(t)\, dt$$

Siempre que $f(x)$ sea continua en $c \in (a, b)$ entonces $F(x)$ es una función derivable en c y $F'(c) = f(c)$

De acuerdo a lo anterior se puede establecer el primer teorema del cálculo:

"La derivada y la integral de una función son operaciones inversas"

También se emplea el término antiderivada

1.4 Segundo teorema fundamental del cálculo

Si f es continua en $[a, b]$ entonces F es la antiderivada de f en el mismo intervalo $[a, b]$, con lo cual se cumple:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

1.5 Teorema de Existencia

El teorema fundamental del cálculo consiste en la afirmación de que la derivada y la integral son operaciones contrarias

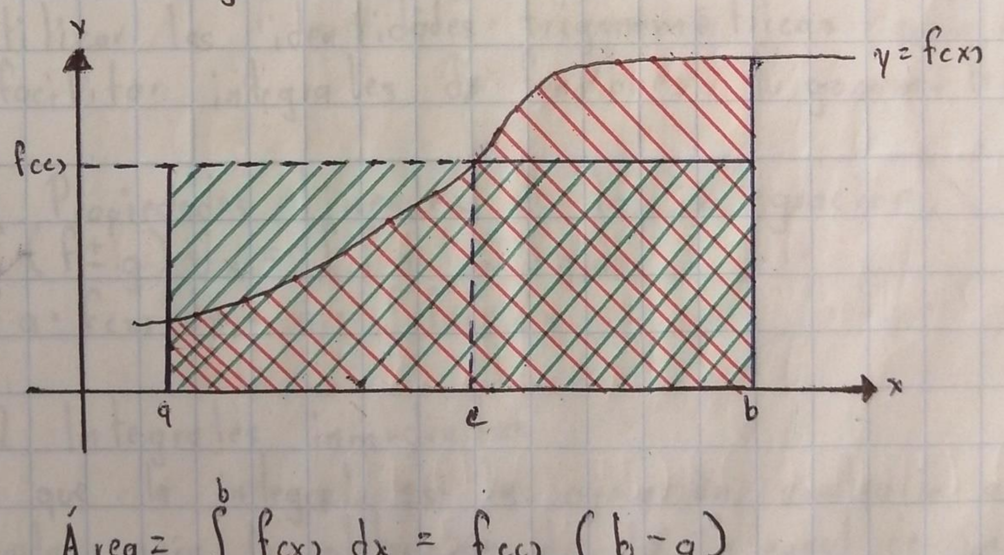
Hasta el siglo XVIII con ayuda de Newton y Leibniz ambas operaciones convergieron en una misma rama, pues se demostró que el estudio del área bajo una función estaba íntimamente relacionado al cálculo diferencial

1.6 Teorema del valor medio del cálculo integral

Sea una función real $y = f(x)$ que es continua en el intervalo $[a, b]$, entonces es posible afirmar que existe al menos un punto c perteneciente a dicho intervalo para el cual se cumple:

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(c)\,(b-a)$$

Donde al valor $f(c)$ se le conoce como el valor medio de la función $f(x)$ en el intervalo $[a, b]$.
Cabe aclarar que el punto c puede no ser único en el intervalo. Por otro lado, "valor medio de la función" no se refiere a una tasa de variación; hablando de integral su concepto es diferente al obtenerse este mediante una integral definida.
Se observa lo siguiente:
Rectángulo del valor medio; esto es, el área es igual que la de la región



$$\text{Área} = \int_a^b f(x)\,dx = f(c)\,(b-a)$$

El valor de $f(c)$ obtenido con este teorema proporciona una interpretación interesante asegurando que el rectángulo de altura $f(c)$ y base $(b-a)$ tendrá misma área que la región

Unidad 2: Métodos de Integración Parte 1

Aprendizajes Esperados:

- Aprender a resolver integrales inmediatas
- Aprender a realizar cambios de variable para la resolución de integrales no inmediatas
- Aprender a realizar cambios de variable para la resolucion de integrales de funciones exponenciales
- Identificar las condiciones para que una integral dé como resultado un logaritmo natural mediante un cambio de variable
- Aplicar un cambio de variable para resolver integrales trigonométricas
- Utilizar las identidades trigonométricas para simplificar y facilitar integrales de funciones trigonométricas

2.1 Propiedades lineales de la integración

- $\int (f \pm g)\, dx = \int f\, dx \pm \int g\, dx$
- $\int a \cdot f(x)\, dx = a \cdot \int f(x)\, dx$

2.2 Integrales inmediatas

Dado que la integral es la operación contraria a la derivada, para la obtención de la integral de una función se siguen los mismos pasos que para la obtención de la derivada, pero en sentido contrario y con la operación contraria. Esto se ve en la tabla siguiente:

Derivada	
a) Producto del coeficiente por el exponente b) Se le resta 1 al exponente	$\frac{d}{dx} mx^n = n \cdot mx^{n-1}$

Integral	
a) Se suma 1 al exponente b) El resultado de la suma divide al coeficiente c) Si es una integral indefinida se agrega la constante de integración	$m \cdot \int x^n dx = \frac{m}{n+1} x^{n+1} + C$

Lo anterior corresponde a la primera fórmula de integración, también llamada integral de monomios o integrales inmediatas

La única restricción de este método de integración es que el exponente debe ser diferente de -1

Alerta: Al contrario de la derivada, existen funciones que no son integrables por ningún método

Ejercicio: Resolver la siguiente integral

$$\int 8x^6 \, dx$$

$$8 \int x^6 \, dx$$

$$8 \cdot \frac{x^7}{7} = \frac{8x^7}{7} + c$$

Ejercicio: Resolver

$$\int ax^5 \, dx$$

$$a \int x^5 \, dx$$

$$a \cdot \frac{x^6}{6} + c = \frac{ax^6}{6} + c$$

Ejercicio: Resolver

$$\int (4x^3 + 3x^2 + 2x + 5) \, dx$$

$$4 \cdot \frac{x^4}{4} + \frac{3 \cdot x^3}{3} + \frac{2 \cdot x^2}{2} + 5 \cdot x + c$$

$$x^4 + x^3 + x^2 + 5x + c$$

Ejercicio: Resolver

$$\int (x^2-1)^2\,dx$$

$$\int (x^4-2x^2+1)\,dx$$

$$\frac{x^5}{5} - 2\cdot\frac{x^3}{3} + x$$

$$\frac{x^5}{5} - \frac{2x^3}{3} + x + c$$

Ejercicio: Resolver

$$\int \frac{dx}{x^3}$$

$$\int x^{-3}\,dx$$

$$\frac{x^{-2}}{-2} = -\frac{1}{2x^2} + c$$

Ejercicio: Resolver

$$\int \left(y^2 - \frac{1}{y^2}\right)^3 dy$$

$$\int \left(y^6 - 3y^2 + \frac{3}{y^2} - \frac{1}{y^6}\right) dy$$

$$\frac{y^7}{7} - \frac{3y^3}{3} + \frac{3y^{-1}}{-1} - \frac{y^{-5}}{-5}$$

$$\frac{y^7}{7} - y^3 - \frac{3}{y} + \frac{1}{5y^5} + c$$

Cuando el exponente es -1 da como resultado una indeterminación, por lo que se usa la siguiente fórmula: $\int \frac{du}{u} = \ln|u| + c$

Ejercicio: Resolver

$$\int \left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2 dx$$

$$\int \left(\frac{x-1}{\sqrt{x}}\right)^2 dx$$

$$\int \frac{(x-1)^2}{x}\,dx$$

$$\int \frac{x^2-2x+1}{x}\,dx = \int\left(x-2+\frac{1}{x}\right)dx$$

$$\int x\,dx - 2\int dx + \int \frac{dx}{x}$$

$$\frac{x^2}{2} - 2x + \ln|x| + c$$

2.3 Integral por cambio de variable

Este método de integración se emplea cuando la integral contiene el producto de dos polinomios, donde el polinomio de menor grado es la derivada del de mayor grado. A su vez, es posible que el polinomio de mayor grado tenga exponente y que el cambio de variable lo realice dicho polinomio, el cual se representa como u y se integra con la fórmula:

$$\int u^n\,du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C \quad \text{para} \quad n \neq -1$$

Dicha fórmula es prácticamente la misma que se emplea para integrales inmediatas, con la única diferencia de que se sustituye x por u, debido a que esta última representa al polinomio de mayor grado.
Para su solución, es común que se deba completar la integral para poder realizar el cambio de variable e integrar; posteriormente se regresa el cambio de variable nuevamente a x

Ejemplo: Resolver la siguiente integral

$$\int\left(\frac{\sqrt{5x}}{5}+\frac{5}{\sqrt{5x}}\right)dx$$

A pesar de que es posible resolver esta integral mediante una separación de la raíz $\sqrt{5x}$ en dos raíces $\sqrt{5}\ \sqrt{x}$, aquí se resolverá mediante cambio de variable

Se separa en dos integrales, la primera se expresa con exponente fraccionario y la segunda con exponente negativo

$$\int\frac{1}{5}(\sqrt{5x})^{1/2}dx+\int 5(\sqrt{5x})^{-1/2}dx$$

$$\frac{1}{5}\int(\sqrt{5x})^{1/2}dx+5\int(\sqrt{5x})^{-1/2}dx$$

El cambio de variable es el mismo en ambas integrales, por tanto se hace $u=5x$ sin considerar al exponente $\frac{1}{2}$ y se deriva con respecto a x, con lo cual se obtiene $\frac{du}{dx}=5$

Se separan las variables, de un lado la u y del otro x

$$du=5dx$$

De modo que

$$u=5x \qquad du=5dx$$

Con esta derivada se obtiene el término con el cual se ha de completar la integral, sin embargo, para que la integral original no resulte afectada también es necesario completar el "1" afuera de la integral

$$\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{5}\int\underbrace{(\sqrt{5x})^{1/2}}_{u^{1/2}}\underbrace{5dx}_{du}+\int\underbrace{(\sqrt{5x})^{-1/2}}_{u^{-1/2}}\underbrace{5dx}_{du}$$

Una vez completada la integral, se realiza el cambio de x a u, con lo cual, la integral se convierte en una integral inmediata en función de u

$$\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{5}\int u^{\frac{1}{2}}\,du + \int u^{-\frac{1}{2}}\,du$$

Se integra a dos monomios

$$\left(\frac{1}{25}\right)\frac{2}{3}\cdot u^{3/2} + 2u^{1/2}$$

$$\frac{2}{75}u^{3/2} + 2u^{1/2}$$

Recordemos que $u = 5x$, por lo que ahora procedemos a regresar el cambio de variable a x

$$\frac{2}{75}(5x)^{3/2} + 2(5x)^{1/2}$$

$$\frac{2\sqrt{(5x)^3}}{75} + 2\sqrt{5x}$$

Ejercicio: Resolver la siguiente integral

$$\int (2x-1)(x^2-x)^4\,dx$$

Si $u = x^2 - x$ entonces $du = (2x-1)\,dx$

$$\int u^4\,du$$

$$\frac{u^5}{5} + c$$

$$\frac{(x^2-x)^5}{5} + c$$

2.5 Integral de funciones exponenciales

A pesar de que se trate de integrar una función exponencial, es necesario realizar un cambio de variable. El cambio de variable lo realiza el exponente, se completa la integral y se hace el cambio de variable a u, luego se integra:

$$\int e^u\,du = e^u + c$$

y por último se regresa el cambio de variable

En el caso de que la base sea diferente al número e, por ejemplo una constante, la fórmula con la que se integra es:

$$\int a^u \, du = \frac{a^u}{\ln|a|} + c$$

Ejercicio: Resolver la siguiente integral

$$\int e^{4x} \, dx$$

$u = 4x \qquad du = 4\,dx$

$$\frac{1}{4}\int 4 e^{4x} \, dx$$

$$\frac{1}{4}\int e^u \, du = \frac{1}{4} \cdot e^{4x} + c$$

$$\frac{e^{4x}}{4} + c$$

Ejercicio: Resolver la siguiente integral

$$\int 5e^{ax} \, dx$$

$$5\int e^{ax} \, dx$$

$u = ax \qquad du = a\,dx$

$$\frac{5}{a}\int a e^{ax} \, dx = \frac{5}{a}\int e^u \, du = \frac{5}{a} \cdot e^{ax} + c$$

$$\frac{5e^{ax}}{a} + c$$

2.6 Integral de funciones que dan como resultado un logaritmo natural

Para identificar cuando una integral dará como resultado un logaritmo natural, es necesario que las siguientes condiciones se cumplan:

- La integral debe contener una fracción
- El denominador debe tener exponente uno, es decir, no estar dentro de paréntesis
- El numerador debe ser la derivada del denominador

El cambio de variable lo hace el denominador; se deriva, se completa la integral y se hace el cambio de variable a u, lo cual da como resultado:

$$\int \frac{du}{u} = \ln|u| + c$$

Esta se integra y se regresa el cambio de variable. Para simplificar los resultados, se hace uso de las leyes de los logaritmos:

- $\ln|a \cdot b| = \ln|a| + \ln|b|$
- $\ln\left|\frac{a}{b}\right| = \ln|a| - \ln|b|$
- $\ln|a^n| = n \ln|a|$

Ejemplo: Resolver la siguiente integral

$$\int \frac{dx}{3x+1}$$

$u = 3x+1 \qquad du = 3dx$

$$\frac{1}{3}\int \frac{3dx}{3x+1}$$

$$\frac{1}{3}\int \frac{du}{u} = \frac{1}{3}\ln|u| + c$$

$$\frac{1}{3}\ln|3x+1| + c$$

$$\ln\left|\sqrt[3]{3x+1}\right| + c$$

Ejercicio: Resolver la siguiente integral

$$\int \frac{x\,dx}{3x^2+4}$$

$$u = 3x^2+4 \qquad du = 6x\,dx$$

$$\frac{1}{6}\int \frac{6x\,dx}{3x^2+4} = \frac{1}{6}\int \frac{du}{u}$$

$$\therefore \frac{1}{6}\ln|u| + c \rightarrow \frac{1}{6}\ln|3x^2+4| + c$$

$$\rightarrow \ln\left|\sqrt[6]{3x^2+4}\right| + c$$

2.7 Integral de funciones trigonométricas

Para la integración de funciones trigonométricas, el cambio de variable se realiza sobre el ángulo, con lo cual se completa la integral. Se integra con la fórmula correspondiente

- $\int \operatorname{sen} u\,du = -\cos u + c$
- $\int \cos u\,du = \operatorname{sen} u + c$
- $\int \tan u\,du = \ln|\sec u| + c$
- $\int \cot u\,du = \ln|\operatorname{sen} u| + c$
- $\int \sec u\,du = \ln|\sec u + \tan u| + c$
- $\int \csc u\,du = \ln|\csc u - \cot u| + c$
- $\int \sec u \cdot \tan u\,du = \sec u + c$
- $\int \csc u \cdot \cot u\,du = -\csc u + c$
- $\sec^2 u\,du = \tan u + c$
- $\csc^2 u\,du = -\cot u + c$
- $\sec^2 u\,du = \frac{1}{2}\sec u \cdot \tan u + \frac{1}{2}\ln|\sec u + \tan u| + c$
- $\csc^2 u\,du = -\frac{1}{2}\csc u \cdot \cot u + \frac{1}{2}\ln|\csc u - \cot u| + c$

Para simplificar o facilitar la integración, por lo general se hace uso de las siguientes identidades trigonométricas

- $\operatorname{sen}\theta = \frac{1}{\csc\theta}$
- $\csc\theta = \frac{1}{\operatorname{sen}\theta}$
- $\tan\theta = \frac{1}{\cot\theta} = \frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}$
- $\cos\theta = \frac{1}{\sec\theta}$
- $\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta}$
- $\cot\theta = \frac{1}{\tan\theta} = \frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta}$

$$\begin{cases} \cos^2\theta + sen^2\theta = 1 \\ \cot^2\theta + 1 = \csc^2\theta \\ \tan^2\theta + 1 = \sec^2\theta \end{cases}$$

$sen^2\theta = \frac{1}{2}\cdot(1 - \cos 2\theta)$

$\cos^2\theta = \frac{1}{2}\cdot(1 + \cos 2\theta)$

$$\begin{cases} sen\, 2\theta = 2\, sen\,\theta \cdot \cos\theta \\ \cos 2\theta = \cos^2\theta - sen^2\theta \end{cases}$$

$\tan 2\theta = \dfrac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}$

$$\begin{cases} sen\,x \cdot \cos y = \frac{1}{2}\left[sen(x-y) + sen(x+y)\right] \\ sen\,x \cdot sen\,y = \frac{1}{2}\left[\cos(x-y) - \cos(x+y)\right] \\ \cos x \cdot \cos y = \frac{1}{2}\left[\cos(x-y) + \cos(x+y)\right] \end{cases}$$

Ejemplo: Resolver la siguiente integral

$$\int sen(3x)\,dx$$

$u = 3x \qquad du = 3\,dx$

$$\frac{1}{3}\int 3\cdot sen(3x)\,dx \rightarrow \frac{1}{3}\int sen\,u\,du$$

$= -\cos u + c$

$\therefore \frac{1}{3}\cdot -\cos(3x) + c$

$$-\frac{\cos(3x)}{3} + c$$

Ejercicio: Resolver la siguiente integral

$$\int \cos(-5x)\,dx$$

$u = -5x \qquad du = -5$

$$\frac{1}{-5}\int \cos(-5x)\cdot -5\,dx$$

$$-\frac{sen(-5x)}{5} + c$$

Ejercicio: Resolver la siguiente integral

$$\int 2x \operatorname{sen}(7x^2)\, dx$$

$u = 7x^2 \qquad du = 14x\, dx$

$$\frac{1}{7}\int 14x \operatorname{sen}(7x^2)\, dx$$

$$-\frac{\cos(7x^2)}{7} + c$$

Ejercicio: Resolver la siguiente integral

$$\int \cos^3 x\, dx$$

$$\int \cos^2 x \cdot \cos x\, dx$$

Como $\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1 \rightarrow \cos^2 x = 1 - \operatorname{sen}^2 x$

$$\int (1 - \operatorname{sen}^2 x) \cdot \cos x\, dx$$

$$\int \cos x - \operatorname{sen}^2 x \cdot \cos x\, dx$$

$$\underbrace{\int \cos x\, dx}_{A} - \underbrace{\int \operatorname{sen}^2 x \cdot \cos x\, dx}_{B}$$

$A = \int \cos x\, dx = \operatorname{sen} x + c$

$B = \int \operatorname{sen}^2 x \cdot \cos x\, dx$

$u = \operatorname{sen} x \qquad du = \cos x\, dx$

$$\int u^2\, du = \frac{u^3}{3} + c \rightarrow \frac{\operatorname{sen}^3 x}{3} + c$$

$$\operatorname{sen} x + \frac{\operatorname{sen}^3 x}{3} + c$$

Unidad 3: Métodos de Integración Parte 2

Aprendizajes Esperados:

- Identificar qué tipos de integrales no son posibles de solucionarse mediante un cambio de variable para resolverlas a través del método por partes
- Realizar los cambios de variable de forma apropiada al aplicar el método de integración por partes
- Aprender el manejo de fracciones parciales para la resolución de integrales que involucran fracciones y que no es posible resolver por cambio de variable
- Identificar en qué caso una integral puede resolverse mediante el empleo de fracciones parciales
- Hacer uso de la sustitución trigonométrica para simplificar integrales que no acepten cambio de variable
- Aprender a aplicar fórmulas de integración en la resolución de integrales que reúnen las características de este método

3.1 Integral por partes

Este método se basa en la integración de la derivada del producto de dos funciones:

$$\frac{d}{dx} u \cdot v = u \cdot v' + v \cdot u'$$

Ésta, al momento de integrarse y despejarse, da como resultado:

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

La anterior es la fórmula empleada en el método de integración por partes

A diferencia de los métodos en los cuales se aplica un cambio de variable para su resolución, el

método de integración por partes aplica un doble cambio de variable: u y dv
Esto es, se elige el término u, el cual se deriva para obtener du; por otro lado, los términos restantes de la integral conformarán a dv, mismo que se integra para obtener v

$$u \xrightarrow{\text{Se deriva para obtener}} du$$

$$dv \xrightarrow{\text{Se integra para obtener}} v$$

Estos términos se sustituyen en la fórmula
El objetivo de este método es que la segunda integral: $\int v\,du$ sea más sencilla que la integral original. De ocurrir lo contrario, las variables deben elegirse de forma contraria
Una manera de saber cómo elegir las variables consiste en que si la integral contiene a x con cualquier exponente, esta pasará a formar parte de u, el resto será dv. La excepción a la regla es la función logaritmo natural
Ejemplo: Resolver la siguiente integral

$$\int \ln|x|\,dx$$

$$\int \underbrace{\ln|x|}_{u}\ \underbrace{dx}_{dv}$$

$$u = \ln|x|$$
$$dv = dx$$

¡Alerta! Al momento de realizar la elección de las variables, el término dx de la integral siempre debe estar contenido en el término dv
Así, derivando a u e integrando a dv se obtiene:

$$\begin{cases} u = \ln|x| & dv = dx \\ du = \dfrac{dx}{x} & v = x \end{cases}$$

Sustituyendo en la fórmula

$$\int u\,dv = u\cdot v - \int v\,du$$

$$\int \underbrace{\ln|x|}_{u}\,\underbrace{dx}_{dv} = \underbrace{\ln|x|}_{u}\cdot \underbrace{x}_{v} - \int \underbrace{x}_{v}\,\underbrace{\frac{dx}{x}}_{du}$$

Ordenando términos y simplificando

$$x\cdot \ln|x| - \int dx$$

$$= x\cdot \ln|x| - x + c$$

¡Alerta! Cuando se integra a dv para la obtención de v, no es necesario sumar la constante de integración, ya que esta se agrega una vez concluida la integral

Ejercicio: Resolver la siguiente integral

$$\int x\cdot \ln|x|\,dx$$

¡Alerta! Para integrar por partes, es necesario tomar una función como u y el resto como dv

Para escoger al candidato como u se toma el siguiente orden de importancia:

Inversas — Mayor candidato a ser u
Logarítmicas
Algebraicas
Trigonométricas
Exponenciales — Menor candidato a ser v

Para integrar por partes se propone

$u = \ln|x|$ $\quad du = \dfrac{dx}{x}$

$dv = x\,dx$ $\quad v = \dfrac{x^2}{2}$

Sustituyendo en la fórmula

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

$$\int x \ln|x|\,dx = \frac{x^2 \ln|x|}{2} - \int \frac{x^2}{2x}\,dx$$

$$\frac{x^2 \ln|x|}{2} - \frac{1}{2} \cdot \int x\,dx$$

$$\frac{x^2 \ln|x|}{2} - \frac{x^2}{4} + c$$

3.2 Integral por fracciones parciales

Es conveniente definir qué es una fracción racional. Se llama fracción racional al cociente de dos funciones algebraicas en donde al factorizar el denominador, con sus factores pueden formarse sumas de fracciones con denominadores siendo los factores. Por ejemplo la fracción

$$\frac{10x + 6}{x^2 - 2x - 3}$$

Se propondría una fracción parcial que quede arreglada del siguiente modo

$$\frac{10x+6}{x^2-2x-3} = \frac{10x+6}{(x-3)(x+1)} \longrightarrow \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x+1}$$

Existen varios casos de fracciones parciales, los cuales vienen ejemplificadas a continuación

- Caso 1: Factores lineales distintos

$$\frac{10x+6}{(x-3)(x+1)} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x+1}$$

- Caso 2: Factores lineales repetidos

$$\frac{5x-1}{(x-3)^3} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{(x-3)^2} + \frac{C}{(x-3)^3}$$

• Caso 3: Factores cuadráticos distintos

$$\frac{6x+3}{(x^2+3)(x^2+1)} = \frac{Ax+B}{x^2+3} + \frac{Cx+D}{x^2+1}$$

• Caso 4: Factores cuadráticos repetidos

$$\frac{3x+2}{(x^2+1)^4} = \frac{Ax+B}{x^2+1} + \frac{Cx+D}{(x^2+1)^2} + \frac{Ex+F}{(x^2+1)^3} + \frac{Gx+H}{(x^2+1)^4}$$

Ejemplo: Resolver la siguiente integral

$$\int \frac{dx}{x^2-4}$$

La fracción se factoriza:

$$\frac{1}{x^2-4} = \frac{1}{(x+2)(x-2)}$$

Por lo que se propone:

$$\frac{A}{x+2} + \frac{B}{x-2}$$

Ahora se suman las fracciones parciales, usando denominador común:

$$\frac{A(x-2)+B(x+2)}{x^2-4} = \frac{Ax-2A+Bx+2B}{x^2-4}$$

Se agrupan los términos semejantes:

$$\frac{(A+B)x+(-2A+2B)}{x^2-4}$$

Se iguala con la fracción original

$$\frac{1}{x^2-4} = \frac{(A+B)x+(-2A+2B)}{x^2-4}$$

De ahí se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones

$$A+B=0$$
$$-2A+2B=1$$

Así

$$A = -\frac{1}{4} \qquad B = \frac{1}{4}$$

Entonces:

$$\frac{1}{x^2-4} = \frac{-\frac{1}{4}}{x+2} + \frac{\frac{1}{4}}{x-2} = \frac{1}{4(x-2)} - \frac{1}{4(x+2)}$$

Ahora se integra

$$\frac{1}{4}\int\frac{dx}{x-2} - \frac{1}{4}\int\frac{dx}{x+2}$$

$$\frac{1}{4}\cdot \ln|x-2| - \frac{1}{4}\cdot \ln|x+2| + c$$

Ejercicio: Resolver la siguiente integral

$$\int\frac{3x}{x^2+x-6}$$

$$\frac{3x}{(x+3)(x-2)} \rightarrow \frac{A}{x+3} + \frac{B}{x-2}$$

$$\frac{Ax-2A+Bx+3B}{(x+3)(x-2)} = \frac{(A+B)x+(-2A+3B)}{x^2+x-6}$$

$$A+B=3 \quad \rightarrow B=3-A$$

$$-2A+3B=0$$

$$-2A+9-3A=0$$

$$-5A=-9$$

$$A=\frac{9}{5}\ ; \quad B=\frac{6}{5}$$

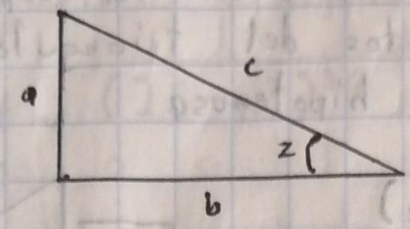
$$\frac{9}{5}\int\frac{dx}{x+3} + \frac{6}{5}\int\frac{dx}{x-2}$$

$$\frac{9}{5}\cdot \ln|x+3| + \frac{6}{5}\cdot \ln|x-2| + c$$

3.3 Integral por sustitución trigonométrica

Este método de integración se emplea cuando la función a integrar tiene un radical del tipo $\sqrt{v^2 \pm a^2}$, lo cual se logra con el teorema de Pitágoras y funciones trigonométricas

Se tienes:



$$c = \sqrt{a^2 + b^2} \qquad \operatorname{sen}(z) = \frac{a}{c} = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

$$a = \sqrt{c^2 - b^2} \qquad \cos(z) = \frac{b}{c} = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

$$b = \sqrt{c^2 - a^2} \qquad \sec(z) = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{b}$$

De las funciones trigonométricas, se despejan los catetos y la hipotenusa:

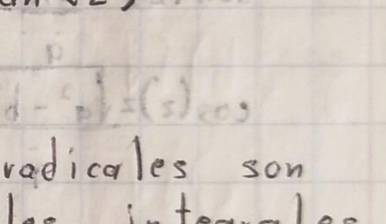
$$a = \sqrt{c^2 - b^2} = c \cdot \operatorname{sen}(z) = b \cdot \tan(z)$$
$$b = \sqrt{c^2 - a^2} = c \cdot \cos(z)$$
$$c = \sqrt{a^2 + b^2} = b \cdot \sec(z)$$

De lo anterior se observa que estos radicales son semejantes a los que aparecen en tales integrales, por lo que es posible representar estas integrales en función de un triángulo rectángulo, para ello, se verán tres casos

1.- El radical $\sqrt{b^2x^2 + a^2}$, por su forma, representa a la hipotenusa del triángulo rectángulo, mientras que la constante y la variable representan a cada uno de los catetos

$$\tan(z) = \frac{bx}{a} \rightarrow x = \frac{a}{b} \cdot \tan(z)$$

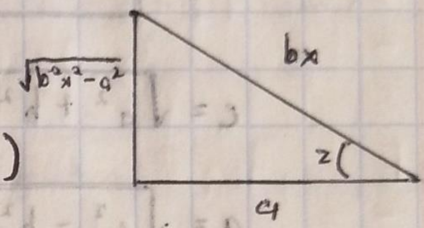
$$\sec(z) = \frac{\sqrt{b^2x^2+a^2}}{a} \rightarrow \sqrt{b^2x^2+a^2} = a \cdot \sec(z)$$



2:- El radical $\sqrt{b^2x^2-a^2}$ y la constante a representan a cada uno de los catetos del triángulo rectángulo y la variable bx es la hipotenusa

$$\sec(z) = \frac{bx}{a} \rightarrow x = \frac{a}{b} \cdot \sec(z)$$

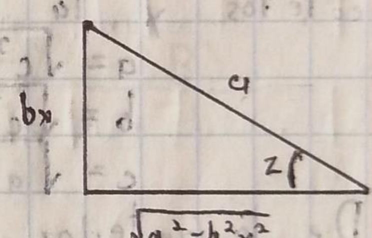
$$\tan(z) = \frac{\sqrt{b^2x^2-a^2}}{a} \rightarrow \sqrt{b^2x^2-a^2} = a \cdot \tan(z)$$



3:- El radical $\sqrt{a^2-b^2x^2}$ y la variable bx representan a los catetos del triángulo rectángulo y la constante es la hipotenusa

$$\operatorname{sen}(z) = \frac{bx}{a} \rightarrow x = \frac{a}{b} \cdot \operatorname{sen}(z)$$

$$\cos(z) = \frac{\sqrt{a^2-b^2x^2}}{a} \rightarrow \sqrt{a^2-b^2x^2} = a \cdot \cos(z)$$



Resumiendo los tres casos anteriores, tenemos:

Caso	Para	Usar
1°	$\sqrt{b^2x^2+a^2} = a \cdot \sec(z)$	$x = \frac{a}{b} \cdot \tan(z)$
2°	$\sqrt{b^2x^2-a^2} = a \cdot \tan(z)$	$x = \frac{a}{b} \cdot \sec(z)$
3°	$\sqrt{a^2-b^2x^2} = a \cdot \cos(z)$	$x = \frac{a}{b} \cdot \operatorname{sen}(z)$

El objetivo es convertirla en una integral trigonométrica en función de una nueva variable z para después regresarla a su original

Ejercicio: Resolver la siguiente integral

$$\int \frac{1}{(25-x^2)^{3/2}}\,dx$$

Se propone la sustitución

$$\int \frac{du}{(a^2-u^2)^{3/2}}$$

$$u^2 = x^2 \therefore u = x, \quad a^2 = 25 \therefore a = 5$$

Como se encuentra a^2-u^2, se realiza

$$u = a\cdot \operatorname{sen}\theta \rightarrow u = 5\cdot \operatorname{sen}\theta \therefore du = 5\cos\theta\, d\theta$$

$$\int \frac{5\cos\theta\, d\theta}{[25-(5\cdot \operatorname{sen}\theta)^2]^{3/2}} = \int \frac{5\cdot\cos\theta}{(25-25\cdot \operatorname{sen}^2\theta)^{3/2}}\,d\theta$$

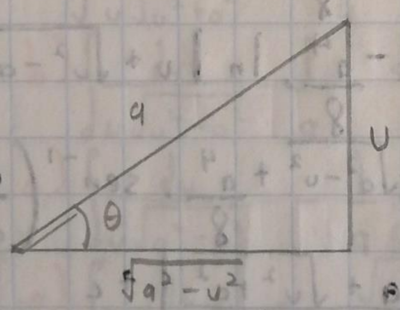
$$\int \frac{5\cdot\cos\theta}{[25\cdot(1-\operatorname{sen}^2\theta)]^{3/2}}\,d\theta = \int \frac{5\cdot\cos\theta}{\sqrt{(25)^3}\,(1-\operatorname{sen}^2\theta)^{3/2}}\,d\theta$$

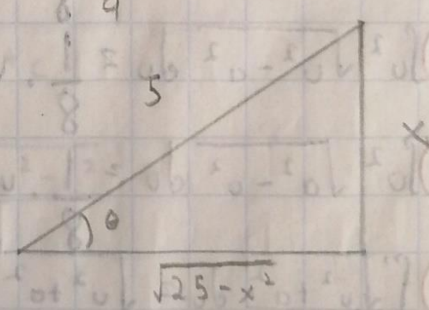
$$\frac{1}{25}\int \frac{\cos\theta}{(\cos^2\theta)^{3/2}}\,d\theta = \frac{1}{25}\int \frac{\cos\theta}{\cos^3\theta}\,d\theta = \frac{1}{25}\int \frac{d\theta}{\cos^2\theta}$$

$$\frac{1}{25}\int \sec^2\theta\, d\theta = \frac{\tan\theta}{25} + c$$

Para deshacer la sustitución se forma:

De $u = a\cdot\operatorname{sen}\theta \rightarrow \operatorname{sen}\theta = \frac{u}{a}$ y $\operatorname{sen}\theta = \frac{CO}{H}$





Como $\tan\theta = \frac{CO}{CA}$ entonces $\tan\theta = \frac{x}{\sqrt{25-x^2}}$

$$\frac{\left(\frac{x}{\sqrt{25-x^2}}\right)}{25} + c = \frac{x}{25\sqrt{25-x^2}} + c$$

3.4 Integración por fórmula

Existen integrales que se pueden resolver de manera inmediata debido a que, a primera vista presentan similitud con la fórmula

A continuación se listan las fórmulas más comunes, agrupadas según los tres casos presentados

1

a) $\int \frac{du}{u^2+a^2} = \frac{1}{a} \cdot \tan^{-1}\left(\frac{u}{a}\right) + c$

b) $\int \frac{du}{u^2-a^2} = \frac{1}{2a} \cdot \ln\left|\frac{u-a}{u+a}\right| + c$

c) $\int \frac{du}{a^2-u^2} = \frac{1}{2a} \cdot \ln\left|\frac{u+a}{u-a}\right| + c$

2

a) $\int \sqrt{u^2+a^2}\, du = \frac{1}{2} \cdot u\sqrt{u^2+a^2} + \frac{a^2}{2} \cdot \ln\left|u+\sqrt{u^2+a^2}\right| + c$

b) $\int \sqrt{u^2-a^2}\, du = \frac{1}{2} \cdot u\sqrt{u^2-a^2} - \frac{a^2}{2} \cdot \ln\left|u+\sqrt{u^2-a^2}\right| + c$

c) $\int \sqrt{a^2-u^2}\, du = \frac{1}{2} \cdot u\sqrt{a^2-u^2} + \frac{a^2}{2} \cdot \operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{u}{a}\right) + c$

3

a) $\int u^2\sqrt{u^2+a^2}\, du = \frac{1}{8} \cdot u(2u^2+a^2) - \frac{a^4}{8} \cdot \ln\left|u+\sqrt{u^2+a^2}\right| + c$

b) $\int u^2\sqrt{u^2-a^2}\, du = \frac{1}{8} \cdot u(2u^2-a^2) - \frac{a^4}{8} \cdot \ln\left|u+\sqrt{u^2-a^2}\right| + c$

c) $\int u^2\sqrt{a^2-u^2}\, du = \frac{1}{8} \cdot u(2u^2-a^2)\sqrt{a^2-u^2} + \frac{a^4}{8} \cdot \operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{u}{a}\right) + c$

4

a) $\int \frac{\sqrt{u^2+a^2}}{u}\, du = \sqrt{u^2+a^2} - a \cdot \ln\left|\frac{a+\sqrt{u^2+a^2}}{u}\right| + c$

b) $\int \frac{\sqrt{u^2-a^2}}{u}\, du = \sqrt{u^2-a^2} - a \cdot \sec^{-1}\left(\frac{u}{a}\right) + c$

c) $\int \frac{\sqrt{a^2-u^2}}{u}\, du = \sqrt{a^2-u^2} - a \cdot \ln\left|\frac{a+\sqrt{a^2-u^2}}{u}\right| + c$

5
a) $$\int \frac{\sqrt{u^2+a^2}}{u^2}\,du = \ln\left|u+\sqrt{u^2+a^2}\right| - \frac{\sqrt{u^2+a^2}}{u} + c$$
b) $$\int \frac{\sqrt{u^2-a^2}}{u^2}\,du = \ln\left|u+\sqrt{u^2+a^2}\right| - \frac{\sqrt{u^2-a^2}}{u} + c$$
c) $$\int \frac{\sqrt{a^2-u^2}}{u^2}\,du = -\frac{\sqrt{a^2-u^2}}{u} - \operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{u}{a}\right) + c$$

6
a) $$\int \frac{du}{\sqrt{u^2+a^2}} = \ln\left|u+\sqrt{u^2+a^2}\right| + c$$
b) $$\int \frac{du}{\sqrt{u^2-a^2}} = \ln\left|u+\sqrt{u^2-a^2}\right| + c$$
c) $$\int \frac{du}{\sqrt{a^2-u^2}} = \operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{u}{a}\right) + c$$

7
a) $$\int \frac{u^2\,du}{\sqrt{u^2+a^2}} = \frac{u}{2}\cdot\sqrt{u^2+a^2} - \frac{a^2}{2}\cdot\ln\left|u+\sqrt{u^2+a^2}\right| + c$$
b) $$\int \frac{u^2\,du}{\sqrt{u^2-a^2}} = \frac{u}{2}\cdot\sqrt{u^2-a^2} + \frac{a^2}{2}\cdot\ln\left|u+\sqrt{u^2-a^2}\right| + c$$
c) $$\int \frac{u^2\,du}{\sqrt{a^2-u^2}} = \frac{a^2}{2}\cdot\operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{u}{a}\right) - \frac{u}{2}\cdot\sqrt{a^2-u^2} + c$$

8
a) $$\int \frac{du}{u\sqrt{u^2+a^2}} = -\frac{1}{a}\cdot\ln\left|\frac{a+\sqrt{u^2+a^2}}{u}\right| + c$$
b) $$\int \frac{du}{u\sqrt{u^2-a^2}} = \frac{1}{a}\cdot\sec^{-1}\left(\frac{u}{a}\right) + c$$
c) $$\int \frac{du}{u\sqrt{a^2-u^2}} = -\frac{1}{a}\cdot\ln\left|\frac{a+\sqrt{a^2-u^2}}{u}\right| + c$$

9
a) $$\int \frac{du}{u^2\sqrt{u^2+a^2}} = -\frac{\sqrt{u^2+a^2}}{a^2\cdot u} + c$$
b) $$\int \frac{du}{u^2\sqrt{u^2-a^2}} = \frac{\sqrt{u^2-a^2}}{a^2\cdot u} + c$$
c) $$\int \frac{du}{u^2\sqrt{a^2-u^2}} = -\frac{\sqrt{a^2-u^2}}{a^2\cdot u} + c$$

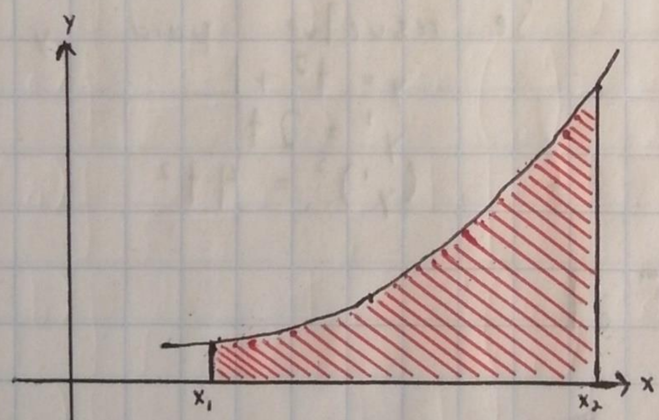
Unidad 4: Aplicaciones de la Integral Definida

Aprendizajes Esperados:

- Aplicar la integral definida para el cálculo de áreas bajo la curva
- Calcular longitudes de curvas planas mediante la integral definida
- Obtener el valor de un sólido de revolución a partir de la integral definida
- Aplicar la integral definida a problemas varios de física

4.1 Área bajo la curva

Sea



$$\text{Área} = \int_{x_1}^{x_2} f(x)\, dx$$

Toda área siempre debe ser positiva, en caso de obtener un valor negativo, dicho valor indica que el área está por debajo del eje x

Ejercicio: Calcular el área entre $y = 2x+1$, $x=1$, el eje x

$$\int_1^4 2x+1\, dx = x^2 + x \Big|_1^4 = (16+4) - (1+1)$$

$$20 - 2$$

$$18$$

4.2 Longitud de curvas planas

Una curva por sí sola no tiene área; tiene longitud y puede calcularse con una integral, pero para ello se necesita que la ecuación de la curva se presente en forma paramétilca, o sea en la forma $x = f(t)$ y $y = f(t)$

Con lo anterior, se usa la fórmula:

$$L = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt$$

El trazado de una función dada en ecuaciones paramétricas se lleva a cabo por tabulación, donde se asigna un valor a t como variable independiente, la cual se sustituye en las dos ecuaciones paramétiicas correspondientes y se grafican en un sistema de coordenadas rectangulares

Ejercicio: Calcular la longitud de la curva dada por $x = t+1$ y $y = t^2+1$ en $-2.5 \leq t \leq 2.5$

Se resuelve para x

$x = t+1$

$x' = 1$

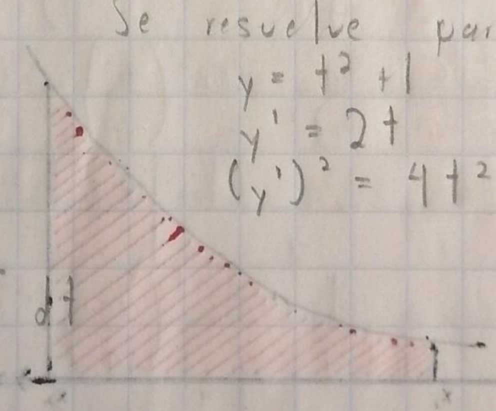
$(x')^2 = 1$

Se resuelve para y

$y = t^2+1$

$y' = 2t$

$(y')^2 = 4t^2$



Así

$$L = \int_{-2.5}^{2.5} \sqrt{1+4t^2}\, dt$$

Por fórmula

$$\left.\frac{2t}{4}\sqrt{4t^2+1} + \frac{b}{4}\ln\left|2t + \sqrt{4t^2+1}\right|\right]_{-2.5}^{2.5}$$

$(6.951) - (-6.951) = 13.902$

4.3 Sólidos de revolución

Un sólido de revolución es el cuerpo obtenido mediante la rotación de una superficie plana alrededor de una recta que se halla en el mismo plano

Se usa la fórmula:

$$V = \pi \int_a^b [f(x)]^2 \, dx$$

Ejercicio: Encontrar el volumen del sólido de revolución generado al rotar sobre el eje x la región bajo $y = \sqrt{x}$ en $0 \leq x \leq 3$

$$V = \pi \int_0^3 (\sqrt{x})^2 \, dx$$

$$V = \pi \cdot \frac{x^2}{2} \Big|_0^3$$

$$\frac{9\pi}{2} - 0 = \frac{9\pi}{2}$$