Álgebra Superior

Marie J. Weiss y Roy Dubisch

Editorial Limusa

1969

1: Enteros

~~Los primeros símbolos matemáticos aprendidos~~

1. Enteros Positivos

Los primeros símbolos matemáticos aprendidos por todos son los enteros positivos: 1, 2, 3... a los que frecuentemente se les da el nombre de números naturales. Sus propiedades son conocidas por todos. Las operaciones conocidas, en relación con los enteros positivos son las de adición y multiplicación:

"Para todo par de enteros positivos a, b, sabemos qué significan la suma: $a+b$ y el producto: ab y que la suma y el producto también son enteros positivos"

El hecho de que la suma y el producto de cualquier par de enteros positivos también sean enteros positivos frecuentemente se expresa diciendo que el conjunto de los enteros positivos es "cerrado" bajo la adición y multiplicación.

Como es bien sabido, los enteros positivos a, b, c obedecen las siguientes reglas que gobiernan las operaciones:

- La ley conmutativa
  - a) para la adición $a+b=b+a$
  - b) para la multiplicación $ab=ba$
- La ley asociativa
  - a) para la adición $a+(b+c)=(a+b)+c$
  - b) para la multiplicación $a(bc)=(ab)c$
- La ley distibutiva $a(b+c)=ab+ac$

Pueden determinarse muchas otras propiedades de los enteros positivos con base en las propiedades antes establecidas. Por ejemplo, ocasionalmente:

- Ley distributiva izquierda: $a(b+c) = ab + ac$
- Ley distributiva derecha: $(b+c)a = ba + ca$

Aplicando sucesivamente la ley conmutativa para la multiplicación, la ley distributiva izquierda y nuevamente la ley conmutativo se tiene:

$(b+c)a = a(b+c) = ab + ac = ba + ca$

Puede hacerse un sistema en el cual no se cumplen algunas de estas leyes, definiendo arbitrariamente una adición y multiplicación para los enteros positivos de la siguiente manera:

Sea:

- $a + b = 2a$
- $a \cdot b = 2ab$

donde $2a$ y $2ab$ denotan los resultados de la multiplicación ordinaria. Entonces

- $b + a = 2b$ ✗ conmutativa
- $b \cdot a = 2ba$ ✓ conmutativa
- $a + (b+c) = a + 2b = 2a$ ✗
- $(a+b) + c = 2a + c = 4a$ ✗ Asociativa
- $a \cdot (b \cdot c) = a \cdot 2bc = 4abc$
- $(a \cdot b) \cdot c = 2ab \cdot c = 4abc$ ✓ Asociativo
- $a \cdot (b+c) = a \cdot 2b = 4ab$
- $(a \cdot b) + (a \cdot c) = 2ab + 2ac = 4ab$ ✓ Distributiva

Nótese que las leyes conmutativa y asociativa no se cumplen para la adición, pero sí para la multiplicación ¿Hay 2 leyes distributivas en el sistema?

¿No?

h i j k m n

Ejercicios (p. 12):

1.- Reducir el primer miembro de las siguientes igualdades al segundo miembro, aplicando sucesivamente una ley asociativa, conmutativa o distributiva:

a) $(3+5)+6 = 3+(5+6)$

Por ley asociativa, sabemos que $a+(b+c) = (a+b)+c$

$\therefore (3+5)+6 = 3+(5+6)$ entonces:

$3+(5+6) = 3+(5+6)$

b) $1+5 = 5+1$

Por ley conmutativa, sabemos que $a+b = b+a$

$\therefore 1+5 = 5+1$ entonces:

$5+1 = 5+1$

c) $2(3\cdot5) = (2\cdot3)5$

Por ley asociativa, sabemos que $a\cdot(bc) = (a\cdot b)\cdot c$

$\therefore 2(3\cdot5) = (2\cdot3)5$ entonces:

$(2\cdot3)5 = (2\cdot3)5$

d) $2(3\cdot5) = 5(2\cdot3)$

Por ley asociativa transformamos:

$2(3\cdot5)$ en $(2\cdot3)5$

ahora, por ley conmutativa: $ab = ba$

trabajamos el conjunto $(2\cdot3)$ como una sola entidad y se aplica dicha regla, entonces:

$(2\cdot3)5 = 5(2\cdot3)$ entonces:

$5(2\cdot3) = 5(2\cdot3)$

e) $6(8+4) = 4\cdot6 + 6\cdot8$

Por ley distributiva sabemos que: $a(b+c) = ab+ac$

$\therefore 6(8+4) = 6\cdot8 + 6\cdot4$

Después, por ley conmutativa: $a+b = b+a$

Se trabajan dos entidades: $6 \cdot 8$ y $6 \cdot 4$

$\therefore\ 6 \cdot 8 + 6 \cdot 4 = 6 \cdot 4 + 6 \cdot 8$

Finalmente se hace esto en un término con ley conmutativa: $ab = ba$

$6 \cdot 4 + 6 \cdot 8 = 4 \cdot 6 + 6 \cdot 8$ entonces:

$4 \cdot 6 + 6 \cdot 8 = 4 \cdot 6 + 6 \cdot 8$

f) $6(8 \cdot 4) = (4 \cdot 6)8$

Por ley conmutativa sabemos que $ab = ba$

$\therefore\ 6(8 \cdot 4) = (8 \cdot 4)6$

Asimismo, por ley asociativa: $a(bc) = (ab)c$

$\therefore\ (8 \cdot 4)6 = 8(4 \cdot 6)$

Nuevamente, por ley conmutativa: $ab = ba$

$8(4 \cdot 6) = (4 \cdot 6)8$ entonces:

$(4 \cdot 6)8 = (4 \cdot 6)8$

g) $3(7+5) = 5 \cdot 3 + 7 \cdot 3$

Por ley distributiva: $a(b+c) = ab + ac$

$\therefore\ 3(7+5) = 3 \cdot 7 + 3 \cdot 5$

Ahora, por ley conmutativa: $a + b = b + a$

$3 \cdot 7 + 3 \cdot 5 = 3 \cdot 5 + 3 \cdot 7$

Trabajando las entidades por separado, por ley conmutativa: $ab = ba$

$3 \cdot 5 = 5 \cdot 3$ y $3 \cdot 7 = 7 \cdot 3$ entonces

$5 \cdot 3 + 7 \cdot 3 = 5 \cdot 3 + 7 \cdot 3$

l) $a[b(cd)] = (bc)(ad)$

Por ley asociativa: $a(bc) = (ab)c$

$a[b(cd)] = a[(bc)d] = a(bc)d$

Por ley conmutativa: $ab = ba$

$a(bc)d = ad(bc) \rightarrow \underline{\underline{(ad)(bc)}}$

2.- Determinar si las operaciones: adición y multiplicación para los enteros positivos x, y definidas en la forma que sigue, obedecen las leyes conmutativa, asociativa y distributiva:

??? *

a) $x + y = x + 2y$

$x \cdot y = 2xy$

b) $x + y = xy$

$x \cdot y = x + y$

c) $x + y = x + y^2$

$x \cdot y = xy^2$

2. Propiedades Adicionales

A continuación se mencionarán algunas propiedades adicionales de los enteros positivos. Se puede observar que el entero positivo 1 es el único entero positivo tal que $1 \cdot a = a$ para todo entero positivo, a. Por lo que se dice que 1 es una identidad para la multiplicación