Cálculo Diferencial

Grupo Patria

Unidad 1: Límites y Continuidad

Aprendizajes Esperados:

- Comprender y aplicar el concepto de límite
- Apreciar la diferencia entre los límites unilaterales y bilaterales
- Aprender a resolver límites que presentan indeterminación mediante métodos algebraicos
- Determinar la continuidad de una función y elaborar su representación gráfica

1.1 Límites y Continuidad

Límite de una sucesión

El concepto de límite se establece cuando una sucesión se aproxima a un punto llamado límite; si una sucesión tiene límite, entonces se dice que esta es una sucesión convergente, en caso contrario se trata de una sucesión divergente

Límites: Concepto intuitivo

Sea una función del tipo:

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x + 1}$$

Como se observa, la función no está definida para $x = -1$ porque adquiere la forma $\frac{0}{0}$, la cual representa una indeterminación.

Aun así, se puede hacer un análisis mediante una tabla con valores para x y $f(x)$ que se aproximen a -1 tanto por la izquierda como por la derecha, es decir, tanto mayores a -1 como menores a éste

x	$\frac{x^2-1}{x+1}$
0	-1
-0.5	-1.5
-0.9	-1.9
-0.99	-1.99
-0.999	-1.999
$x \to -1$	$\frac{x^2-1}{x+1} \to -2$

x	$\frac{x^2-1}{x+1}$
-2	-3
-1.5	-2.5
-1.1	-2.1
-1.01	-2.01
-1.001	-2.001
$x \to -1$	$\frac{x^2-1}{x+1} \to -2$

Aplicando el concepto de límite, tenemos:

$$\lim_{x \to -1} \frac{x^2-1}{x+1} = \lim_{x \to -1} \frac{(x+1)(x-1)}{x+1} = \lim_{x \to -1} x-1 = -1-1 = -2$$

Teoremas sobre los límites

Sea n un entero positivo, k una constante y $f(x)$ y $g(x)$ funciones con límites en c, entonces:

1= $\lim_{x \to c} k = k$

Ejemplo: $\lim_{x \to 3} 6 = 6$

2= $\lim_{x \to c} x = c$

Ejemplo: $\lim_{x \to 2} x = 2$

3= $\lim_{x \to c} k f(x) = k \lim_{x \to c} f(x)$

Ejemplo: $\lim_{x \to 4} 5x = 5 \lim_{x \to 4} x = 5(4) = 20$

4= $\lim_{x \to c} [f(x) \pm g(x)] = \lim_{x \to c} f(x) \pm \lim_{x \to c} g(x)$

Ejemplo: $\lim_{x \to -3} [4x-6] = \lim_{x \to -3} 4x - \lim_{x \to -3} 6 = 4(-3) - 6$

-18

5- $\lim_{x \to c} [f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x \to c} f(x) \cdot \lim_{x \to c} g(x)$

Ejemplo: $\lim_{x \to 5} (3x \cdot 2x) = \lim_{x \to 5} 3x \cdot \lim_{x \to 5} 2x = 3 \lim_{x \to 5} x \cdot 2 \lim_{x \to 5} x$

$3(5) \cdot 2(5) = 15 \cdot 10 = 150$

6- $\lim_{x \to c} \left[\frac{f(x)}{g(x)} \right] = \frac{\lim_{x \to c} f(x)}{\lim_{x \to c} g(x)}$

Donde $g(x) \neq 0$

Ejemplo: $\lim_{x \to 4} \frac{2x}{5x} = \frac{\lim_{x \to 4} 2x}{\lim_{x \to 4} 5x} = \frac{2(4)}{5(4)} = \frac{8}{20} = \frac{2}{5}$

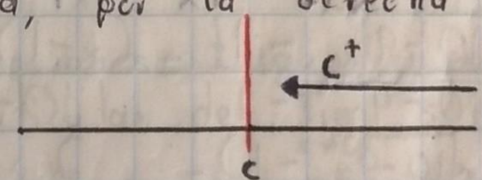
7- $\lim_{x \to c} [f(x)]^n = \left[\lim_{x \to c} f(x) \right]^n$

Ejemplo: $\lim_{x \to -1} (2x)^2 = \left(\lim_{x \to -1} 2x \right)^2 = [2(-1)]^2 = 4$

Límites unilaterales

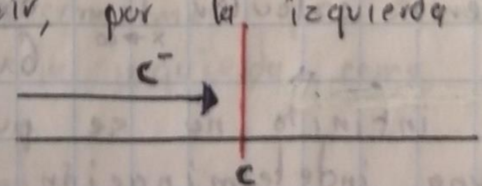
Límite por la derecha

$x \to c^+$ significa que x se acerca a c por valores mayores, o sea, por la derecha



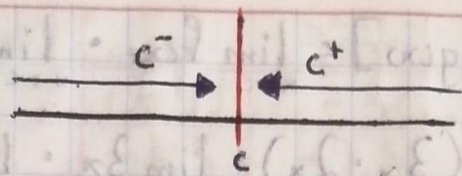
Límite por la izquierda

$x \to c^-$ quiere decir que x se acerca a c por valores menores, es decir, por la izquierda



Límites bilaterales

Hay casos en los que x se puede aproximar a c tanto por la izquierda como por la derecha



Cálculo de límites de funciones indeterminadas

Ejemplo: Calcular el límite $\lim_{x \to -1} \frac{x^2-1}{x+1}$

$$\lim \frac{x^2-1}{x+1} = \lim \frac{\cancel{(x+1)}(x-1)}{\cancel{x+1}} = \left[\lim\right] x-1$$

$$-1-1 = -2$$

Ejemplo: Calcular $\lim_{x \to 2} \frac{2x^2-8}{x-2}$

$$\frac{2x^2-8}{x-2} = \frac{2(x^2-4)}{x-2} = \left[\frac{2(x+2)\cancel{(x-2)}}{\cancel{x-2}}\right] = 8$$

Cómo vimos previamente una forma de calcular los límites elimininaado lás indeterminaciones es mediante la factorización.

Otra técnica es la racionalización

Ejemplo: Calcular $\lim_{x \to 1} \frac{x-1}{\sqrt{10-9x}-1}$

$$\frac{x-1}{\sqrt{10-9x}-1} \cdot \frac{\sqrt{10-9x}-1}{\sqrt{10-9x}-1} = \frac{(x-1)(\sqrt{10-9x}-1)}{10-9x-1}$$

$$\lim_{x \to 1} \frac{(x-1)(\sqrt{10-9x}-1)}{9-9x} = -\frac{2}{9}$$

Hay una técnica más para los límites al infinito, por ejemplo, al querer calcular $\lim_{x \to \infty} \frac{6x^2-23x+15}{6x^2+7x-10}$

En los límites al infinito no se puede verificar la existencia de una indeterminación.

Para su resolución, primero se dividen tanto el numerador como el denominador entre el término x de mayor grado

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\frac{6x^2}{x^2} - \frac{23x}{x^2} + \frac{15}{x^2}}{\frac{6x^2}{x^2} + \frac{7x}{x^2} - \frac{10}{x^2}}$$

Al simplificar se obtiene

$$\lim_{x\to\infty} \frac{6 - \frac{23}{x} + \frac{15}{x^2}}{6 + \frac{7}{x} - \frac{10}{x^2}}$$

Como resultado se obtienen cuatro fracciones con x como denominador. Como la fracción $\frac{1}{x}$ tiende a 0 conforme x tiende a infinito, ocurre lo mismo para $\frac{1}{x^2}$, es decir: $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$

Por ende; obtenemos:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{6 - \frac{23}{x} + \frac{15}{x^2}}{6 + \frac{7}{x} - \frac{10}{x^2}} = \frac{6-0+0}{6+0+0} = \frac{6}{6} = 1$$

Límites de Funciones trigonométricas
En el caso particular de $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x}$ se observa que el límite no existe para $x=0$, donde surge la idea intuitivo de límite.
Si tabulamos, observaremos que tiende a acercarse a la unidad tanto por la izquierda como por la derecha

1.2 Continuidad
Una idea intuitiva de una función continua es que su gráfica se pueda trazar sin cortes, es decir, sin despegar el lápiz del papel

Continuidad en un punto

Para que exista continuidad en un punto x, se deben cumplir tres condiciones

a) $f(x)$ debe estar definida

b) Debe existir el límite $\lim_{x \to x} f(x)$

c) Se debe cumplir $\lim_{x \to x} f(x) = f(x)$

La función $f(x)$ será discontinua en x si por lo menos una de las tres condiciones no se cumple

1.3 Aplicación de los límites a la vida cotidiana

Ejemplo: El precio de un monocircuito electrónico está definido en función del tiempo, de acuerdo a la siguiente expresión:

$$P(t) = \frac{xt + 360}{t + y}$$

Donde $P(t)$ es el precio, x, y son dos constantes a determinar y t el tiempo en meses.

Si se estima que el precio para el próximo mes será de \$160 y al siguiente mes bajará a \$150, calcular

a) El precio inicial

$P(1) = 160 \quad\quad P(2) = 150$

$\therefore \quad\quad \therefore$

$$160 = \frac{x(1) + 360}{1 + y} \quad\quad 150 = \frac{x(2) + 360}{2 + y}$$

$160 + 160y = 1x + 360 \quad\quad 300 + 150y = 2x + 360$

$160y = x + 200 \quad\quad 150y = 2x + 60$

$-x + 160y = 200 \quad\quad -2x + 150y = 60$

Se hace un sistema de ecuaciones multiplicando por -2 la primera

$$\left.\begin{aligned} 2x - 320y &= -400 \\ -2x + 150y &= 60 \end{aligned}\right\} \text{ Se suman:}$$

$-170y = -340 \therefore y = 2$

Se sustituye en $-x + 160y = 200$

$$-x + 160(2) = 200$$
$$-x + 320 = 200$$
$$320 - 200 = x$$
$$120 = x$$

La solución es

$$x = 120 \qquad y = 2$$

Entonces: $P(t) = \dfrac{120t + 360}{t + 2}$

Cuando $t = 0 \rightarrow \dfrac{360}{2} = 180 \rightarrow$ Ese es el precio inicial

b) El mes en el que el precio será \$135

$$135 = \frac{120t + 360}{t + 2}$$
$$135t + 270 = 120t + 360$$
$$15t = 90$$
$$t = \frac{90}{15} \quad \therefore \quad t = 6 \rightarrow \text{En 6 meses}$$

c) Su valor a largo plazo

Esto significa $t \rightarrow \infty \quad \therefore \quad \lim\limits_{t \to \infty} P(t)$

$$\lim_{t \to \infty} \frac{120t + 360}{t + 2}$$

$$\frac{\frac{120\cancel{t}}{\cancel{t}} + \frac{360}{t}}{\frac{\cancel{t}}{\cancel{t}} + \frac{2}{t}} = \frac{120 + 0}{1 + 0} = \$120 \rightarrow \text{Su precio a largo plazo}$$

Unidad 2: La Derivada

Aprendizajes Esperados:

- Entender la derivada como una operación matemática
- Aprender a calcular la derivada de funciones algebraicas y trascendentes
- Calcular ecuaciones de rectas tangentes y de rectas normales a una función en un punto mediante la aplicación de la derivada
- Aplicar el concepto de derivada en la resolución de problemas

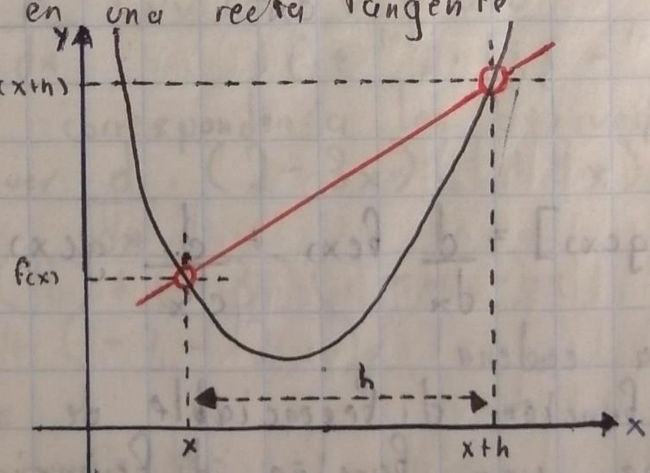
2.1 Surgimiento de la derivada

La derivada tiene sus orígenes en el siglo XVII por Isaac Newton y Gottfried Leibniz

Tiene sus bases en un límite

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

La representación geométrica de este límite está dada por una serie de rectas secantes, las cuales, al irse cerrando se convierten en una recta tangente



Conforme h disminuye, el espacio es menor y en $h=0$ se crea una recta tangente

El límite ya mencionado representa la derivada por "los cuatro pasos" que se describen a continuación

1- Se evalúa $f(x+h)$
2- Al resultado se le resta $f(x)$
3- Se divide ese resultado entre h
4- Se aplica el límite cuando h tiende a cero

Ejemplo: Calcular la derivada: $f(x) = 8x - 3$

1- $f(x+h) = 8x + 8h - 3$
2- $f(x+h) - f(x) = 8h$
3- $\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{8h}{h} = 8$
4- $\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = 8$

Derivada de monomios y polinomios mediante la fórmula

$$\frac{d}{dx} mx^n = m \cdot nx^{n-1}$$

La simbología $\frac{d}{dx} f(x)$ se conoce como notación de Leibniz y el $\frac{d}{dx}$ es el operador de derivada, no es una razón o división.

Ejemplo: Calcular la derivada: $\frac{d}{dx}(7x^2 - 3x + 5)$

$$7 \cdot 2x^{2-1} - 3 \cdot 1 \cdot x^{1-1} + 0$$
$$14x - 3$$

Observamos que:

$$\frac{d}{dx}[f(x) + g(x)] = \frac{d}{dx} f(x) + \frac{d}{dx} g(x)$$

La regla de la cadena

Si u es una función diferenciable de x, mientras que f es, a la vez, una función diferenciable de u; entonces se dice que f es una función diferenciable de x, que causa que se cumpla lo siguiente:

$$\frac{d}{dx} f(u) = f'(u) \cdot \frac{du}{dx}$$

También se denomina regla general de las potencias

Ejemplo: Solucionar $\frac{d}{dx} \frac{7}{6} (4x-6)^5$

$$\frac{7}{6} \cdot \frac{d}{dx} (4x-6)^5$$

$$\frac{7}{6} \cdot 5(4x-6)^4 \cdot \frac{d}{dx}(4x-6)$$

$$\frac{7}{6} \cdot 5(4x-6)^4 \cdot 4$$

$$\frac{140}{6} \cdot (4x-6)^4 = \frac{70}{3}(4x-6)^4$$

Derivada de un producto

Este método se emplea cuando se va a derivar el producto de dos funciones:

$$\frac{d}{dx}(uv) = u\frac{d}{dx}v + v\frac{d}{dx}u$$

Al emplear notación de Lagrange, la expresión puede escribirse como:

$$\frac{d}{dx}(uv) = uv' + u'v$$

Donde u' y v' corresponden a las derivadas de u y v

Ejemplo: Resolver $\frac{d}{dx}(2-3x)(1+4x)$

$$(2-3x)(4) + (-3)(1+4x)$$

$$8-12x + (-3-12x)$$

$$5-24x$$

Derivada de cocientes

La fórmula empleada es: $\frac{d}{dx}\frac{u}{v} = \frac{vu' - uv'}{v^2}$

Donde la función v es diferente de cero, en tal caso el cociente v no está definido.
Esta fórmula surge de la derivada del producto.
El primer ejemplo se resolverá con la fórmula de la derivada del cociente y la siguiente se realizará adaptando la derivada del producto.

Ejemplo: Resolver $\frac{d}{dx} \frac{x}{x-1}$

$$\frac{1(x-1) - x(1)}{(x-1)^2}$$

$$\frac{x-1-x}{(x-1)^2} = \frac{-1}{(x-1)^2}$$

Ejemplo: Resolver $\frac{d}{dx} \frac{x-1}{x+1}$

Adaptamos: $\underbrace{(x-1)}_{u} \underbrace{(x+1)^{-1}}_{v}$

$u = x-1 \qquad v = (x+1)^{-1}$

$u' = 1 \qquad v' = -1(x+1)^{-2}(1)$

Si $f'(x) = uv' + vu'$ $\quad \frac{(x-1)(-1)}{(x+1)^2} + \frac{1}{x+1}$

$$\frac{-x+1}{(x+1)^2} + \frac{x+1}{(x+1)^2} = \frac{2}{(x+1)^2}$$

2.2 Derivada implícita

Se dice que una función es implícita cuando en esta se mezclan variables; por ejemplo, una función puede ser del tipo $f(x,y) = 0$, en lugar de la forma común $y = f(x)$.
Para derivar este tipo de funciones, hacemos uso de las reglas que hasta ahora se han usado para derivar funciones explícitas con la única diferencia

de que en cada ocasión que se derive un término en y, aparecerá y'. Finalmente la función se despeja en y'.

Generalizando esto último tenemos:

y	$f'(y)$
$3y$	$-3y'$
$5y^2$	$10yy'$
$2y^3$	$6y^2y'$
y^n	$ny^{n-1}y'$

Ejemplo: Resolver $3x + 5y - 6xy = 7x^2 - y^2$

$$3 + 5y' - 6y - 6xy' = 14x - 2yy'$$
$$3 - 6y - 14x = -2yy' - 5y' + 6xy'$$
$$3 - 6y - 14x = y'(2y - 5 + 6x)$$
$$\frac{3 - 6y - 14x}{2y - 5 + 6x} = y'$$

2.3 Funciones trascendentes

Se dice que una función es trascendente cuando va más allá del álgebra, esto es, no sólo una expresión polinomial con sus operaciones y características propias, sino que además está compuesta por una función de tipo logarítmica, exponencial o trigonométrica

Derivada de funciones trigonométricas

Las funciones trigonométricas directas son seis. A continuación se presentan las funciones seno y coseno; las otras cuatro se definen a partir de estas dos

Función seno

$$\frac{d}{dx} \operatorname{sen} u = u' \cos u$$

Ejemplo: Resolver $\frac{d}{dx} 4 \operatorname{sen} 3x$

$$4 \cdot (3 \cdot \cos 3x)$$
$$12 \cos 3x$$

Función coseno

$$\frac{d}{dx} \cos u = -u' \operatorname{sen} u$$

Ejemplo: Resolver $\frac{d}{dx} 5 \cos 6x^2$

$$5 \cdot (-12x \cdot \operatorname{sen} 6x^2)$$
$$-60x \operatorname{sen} 6x^2$$

Función tangente

La derivada de la tangente no es más que la derivada de un cociente

$$\frac{d}{dx} \tan x = \frac{d}{dx} \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$$

Empleando $\frac{d}{dx} \frac{u}{v} = \frac{vu' - uv'}{v^2}$ tenemos

$u = \operatorname{sen} x \qquad v = \cos x$

$u' = \cos x \qquad v' = -\operatorname{sen} x$

$$\frac{(\cos x)(\cos x) - (\operatorname{sen} x)(-\operatorname{sen} x)}{\cos^2 x}$$

$$\frac{\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x}$$

Ahora, para simplificar se usa la identidad:

$$\operatorname{sen}^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$$

$$\frac{1}{\cos^2 x}$$

Y ahora sabemos que, con otra identidad:

$$\frac{1}{\cos \theta} = \sec \theta$$

Y pese a que esté al cuadrado, esta identidad se respeta, obteniendo:

$$\sec^2 x$$

Resumiendo, su fórmula es:

$$\frac{d}{dx} \tan u = u' \sec^2 u$$

Derivadas de la secante, cosecante y cotangente

Estas se obtienen de la derivada de un cociente, por tanto se deja como ejercicio demostrarlas

Ejercicio: Demostrar que:

$$\frac{d}{dx} \sec u = u' \sec u \cdot \tan u$$

Partimos de que $f(x) = \sec u$

Lo que es igual a $f(x) = \frac{1}{\cos u}$ por la identidad

Por ley de exponentes: $f(x) = (\cos u)^{-1}$

Derivamos: $f'(x) = -1 (\cos u)^{-2} (-\operatorname{sen} u)(u')$

Simplificamos: $f'(x) = (\cos u)^{-2} (\operatorname{sen} u)(u')$

Por identidad: $f'(x) = (\sec u)^2 (\operatorname{sen} u)(u')$

Separamos: $f'(x) = (\sec u)(\sec u)(\operatorname{sen} u)(u')$

Por identidad: $f'(x) = (\sec u)\left(\frac{1}{\cos u}\right)(\operatorname{sen} u)(u')$

Simplificamos: $f'(x) = (\sec u)(\tan u)(u')$

Y obtenemos que $f'(x) = u' \cdot \sec u \cdot \tan u$ comprobando la igualdad

Ejercicio: Demostrar que:

$$\frac{d}{dx} \csc u = -u' \csc u \cdot \cot u$$

Partimos de que $f(x) = \csc u$

Por identidad $f(x) = \frac{1}{\operatorname{sen} u}$

Por ley de exponentes $f(x) = (\text{sen } u)^{-1}$

Derivamos $f'(x) = -1(\text{sen } u)^{-2}(\cos u)(u')$

Por identidad $f'(x) = -1(\csc u)^{2}(\cos u)(u')$

Separamos $f'(x) = -1(\csc u)(\csc u)(\cos u)(u')$

Por identidad $f'(x) = -1(\csc u)\left(\frac{1}{\text{sen } u}\right)(\cos u)(u')$

Simplificamos $f'(x) = -1(\csc u)(\cot u)(u')$

Y obtenemos que $f'(x) = -u' \csc u \cdot \cot u$

Ejercicio: Demostrar que:

$$\frac{d}{dx} \cot u = -u' \csc^2 u$$

Partimos de que $f(x) = \cot u$

Por identidad $f(x) = \frac{\cos u}{\text{sen } u}$

Derivamos: $U = \cos u \qquad V = \text{sen } u$

$U' = -u' \text{sen } u \qquad V' = u' \cos u$

$$f'(x) = \frac{(\text{sen } u)(-u' \text{sen } u) - (\cos u)(u' \cos u)}{(\text{sen } u)^2}$$

Factorizamos $f'(x) = \frac{u'[-(\text{sen } u)^2 - (\cos u)^2]}{\text{sen}^2 u}$

Factorizamos $f'(x) = \frac{-u'[\text{sen}^2 u + \cos^2 u]}{\text{sen}^2 u}$

Por identidad $f'(x) = \frac{-u'[1]}{\text{sen}^2 u}$

Por identidad $f'(x) = -u' \cdot \csc^2 u$

Obteniendo la igualdad que prueba su veracidad

Derivada de funciones trigonométricas inversas

El objetivo de este tipo de derivadas es obtener la derivada de expresiones del tipo arc sen x, o $\text{sen}^{-1} x$ que viene a ser lo mismo; por consiguiente, lo primero que se hace es definir la fórmula

En la función $y = \operatorname{sen}^{-1} x$ se despeja x obteniendo $\operatorname{sen} y = x$. Derivando de forma implícita se obtiene:

$$\operatorname{sen} y = x$$
$$y' \cdot \cos y = 1$$

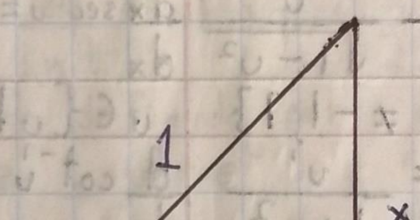
Despejando a y' se obtiene:

$$y' = \frac{1}{\cos y}$$

Recordemos que en un principio $\operatorname{sen} y = x$, pero podemos plantear un triángulo tal que:

$$\operatorname{sen} y = x = \frac{x}{1} = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}}$$

Teniendo un triángulo como el siguiente



Como no se conoce el cateto adyacente, éste se denomina a y, si para el triángulo se aplica el Teorema de Pitágoras, se obtiene:

$$a^2 + x^2 = 1$$

Despejando a obtenemos:

$$a = \sqrt{1 - x^2}$$

Para finalmente sustituir en la derivada, tenemos:

$$\cos y = \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{hipotenusa}} = \frac{a}{1} = \frac{\sqrt{1-x^2}}{1}$$

Por lo tanto:

$$\cos y = \sqrt{1 - x^2}$$

Finalmente, sustituyendo en la derivada tenemos

$$y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

En resumen, $y = \operatorname{sen}^{-1} x$ tiene como derivada

$$y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

donde está definida en el intervalo $-1 < x < 1$

Si se hace lo mismo para las funciones restantes se obtiene:

$\frac{d}{dx} \operatorname{sen}^{-1} u = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$ $u \in (-1, 1)$	$\frac{d}{dx} \csc^{-1} u = -\frac{u'}{\lvert u \rvert \sqrt{u^2-1}}$ $u \in (-1, 1)$
$\frac{d}{dx} \cos^{-1} u = -\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$ $u \in \{u \mid u \neq -1, 1\}$	$\frac{d}{dx} \sec^{-1} u = \frac{u'}{\lvert u \rvert \sqrt{u^2-1}}$ $u \in \{u \mid u \neq -1, 1\}$
$\frac{d}{dx} \tan^{-1} u = \frac{u'}{1+u^2}$ $u \in R$	$\frac{d}{dx} \cot^{-1} u = -\frac{u'}{1+u^2}$ $u \in R$

Derivada de la funcion logaritmo

Se define por la siguiente fórmula:

$$\frac{d}{dx}(\log_a u) = \frac{1}{\ln a} \cdot \frac{1}{u} \cdot u'$$

Ésta se simplifica para los logaritmos naturales

$$\frac{d}{dx} \ln u = \frac{u'}{u}$$

Para simplificar algunas derivadas, se emplean las leyes de los logaritmos

$$\ln(a \cdot b) = \ln a + \ln b$$

$$\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b$$

$$\ln a^n = n \ln a$$

Ejemplo: Resolver: $\frac{d}{dx} \ln 4x^3$

$$f(x) = \ln 4x^3$$
$$f(x) = 3(\ln 4x)$$
$$f'(x) = 3 \cdot \frac{4}{4x} = \frac{3}{x}$$

Derivada de funciones exponenciales

La función exponencial, como operación inversa de la función logaritmo natural, se representa con la literal e; refiriéndose a un número irracional cuyo valor es e = 2.7182... definido mediante la siguiente serie infinita:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} \cdots$$

Como derivada, queda definida por:

$$\frac{d}{dx} e^u = u' \cdot e^u$$

Ejemplo: Resolver: $\frac{d}{dx} e^{3x^2-5}$

$$f'(x) = 6x \cdot e^{3x^2-5}$$

Funciones hiperbólicas

Las funciones hiperbolicas guardan estrecha relación con las funciones trigonométricas, aunque no hay una relación de fondo entre ambas, sino de forma y quedan definidas por las fórmulas:

$$\operatorname{senh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \qquad \operatorname{csch} x = \frac{1}{\operatorname{senh} x} = \frac{2}{e^x - e^{-x}}$$

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \qquad \operatorname{sech} x = \frac{1}{\cosh x} = \frac{2}{e^x + e^{-x}}$$

$$\tanh x = \frac{\operatorname{senh}}{\cosh} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \qquad \coth x = \frac{\cosh x}{\operatorname{senh} x} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$$

Ejercicio: Demostrar que $\frac{d}{dx}$ senh x = cosh x

Partimos de que $f(x) = \text{senh } x$

Por identidad $f(x) = \frac{e^{x} - e^{-x}}{2}$

Derivamos $f'(x) = \frac{1}{2}(e^{x}(1) - e^{-x}(-1))$

Simplificamos $f'(x) = \frac{1}{2}(e^{x} + e^{-x})$

Acomodamos $f'(x) = \frac{e^{x} + e^{-x}}{2}$

Por identidad $f'(x) = \cosh x$

Y damos por concluida la demostración

Si todas las funciones se derivan a partir de sus fórmulas ya definidas, obtenemos que:

1.- $y = \text{senh } u \rightarrow y' = u' \cdot \cosh u$

2.- $y = \cosh u \rightarrow y' = u' \cdot \text{senh } u$

3.- $y = \tanh u \rightarrow y' = u' \cdot \text{sech}^2 u$

4.- $y = \text{csch } u \rightarrow y' = u' \cdot -\text{csch } u \cdot \coth u$

5.- $y = \text{sech } u \rightarrow y' = u' \cdot -\text{sech } u \cdot \tanh u$

6.- $y = \coth u \rightarrow y' = u' \cdot -\text{csch}^2 u$

2.4 Derivadas de orden superior

La derivada de la derivada de una función es la derivada de segundo orden y estos órdenes superiores vuelven a las derivadas tener este nombre

Ejemplo: De $f(x) = 4x^5 - 3x^4 + 2x^3 + x^2 - 7x + 6$, obtener la cuarta derivada

$$f'(x) = 20x^4 - 12x^3 + 6x^2 + 2x + 7$$
$$f''(x) = 80x^3 - 36x^2 + 12x + 2$$
$$f'''(x) = 240x^2 - 72x + 12$$
$$f''''(x) = 480x - 72$$

2.5 Aplicaciones de la derivada a la vida cotidiana

Aplicación al área de la física

El desplazamiento, velocidad y aceleración se asocian por la siguiente fórmula:

$$a = v'(t) = d''(t)$$

Unidad 3: Aplicaciones de la derivada

Aprendizajes Esperados:
- Identificar las propiedades de la derivada a partir de su interpretación geométrica
- Aplicar las derivadas a la solución de problemas de cálculo de rectas tangentes
- Calcular puntos críticos mediante la derivada
- Maximizar y minimizar funciones
- Resolver problemas de razones de cambio

3.1 Introducción

Las aplicaciones de la derivada se pueden agrupar en:

1.- Cálculo de rectas tangentes en un punto dado
2.- Cálculo de máximos y mínimos. Funciones crecientes y decrecientes
3.- Cálculo de concavidades y puntos de inflexión
4.- Maximización y minimización de funciones
5.- Variables relacionadas con el tiempo

3.2 La derivada y la recta tangente

Ejemplo: Calcular la ecuación de la recta tangente y de la recta normal a la parábola $y = 4x^2 - 6$ en el punto donde su abscisa vale -1

Primero calculamos y en ese punto

$$y = 4x^2 - 6$$
$$y = 4(-1)^2 - 6$$
$$y = -2$$

Por lo tanto, el punto de tangencia es:

$$P(-1, -2)$$

Luego se deriva $y' = 8x$

Después se sustituye $x = -1$

$$m_{tangente} = -8$$

Ahora se realiza el cálculo de la ecuación de la recta tangente

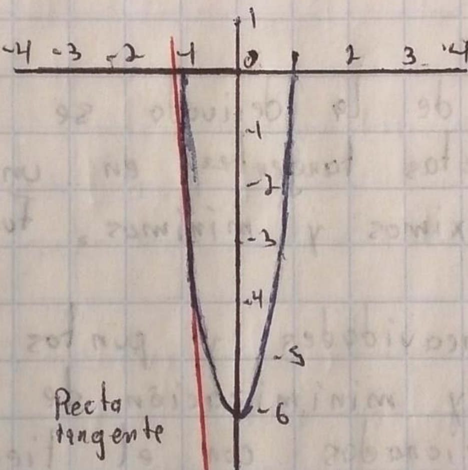
$$y - \underbrace{y_1}_{-2} = \underbrace{m}_{-8}(x - \underbrace{x_1}_{-1})$$

$$y + 2 = -8(x+1)$$

$$y + 2 = -8x - 8$$

$$8x + y + 10 = 0$$

Esta es la ecuación de la recta tangente en su forma general



Para la recta normal, su pendiente es

$$m_{normal} = \frac{1}{8}$$

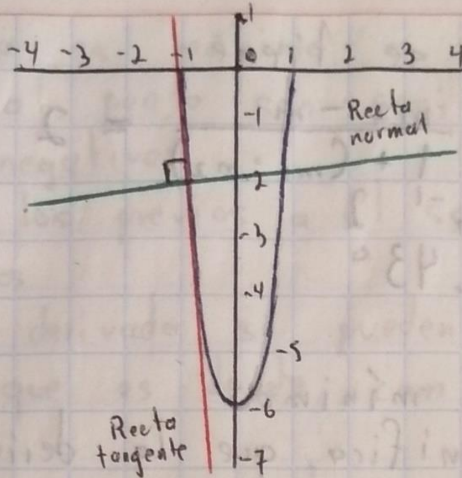
Y se calcula su ecuación

$$y + 2 = \frac{1}{8}(x+1)$$

$$8y + 16 = x + 1$$

$$x - 8y - 15 = 0$$

Esta es la ecuación de la recta normal en su forma general



Ángulo entre dos curvas

Ejemplo: Calcular el ángulo que forman en la intersección la recta $2x - y - 5 = 0$ y $x^2 + y^2 = 25$

Primero se calculan las intersecciones despejando y sustituyendo

$$y = 2x - 5$$
$$x^2 + (2x - 5)^2 = 25$$
$$x_1 = 0 \qquad x_2 = 4$$

Sustituimos para obtener la coordenada en cada punto

$$P_1 (0, -5) \qquad P_2 (4, 3)$$

Derivamos ambas ecuaciones

- Para la recta $y = 2x - 5$
  $y' = 2$
- Para la circunferencia $x^2 + y^2 = 25$
  $y = \sqrt{25 - x^2}$
  $y' = \dfrac{-x}{\sqrt{25 - x^2}}$ Para el lado superior de la circunferencia
  $y' = \dfrac{x}{\sqrt{25 - x^2}}$ Para el lado inferior

Se sustituye x en ambas derivadas

$$m_1 = 2 \qquad m_2 = -\frac{4}{3}$$

Haciendo operaciones se tiene

$$\tan \theta = \frac{m_2 - m_1}{1 + (m_1 \cdot m_2)} = 2$$

$$\theta = \tan^{-1} 2$$

$$\theta = 63.43°$$

3.3 Máximos y mínimos

Si $f'(a) = 0$ significa que la derivada vale 0 y su pendiente también, por lo que será una línea horizontal, que sólo ocurre en máximos y mínimos

Teorema de Rolle

El teorema de Rolle de cumplir las siguientes condiciones

1- Que $f(x)$ sea una función continua y definida en un intervalo cerrado $[a, b]$

2- Que la función sea derivable en el intervalo abierto (a, b)

3- Que se cumpla $f(a) = f(b)$

Al cumplirse tales condiciones, entonces existe al menos un número c que pertenece a (a, b) de modo que $f'(c) = 0$

Teorema del valor medio

Éste establece que, dada cualquier función $f(x)$ continua en el intervalo $[a, b]$ y diferenciable en (a, b), hay al menos un punto c en (a, b) de modo que la tangente a la curva en c es paralela a la secante entre a y b. Es decir:

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$$

Con la primer derivada se pueden hallar puntos críticos.

Un punto crítico es máximo si los valores de la derivada previos al punto son positivos y los sucesores a él negativos
Es mínimo si los previos a él son negativos y los sucesores positivos
Con la segunda derivada se pueden hallar puntos de inflexión, que es donde cambia la concavidad de la curva
Ser cóncava hacia arriba es tener valor positivo
Ser cóncava hacia abajo es tener valor negativo
Maximización y minimización
Ejemplo: Hallar dos números que sumen 30 y que su producto sea máximo

$$x + y = 30$$
$$xy = c$$

$$1 + y' = 0$$
$$y' = -1$$

$$xy' + y = 0$$
$$x(-1) + y = 0$$
$$-x + y = 0$$

$$x + y = 30$$
$$-x + y = 0$$
$$0 + 2y = 30$$
$$y = 15 \quad \therefore \quad x = 15$$