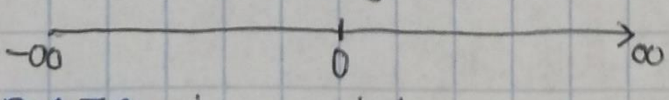
13/08/2018

Docente: Juan Manuel Pérez Rosales
Materia: Álgebra Superior

Panorama General
En el curso se pretende lograr dominio en la notación y proceso operativo de los números que definen a las funciones $y = f(x)$ del cálculo
Se estudia el álgebra de operaciones de los números reales y complejos
Para números reales: Es un repaso de lo estudiado en los cursos básicos de preparatoria y secundaria
Para números imaginarios: Estudiar las operaciones básicas para poder interpretar $i = \sqrt{-1} \rightarrow i^2 = -1$
Con el dominio del proceso operativo de los números reales y complejos resolveremos ecuaciones algebraicas

14/08/2018

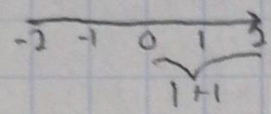
Unidad 1: Las Propiedades del Campo o Sistema de los Numeros Reales
Con $\mathbb{R}$ denotamos al conjunto de los números reales que son los números con los que de manera usual establecemos la medida o cantidad de aquello que estamos cuantificando
Se denota $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$
$-\infty$ es la idea de estar alejado de 0 por su izquierda y $+\infty$ por la derecha
$\mathbb{R}$ se representa geométricamente en la recta real



DATO: Los símbolos $+\infty$ y $-\infty$ no son números, son ideas abstractas de alejarse de 0. 0 es un número que significa cant. nula

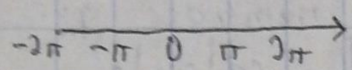
A partir de 0 se establece la unidad 1

1 es la unidad



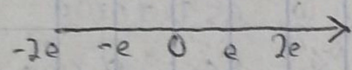
Kgs
mts
horas
segundos
Newtons
Joules
Libras
} Unidades

Si π es la unidad



} Operaciones Trigonométricas

Si e es la unidad



} Operaciones Hiperbólicas

0 es la posición inicial del fenómeno que se mide
0 NO representa la nada
Los otros números de R son consecuencia de las operaciones de sumar y multiplicar a dichos números de R
Por ejemplo: $0.5 = 1/2 = 1 \cdot (2)^{-1}$

El sistema o campo de R tiene las siguientes propiedades
* Cerradura de R: Sumar y multiplicar números reales da como resultado un número real

Si $a, b \in R \rightarrow a+b \in R$
Si $a, b \in R \rightarrow ab \in R$

* Propiedad Conmutativa: $a, b \in R$ $a+b = b+a$
$a, b \in R$ $ab = ba$

* Propiedad Asociativa: $a, b, c \in R$ $(a+b)+c = a+(b+c)$
$a, b, c \in R$ $(ab)c = a(bc)$

Por ejemplo:
$-2+3+5 = (3+5)-2$
$3\left(2 \cdot \frac{1}{3}\right) = 2 \cdot \left(3 \cdot \frac{1}{3}\right)$
$\frac{x+4}{3} = \frac{1}{3} \cdot (x+4)$

Propiedad Existencia y Unidad de los Elementos Neutros en la suma y multiplicación

Si $a \in \mathbb{R}$ existe $0 \in \mathbb{R}$
tal que $a + 0 = a = 0 + a$

Si $a \in \mathbb{R}$ existe $1 \in \mathbb{R}$
tal que $a1 = a = 1a$

NOTA

$0 = a - a$

$1 = a/a$ con $a \neq 0$

Ejemplo:

a) $x^2 + 2x \quad x^2 + 2x + 1 - 1 \rightarrow (x^2 + 2x + 1) - 1 \rightarrow (x+1)^2 - 1$

b) $\frac{1}{\sqrt{2}} \quad \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

c) $x^2 + 6x + 15 \quad x^2 + 6x + 15 + 6 - 6 \rightarrow (x^2 + 6x + 9) + 6$
$(x+3)^2 + 6$

d) $x^2 + 6x \quad x^2 + 6x + 9 - 9 \rightarrow (x+3)^2 - 3^2 \rightarrow [(x+3)+3][(x+3)-3]$

e) $\frac{1}{\sqrt{x} - \sqrt{2}} \quad \frac{1}{\sqrt{x} - \sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{x} + \sqrt{2}}{\sqrt{x} + \sqrt{2}} \quad \frac{\sqrt{x} + \sqrt{2}}{x - 2}$

Todo número real tiene un inverso aditivo y multiplicativo

Propiedad: Existencia del Inverso de un número

El inverso aditivo de a es $-a$

El multiplicativo de a es a^{-1} mientras $a \neq 0$

Propiedad Distributiva: Dados $a, b, c \in \mathbb{R}$ 17/08/2018

$a(b+c) = ab + ac$

$ab + ac$ $a(b+c)$

Desarrollar $2(5 + \sqrt{3}) = 2(5) + 2\sqrt{3}$

Factorizar $10 + 2\sqrt{3} = 2(5 + \sqrt{3})$

Factorizar $\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{8}$

$\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 1 + \frac{\sqrt{3}\sqrt{3}}{2 \cdot 4} = \frac{\sqrt{3}}{2}\left(1 + \frac{\sqrt{3}}{4}\right)$

factorizar x^2-2 $\quad x^2-(\sqrt{2})^2$
$(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})$

20/08/2018

El conjunto $\mathbb{R}$ con sus dos operaciones de sumar y multiplicar junto con sus elementos neutros de operación 0 y 1 establecen toda la estructura del álgebra de operación en $\mathbb{R}$
Con el álgebra de $\mathbb{R}$ hacemos la simplificación o eliminación de términos semejantes y la resolución de ecuaciones o despejar a la variable.
Las otras operaciones de los números: Restar, dividir o exponentes son en realidad una representación de la suma y multiplicación de los números de $\mathbb{R}$ operando con sus elementos inversos: aditivo y multiplicativo

Definiciones de las operaciones en $\mathbb{R}$

* La resta

Si $a, b \in \mathbb{R} \rightarrow a-b = a+(-b)$

* La división

Si $a, b \in \mathbb{R}$ con $b \neq 0 \therefore a \div b = \frac{a}{b} = ab^{-1}$

Observación:

$0 \in \mathbb{R}$ pero es neutro de signo
$0 = +0 = -0$

Ejercicio $\dfrac{x^2+5x-16}{x^2-5x-6}$ No es valido $x^2-5x-6=0$
$(x-6)(x+1)=0$
$x-6=0, \quad x+1=0$
$x=6 \quad x=-1$

Es válido $x \in \mathbb{R}-\{6,-1\}$
ó $(-\infty,-1) \cup (-1,6) \cup (6,\infty)$

Ejercicio $\frac{1}{x^2-1}$

$(x+1)(x-1)=0$

$x=1$ $x=-1$

$x \in R - \{-1, 1\}$

Definicion de Exponente Positivo

Si P es un número entero positivo, entonces

$$a^P = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot a \ldots a \cdot a}_{P \text{ veces}}$$

$0^P = 0$

$a^0 = 1$ con $a \neq 0$

0^0 no tiene sentido

$a^1 = a$

Definicion de Exponente Negativo

Si P es negativo y entero xd

$a^{-P} = \frac{1}{a^P}$

A ver >:v $1 = 1^{-1} = 1 \cdot 1^{-1} = 1/1 = 1$

Exponentes Negativos 21/08/2018

$2^{-1} = \frac{1}{2}$ $(-3)^{-1} = \frac{1}{-3}$

$\left(\frac{1}{2}\right)^{-1} = \frac{1}{1/2}$ $c(a-b)^{-1} = \frac{c}{a-b}$

Exponentes Fraccionarios

$a^{p/q} = \sqrt[q]{a^p}$ Es una notación :v

$\sqrt[5]{3} = 3^{1/5}$

En particular la raíz cuadrada se denota y se define cuando $a \in R$ con $a \geq 0$ $\sqrt{a} = a^{1/2}$

El radical de raíz cuadrada es válido si el radicando es igual o mayor que 0

$\sqrt{1} = 1$

$\sqrt{0} = 0$ Observacion

$\sqrt{a^2} = a$

Una cosa es tener $\sqrt{a} = +\sqrt{a}$ y otra $-\sqrt{a}$

Porque $x^2 = 4$

Lleva a $\sqrt{x^2} = \pm\sqrt{4}$

$x = \pm 2$

Shekale que $y^2 = 16$

$y^2 - 16 = 0$

$(y+4)(y-4) = 0$

Ejercicio Para el conjunto $f(x) = \sqrt{x-2}$ ¿donde es valido el radical?

$x - 2 \geq 0 \quad x \geq 2$

Para $f(x) = \sqrt{x} - 2 \quad x \geq 0$

Para $\dfrac{1}{\sqrt{x}} \quad x > 0$

Para $\sqrt{\dfrac{1}{3} - \dfrac{2}{6}x} \quad \sqrt{\dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{3}x} \quad \dfrac{1}{3}(1 - x) \geq 0$

$1 - x \geq 0$

$1 \geq x \rightarrow x \in (-\infty, 1]$

Si $\sqrt{a}$ existe cuando $a \geq 0$

y $\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$

donde $\sqrt{a^2} = a$

Simplifique $\sqrt{18} \quad \sqrt{18} = \sqrt{9 \cdot 2} = \sqrt{9} \cdot \sqrt{2} =$

$\sqrt{3^2} = \sqrt{2} = 3\sqrt{2}$

Simplifique $\sqrt{x^3 - 3x^2y + 3xy^2 + y^2}$

$\sqrt{(x-y)^3}$

$\sqrt{(x-y)^2(x-y)}$

$(x-y)\sqrt{(x-y)}$

Verificar que $\sqrt{e^{2x} + 2 + e^{-2x}} = e^x + e^{-x}$

$(e^x + e^{-x})^2 = (e^x)^2 + 2(e^x)(e^{-x}) + (e^{-x})^2$

$e^{2x} + 2 + e^{-2x}$

$\sqrt{e^{2x} + 2 + e^{-2x}}$

Eso es $2\cosh x$

22/08/2018

Propiedades de las operaciones entre numeros

Con el álgebra buscamos:

* Simplificar expresiones algebraicas
* Resolver ecuaciones algebraicas

En las fracciones $\frac{am}{bm} = \frac{a}{b}$

Se simplifica el término común

Recordar: $\frac{a}{1} = a \quad a^1 = a \quad 1a = a$

Ejemplo $\frac{\sqrt{6}\,xy^3}{\sqrt{2}\,xy^2} = \frac{\cancel{\sqrt{2}}\cdot\sqrt{3}\,\cancel{xy^2}\,y}{\cancel{\sqrt{2}}\,\cancel{xy^2}} = \sqrt{3}\,y$

$$\frac{y^2-x^2}{2x+2y} = \frac{(y-x)\cancel{(y+x)}}{2\cancel{(x+y)}} = \frac{y-x}{2}$$

$$\frac{x^3-8}{x+2} = \frac{x^3-2^3}{x+2} = \frac{\cancel{(x-2)}(x^2+2x+4)}{\cancel{x-2}} = x^2+2x+4$$

$$\frac{x+1}{x^3+1} = \frac{\cancel{(x+1)}}{\cancel{(x+1)}(x^2-x+1)} = \frac{1}{x^2-x+1}$$

$$\frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{x-y}\cdot\frac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}} = \frac{\cancel{x-y}}{\cancel{x-y}(\sqrt{x}-\sqrt{y})} = \frac{1}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}$$

$$\frac{\sqrt[3]{y}+2}{y+8}\ \frac{\sqrt[3]{y}+2}{(\sqrt[3]{y})^3+2^3} = \frac{\cancel{\sqrt[3]{y}+2}}{\cancel{(\sqrt[3]{y}+2)}(\sqrt[3]{y^2}-2\sqrt[3]{y}+4)} = \frac{1}{\sqrt[3]{y^2}-2\sqrt[3]{y}+4}$$

23/08/2018

Factorización

$$x^2+bx+c = (x+n_1)(x+n_2) \quad n_1+n_2=b,\ n_1\cdot n_2=c$$

$$ax^2+bx+c = \frac{a(ax^2+bx+c)}{a} = \frac{(ax+n_1)(ax+n_2)}{a} \quad n_1+n_2=b,\ n_1\cdot n_2=ac$$

"Tu vas a ser grande cuando resuelvas problemas grandes"

Scribe

$$\frac{4x^2-25x+36}{x^2+x-6} = \frac{16x^2-4(25)x+144}{4}$$

$$\frac{(4x-16)(4x-9)}{4}$$

$$(x-4)(4x-9)$$

$$x^2+x-6 \downarrow (x+3)(x-2)$$

$$\frac{(x-4)(4x-9)}{(x+3)(x-2)}$$

$$\frac{x^2-3x-4}{2x^2-9x+4} \qquad \frac{\cancel{(x-4)}(x+1)}{\cancel{(x-4)}(2x-1)}$$

$$\downarrow$$

$$\frac{4x^2-2(9)x+8}{2}$$

$$\frac{(2x-8)(2x-1)}{2}$$

$$(x-4)(2x-1)$$

24/08/2018

Simplificar

$$\frac{x^2-5x-6}{x^2-2x-3}$$

$$\frac{(x-6)\cancel{(x+1)}}{(x-3)\cancel{(x+1)}} = \frac{x-6}{x-3}$$

$$\frac{12x^2-19x+4}{6x^2-17x+12} \Rightarrow \frac{\dfrac{144x^2-12(19)x+48}{12}}{\dfrac{36x^2-6(17)x+72}{6}}$$

$$\downarrow$$

$$\frac{\dfrac{\cancel{(12x-16)}(12x-3)}{12}}{\dfrac{(6x-9)\cancel{(6x-8)}}{6}} =$$

$$\frac{\cancel{(x-1.33)}(12x-3)}{(6x-9)\cancel{(x-1.33)}} = \frac{12x-3}{6x-9} = \frac{\cancel{3}(4x-1)}{\cancel{3}(2x-3)}$$

$$\frac{4x-1}{2x-3}$$

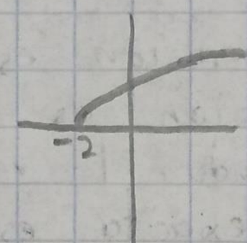
Observación

La simplificación algebraica es fundamental para los conjuntos $y = f(x)$ porque sólo simplificando a la regla $f(x)$ se puede efectuar su operador y se puede hacer su gráfica

Ejemplo

Sea $y = \sqrt{\dfrac{x^2-4}{-2+x}}$

Hacer la gráfica



Calcular $\lim\limits_{x \to 2} y = 4$

Derivar $\left(\dfrac{x^2-4}{-2+x}\right)^{1/2} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{x^2-4}{x-2}\right)^{-1/2} \cdot \dfrac{(2x)(x-2)-(x^2-4)(1)}{(x-2)^2}$

O mejor simplificar: $\sqrt{x+2} = (x+2)^{1/2} = \dfrac{1}{2}(x+2)^{-1/2}$

$$\frac{1}{2\sqrt{x+2}}$$

Integrar $\sqrt{x+2}$ $\quad \int \sqrt{x+2}\, dx = \int \dfrac{(x+2)^{1/2+1}}{1/2+1} + c$

$$\frac{(x+2)^{3/2}}{3/2} + c$$

27/08/2018

Operaciones para las fracciones

$\frac{a}{b} = ab^{-1}$ con $b \neq 0$

b es denominador

a es numerador

Usamos reglas de operación

$$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{ad \pm cb}{bd}$$

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{ad}{bc}$$

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^p = \frac{a^p}{b^p}$$

Efectuar la operación es

- Si la división es exacta, encontrar un cociente siendo el residuo 0
- Si no es exacta es encontrar un cociente y un residuo diferente de 0

$$\frac{a}{b} = c \quad \text{o bien} \quad \frac{a}{b} = c + \frac{r}{b}$$

Ejemplos:

$$\frac{1}{2} - 1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{1} = \frac{1}{2} - \frac{2}{2} = -\frac{1}{2}$$

$$\frac{a}{b} - 1 = \frac{a}{b} - \frac{b}{b} = \frac{a-b}{b}$$

$$\frac{a}{b} + 1 = \frac{a+b}{b}$$

$$x - \frac{1}{x} = \frac{x^2}{x} - \frac{1}{x} = \frac{x^2-1}{x} = \frac{(x+1)(x-1)}{x}$$

$$\theta + \frac{1}{\theta} = \frac{\theta^2}{\theta} + \frac{1}{\theta} = \frac{\theta^2+1}{\theta}$$

$$x+1-\frac{1}{x-1}=\frac{(x+1)(x-1)}{x-1}-\frac{1}{x-1}$$

$$\frac{x^2-1-1}{x-1}=\frac{x^2-2}{x-1}$$

$$x+y+\frac{x}{x-y} \quad \frac{(x+y)(x-y)}{x-y}+\frac{x}{x-y}$$

$$\frac{x^2-y^2+x}{x-y}=\frac{x^2+x-y^2}{x-y}$$

$$\left(\frac{x-2}{\sqrt{x^2-4}}\right)^2 \quad \left(\frac{x-2}{\sqrt{(x+2)(x-2)}}\right)^2$$

$$\left(\frac{x-2}{[(x+2)(x-2)]^{1/2}}\right)^2$$

$$\left[\frac{x-2}{(x+2)^{1/2}(x-2)^{1/2}}\right]^2$$

$$\left(\frac{\sqrt{x-2}}{\sqrt{x+2}}\right)^2=\frac{x-2}{x+2}$$

$$\sqrt{\frac{(x-y)}{(x^2-y^2)^2}}$$

$$\sqrt{\frac{x-y}{[(x+y)(x-y)]^2}}=\frac{\sqrt{x-y}}{(x+y)(x-y)}=\frac{1}{(x+y)\cdot\sqrt{x-y}}$$

$$1+\left(\frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta}\right)^2 \quad \frac{\operatorname{sen}^2\theta+\cos^2\theta}{\operatorname{sen}^2\theta}=\frac{1}{\operatorname{sen}^2\theta}=\csc^2\theta$$

28/08/2018

Efectuar Operaciones

$$\frac{x^2-4}{x^2+2x} \quad \frac{x^2}{x-2}=\frac{(x^2-4)x^2}{(x^2+2x)(x-2)}=\frac{\cancel{(x+2)}\cancel{(x-2)}x^{\cancel{2}}}{\cancel{x}\cancel{(x+2)}\cancel{(x-2)}}$$

$$\downarrow$$

$$x$$

$$\frac{x^2-9}{x+3} \; \frac{x^2+6x+9}{3-x} = \frac{\cancel{(x+3)}(x-3)(x+3)(x+3)}{\cancel{(x+3)}(3-x)}$$

$$\frac{(x^2-9)(x+3)}{3-x}$$

$$\frac{(x-3)(x+3)(x+3)\cdot -1}{(3-x)\cdot -1} = \frac{\cancel{(x-3)}(x+3)(x-3)}{\cancel{x-3}}$$

Está mal

$$x^2-9$$

$$\frac{2x-2}{x^2+2x-8} \; \frac{x^2+5x+4}{x^2-1} = \frac{2\cancel{(x-1)}\cancel{(x+4)}\cancel{(x+1)}}{\cancel{(x+4)}(x-2)\cancel{(x+1)}\cancel{(x-1)}}$$

$$\frac{2}{x-2}$$

$$(x^{-1}-y)^{-1} = \frac{1}{x^{-1}-y} = \frac{1}{\frac{1}{x}-y}$$

$$\frac{1}{\frac{1-xy}{x}} = \frac{x}{1-xy}$$

$$(x^{-1}-y^{-1})^2 = \left(\frac{1}{x}-\frac{1}{y}\right)^2 = \frac{1}{x^2} - \frac{2}{xy} + \frac{1}{y^2}$$

29/08/2018

Efectuar

$$\frac{1}{2a}-\frac{3}{10a^2b}+\frac{5}{25ab^3}$$

Solución

T. común

$$\left.\begin{array}{l} 2\ a \\ 2(5)\cdot a\cdot a\cdot b \\ 5(5)\cdot a\cdot b\cdot b\cdot b \end{array}\right\} 25\cdot 2\cdot a^2\cdot b^3$$

$$50a^2b^3$$

$$\frac{25ab^3-15b^2+10a}{50a^2b^3}$$

Efectuar

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{14a^2}-\frac{1}{7ab}$$

Solución

T. común

$$\left.\begin{array}{l} 2 \\ 7(2)a\cdot a \\ 7\cdot a\cdot b \end{array}\right\} 14a^2b$$

$$\frac{7a^2b+b-2a}{14a^2b}$$

Efectuar

$$\frac{x}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}-\frac{y}{x-y}$$

Solución

T. común

$$\left.\begin{array}{l} \sqrt{x}+\sqrt{y} \\ (\sqrt{x}+\sqrt{y})(\sqrt{x}-\sqrt{y}) \end{array}\right\} x-y$$

$$\frac{x(\sqrt{x}-\sqrt{y})-y}{x-y}=\frac{x\sqrt{x}-x\sqrt{y}-y}{x-y}$$

Efectuar

$$\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{3}{2} \qquad \frac{\sqrt{2}-3}{2}$$

Efectuar

$$\frac{10b^2 - ab}{a^3 - 4ab^2} - \frac{1}{a-2b} + \frac{2}{a}$$

Solución

T común $\quad a(a^2-4b^2) \to a(a-2b)(a+2b) \Big\} a^3 - 4ab^2$

$a-2b$

a

$$\frac{10b^2 - ab - (a^2+2ab) + 2(a^2-4b^2)}{a^3-4ab^2}$$

$$\frac{10b^2 - ab - a^2 - 2ab + 2a^2 - 8b^2}{a^3-4ab^2}$$

$$\frac{2b^2 - 3ab + a^2}{a^3 - 4ab^2}$$

30/08/2018

Simplificar

$$\frac{2 - \frac{3}{5}}{1 - \frac{7}{10}} \qquad \frac{\frac{7}{5}}{\frac{3}{10}} = \frac{70}{15} = \frac{7 \cdot \cancel{5} \cdot 2}{\cancel{5} \cdot 3} = \frac{14}{3}$$

$$\frac{1 - \frac{1}{x^3}}{1 - \frac{1}{x}} \qquad \frac{\frac{x^3-1}{x^3}}{\frac{x-1}{x}} = \frac{(x^3-1)(x)}{(x^3)(x-1)} = \frac{\cancel{(x-1)}(x^2+x+1)\cancel{(x)}}{x^3\cancel{(x-1)}}$$

$$\frac{x^2+x+1}{x^2}$$

$$\frac{x+1+\frac{x+1}{x-1}}{x-\frac{2}{x-1}} = \frac{\frac{(x+1)(x-1)+x+1}{x-1}}{\frac{x(x-1)-2}{x-1}} = \frac{x^2-1+x+1}{x^2-x-2}$$

$$\frac{x^2+x}{x^2-x-2} = \frac{x\cancel{(x+1)}}{(x-2)\cancel{(x+1)}} = \frac{x}{x-2}$$

$$\frac{1-\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}}{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}} = \frac{\frac{x^2-x-2}{x^2}}{\frac{x+1}{x^2}} = \frac{(x-2)\cancel{(x+1)}}{\cancel{x+1}} = x-2$$

31/08/2018

Conjuntos de Numeros en la Recta Real $\mathbb{R}$

Cero es el punto de partida, contamos de 0 a infinito + y −

Se definen conjuntos de números que les llamaremos intervalos:

Intervalo abierto (a, b) $a < x < b$ Aquí está la derivada

Intervalo cerrado $[a, b]$ $a \leq x \leq b$ Aquí la integral

Estos conjuntos se definen por una característica o propiedad de los números reales llamada tricotomía

Tricotomía

Dadas a y b, números reales, una y sólo una de las siguientes relaciones se cumple:

- $a < b$ a es más pequeño que b
- $a = b$ a es igual a b
- $a > b$ b es más pequeño que a

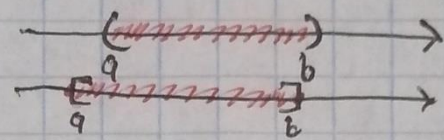
$a < b$ a está a la izquierda de b

$b > a$ b está a la derecha de a

$a \leq b$ a está a la izquierda o es igual a b

$x \in (a, b) = a < x < b$

$x \in [a, b] = a \leq x \leq b$



Si I y J son intervalos de sus operaciones entre esos conjuntos son:

$x \in I \cup J$

$x \in I \cap J$

$x \in I^c$ $x \in J^c$

03/09/2018

Los intervalos o conjuntos de números de $\mathbb{R}$ se obtienen de:

- Resolver desigualdades
- Tener pertenencia al conjunto definido por $\sqrt{a}$

Lo anterior es en realidad saber despejar a la variable o incógnita bajo la regla de signos

$(-)(-) = +$

$(+)(+) = +$

$(-)(+) = -$

$(+)(-) = -$

$ab > 0 \longleftrightarrow \{a > 0 \text{ y } b > 0\}$ ó $\{a < 0 \text{ y } b < 0\}$

$ab < 0 \longleftrightarrow \{a > 0 \text{ y } b < 0\}$ ó $\{a > 0 \text{ y } b < 0\}$

$ab > 0 \leftrightarrow \{a > 0 \cap b > 0\} \cup \{a < 0 \cap b < 0\}$

$ab < 0 \leftrightarrow \{a > 0 \cap b < 0\} \cup \{a < 0 \cap b > 0\}$

La negación de un conjunto
$a < b$ es $-a > -b$

Al multiplicar por (-1) o un negativo cambiamos el orden de la desigualdad

La desigualdad o inecuación que resolvemos es siempre la lineal $ax + b < c$
y se resuelve por operaciones inversas

Determine el conjunto solución de la desigualdad

$2x < 5 + 3$
$2x < 8$
$x < 4$ $\quad x \in (-\infty, 4)$

$-2x - 3 < 5$
$-2x < 8$
$x > -4$ $\quad x \in (-4, \infty)$

$2 < 3x - 4 < 5$
$6 < 3x$ $\quad 3x < 9$
$2 < x$ $\quad x < 3$
$2 < x < 3$
$x \in (2, 3)$

$x^2 - x > 0$
$x(x-1) > 0$ $\therefore$ por regla de signos
$x > 0$ y $x - 1 > 0$ $\quad (1, \infty)$
ó $\quad \cup$
$x < 0$ y $x - 1 < 0$ $\quad (-\infty, 0)$
$\downarrow$
$(-\infty, 0) \cup (1, \infty)$

$x^2 - x < 0$

$x(x-1) < 0$ por regla de signos

$x > 0$ $\therefore$ $(0,1)$ $x < 0$

$x-1 < 0$ $x-1 > 0$

04/09/2018

Resolver $x^2 + 2x - 15 > 0$

$(x+5)(x-3) > 0$

Por regla de signos

$(x+5)$ y $(x-3)$ deben ser mayor a 0

o bien los dos menores a 0

$x+5 > 0$ $x > -5$ $x+5 < 0$ $x < -5$

$x-3 > 0$ $x > 3$ $x-3 < 0$ $x < 3$

$$\underbrace{\begin{matrix} x > -5 \\ x > 3 \end{matrix} \quad \cup \quad \begin{matrix} x < -5 \\ x < 3 \end{matrix}}_{(-\infty, -5) \cup (3, \infty)}$$

¿Que es tener nada?

$2 \cdot \frac{1}{4}$ 0 Incorrecto

Conjunto Vacío Correcto

Determinar los valores de x para los que $\sqrt{1-x}$ son números reales

$\sqrt{1-x} < 0$

$(1-x)^{1/2}$

$\downarrow$

$1 - x \geq 0$

$1 \geq x$

$\sqrt{\frac{2}{5}x - 2}$ $\frac{2}{5}x - 2 \geq 0 \rightarrow x \geq 5$

Determinar los valores de x para los que $\sqrt{2x^2+5x-3}$ es un número real

$2x^2+5x-3 \geq 0$

$$\frac{4x^2+2(5)x-6}{2} = \frac{(2x+6)(2x-1)}{2}$$

$$(x+3)(2x-1) \geq 0$$

$\{x+3 \geq 0$ y $2x-1 \geq 0\}$ ó $\{x+3 \leq 0$ y $2x-1 \leq 0\}$

$x \geq -3$ y $x \geq \frac{1}{2}$ ó $x \leq -3$ y $x \leq \frac{1}{2}$

$$x \in (-\infty, -3] \cup [\tfrac{1}{2}, \infty)$$

Determinar $y = \sqrt{16-x^2}$

$16-x^2 \geq 0$

$(4-x)(4+x) \geq 0$

$\{4-x \geq 0$ y $4+x \geq 0\}$ ó $\{4-x \leq 0$ y $4+x \leq 0\}$

$4 \geq x$ y $x \geq -4$ ó $4 \leq x$ y $x \leq -4$

$[-4, 4]$ $\cup$ $\varnothing$

$$x \in [-4, 4]$$

06/09/2018

El Valor Absoluto en los Numeros Reales

Mide la distancia entre números y define conjuntos de R que se denominan vecindades abiertas y cerradas

Si a es un número real se define:

$$|a| \begin{cases} a & \text{si } a \geq 0 \\ -a & \text{si } a < 0 \end{cases}$$

La distancia entre dos números;

$|a-b| = |b-a|$

Ejercicio

Aplique la definición de valor absoluto y obtener el valor de x

$|2x-5| = 7$

$2x-5=7$ | $-(2x-5)$
$2x=12$ | $-2x+5=7$
$x=6$ | $-2x=2$
 | $x=-1$

$|4x+3| = 7$

$4x+3=7$ | $-(4x+3)=7$ ($-4x-3$)
$4x=4$ | $-4x=10$
$x=1$ | $x=-\frac{10}{4}$

07/09/2018

Propiedades de Conjunto que define el valor absoluto

Si k es positivo

$|a|<k$ significa que $-k<a<k$ ← Vecindad abierta

Sto stá mal xd $|a| \leq k \rightarrow -k \leq a \leq k$ ← Vecindad cerrada

Ejemplo

$|2x+4| < 6$

$-6 < 2x+4 < 6$

$\underbrace{\begin{matrix} -6 < 2x+4 & \quad & 2x+4<6 \\ -10 < 2x & & 2x<2 \\ -5 < x & & x<1 \end{matrix}}_{x>-5}$

$x \in (-5, 1)$

$|2x - 5| \leq 3$

$-3 \leq 2x - 5 \leq 3$

$-3 \leq 2x - 5$ $\qquad$ $2x - 5 \leq 3$

$\frac{2}{2} \leq x$ $\qquad$ $2x \leq 8$

$1 \leq x$ $\qquad$ $x \leq 4$

$x \in [1, 4]$

$|2x - 5| > 3$

$2x - 5 < -3$ $\qquad$ $3 < 2x - 5$

$x < 1$ $\qquad$ $4 < x$

Si queremos que $|x - a|$ sea una distancia pequeña, decimos que para $\delta > 0$ entonces $|x - a| < \delta$ es un número pequeño

10/09/2018

Si $k > 0$:

Sto si Sta bien

$|x| > k \rightarrow x > k$ ó $x < -k$

$|x| \geq k \rightarrow x \geq k$ ó $x \leq -k$

Resolver

$|3x + 2| > 5$

$3x + 2 > 5$ $\qquad$ $3x + 2 < -5$

$3x > 3$ $\qquad$ $3x < -7$

$x > 1$ $\qquad$ $x < \frac{-7}{3}$

$(-\infty, -\frac{7}{3}) \cup (1, +\infty)$

8 ∞

Resolver

$$|5-2x| \geq 7$$

$5-2x \geq 7$
$-2x \geq 2$
$x \leq -1$

$5-2x \leq -7$
$-2x \leq -12$
$x \geq 6$

$$(-\infty, -1] \cup [6, +\infty)$$

Todos los que no entran en el conjunto son el complemento del conjunto

La Topología en R

Un conjunto I dentro de R es un intervalo

De I estudiamos
- Su interior
- Su exterior
- Su frontera

Por ejemplo:

Interior: $I = (a, b) = a < x < b$
Frontera: $I = \partial I = \{a, b\}$
Exterior: $I = I^c$

En las operaciones de R evitamos la forma indeterminada de dividir por 0

Ni $\frac{0}{0}$ ni $\frac{x}{0}$

Ejemplos:

$f(x) = \frac{x+5}{x}$ Es válida en $x \in R - \{0\}$

$f(x) = \frac{x+5}{x^2-9}$ Es válido en $x \in R - \{-3, 3\}$

$f(x) = \frac{1}{x(x^2+5x+6)(x^2-25)}$ Es valido $x \in R - \{-5, -3, -2, 0, 5\}$

Propiedades de Operacion con Valor Absoluto

$$a^2 = |a|^2$$

Puedo quitar un valor absoluto elevando al cuadrado

Resolver
$$|x| = 5$$
$$x^2 = 25$$
$$x^2 - 25 = 0$$
$$(x+5)(x-5) = 0$$
$$x = 5$$
$$x = -5$$

A numa
Que pez

Observación $\sqrt{a^2} = \sqrt{|a|^2} = |a|$ A numa

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{\sqrt{x^2+2}}{x+5}$$

Como x tomo negativos

$$x = \sqrt{x^2} = \sqrt{|x|^2} = |x| = -x$$

Omaiga

$$\frac{\frac{\sqrt{x^2+2}}{-x}}{\frac{x+5}{x}}$$

11/09/2018

$$|abc| = |a| \cdot |b| \cdot |c|$$

$$\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$$

$$|x^2-4| = |(x+2)(x-2)| = |x+2| \cdot |x-2|$$

$$\left|\frac{2}{x-1}\right| = \frac{|2|}{|x-1|} = \frac{2}{|x-1|}$$

Comparación

Sea $k > 0$

$|a| < k$ significa $-k < a < k$

$|a| > k$ significa $a > k$ y $a < -k$

Por ser $|a| \geq 0$

$-|a| \leq a \leq |a|$

Si $|a| = |b| \rightarrow a = b$ ó $a = -b$

Resolver para x

$|5x - 3| = |3x + 5|$

$5x - 3 = 3x + 5$ ó $5x - 3 = -(3x + 5)$

$5x - 3x = 8$ $\quad$ $8x = -2$

$2x = 8$ $\quad$ $x = -\frac{1}{4}$

$x = 4$

$x \in \{-\frac{1}{4}, 4\}$

Resolver

$|x - 2| = |3 - 2x|$

$x - 2 = 3 - 2x$ ó $x - 2 = -(3 - 2x)$

$3x = 5$ $\quad$ $-x = -1$

$x = \frac{5}{3}$ $\quad$ $x = 1$

$x \in \{1, \frac{5}{3}\}$

Las operaciones se hacen termino a termino

$x = a$ $\quad$ $y = b$

$x + y = a + b$

$x - y = a - b$

$a < b$ y $x < y$

$a + x < b + x$

$a - x < b - y$

Demostrar la desigualdad del triangulo

$$|a+b| \leq |a| + |b|$$

$$\sqrt{(a+b)^2} \leq \sqrt{a^2} + \sqrt{b^2}$$

$$\sqrt{a^2+2ab+b^2} \leq \sqrt{a^2} + \sqrt{b^2}$$

Solución

Como

$$-|a| \leq a \leq |a| \quad y \quad -|b| \leq b \leq |b|$$

Sumo de termino a termino

$$-|a| + (-|b|) \leq a + b \leq |a| + |b|$$

$$-(|a| + |b|) \leq a + b \leq |a| + |b|$$

y como

$$-k < a < k \rightarrow |a| < k$$

Entonces

$$|a+b| \leq |a| + |b|$$

El Trinomio Cuadrado Perfecto y el Algoritmo para completarlo

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$y^2 + y + \frac{1}{4} = \left(y + \frac{1}{2}\right)^2$$

Los trinomios $x^2 + bx + c$ y $ax^2 + bx + c$ siempre se llevan a la forma $a^2 - b^2$ para obtener sus factores lineales y primos

$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$

O bien $ax^2 + bx + c$ en forma $a^2 - b^2$ es poder completar el T.C.P.

Método:

Dado $x^2 + bx + c$

$(x^2 + bx) + c$ P. Distributiva

El coeficiente del término lineal se divide entre 2 y el resultado se eleva al cuadrado

$$\left(x^2 + bx + \frac{b^2}{4}\right) + c - \frac{b^2}{4}$$

Ejemplo: $x^2 + 8x - 9$

$(x^2 + 8x + 16) - 9 - 16$

$(x+4)^2 - 25$

$[(x+4)+5][(x+4)-5]$

$(x+9)(x-1)$

$x^2 - 6x + 5$

$(x^2 - 6x) + 5$

$\downarrow$

$\frac{6}{2} = 3^2 = 9$

$(x^2 - 6x + 9) + 5 - 9$

$(x-3)^2 - 4$

$[(x-3) - 2][(x-3) + 2]$

$(x-5)(x-1)$

$x^2 + 20x + 99$

$(x^2 + 20x) + 99$

$\downarrow$

$\frac{20}{2} = 10^2 = 100$

$(x^2 + 20x + 100) + 99 - 100$

$(x+10)^2 - 1$

$[(x+10) - 1][(x+10) + 1]$

$(x+9)(x+11)$

13/09/2018

$9x^2 + 54x + 77$

Solución:

$(9x^2 + 54x) + 77$

$9(x^2 + 6x + 9) + 77 - 81$

$9(x+3)^2 - 4$

$[3(x+3)]^2 - 2^2$

$[3(x+3) + 2][3(x+3) - 2]$

$3x^2 - 12x$

$3(x^2 - 4x)$

$3(x^2 - 4x + 4) - 12$

$[3(x-2)^2] - 12$

$[\sqrt{3}(x-2) - 2\sqrt{3}][\sqrt{3}(x-2) + 2\sqrt{3}]$

Final Alternativo

$$3(x-2)^2-12$$
$$3[(x-2)^2-4]$$
$$3[\{(x-2)+2\}\{(x-2)-2\}]$$
$$3[x(x-4)]$$
$$3x(x-4)$$

OMAIGA

$$5x^2-15x-4$$
$$5(x^2-3x)-4$$
$$5\left(x^2-3x+\frac{9}{4}\right)-4-\frac{45}{4}$$
$$5\left(x-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{61}{4}$$
$$\left[\sqrt{5}\left(x-\frac{3}{2}\right)\right]^2-\left(\frac{\sqrt{61}}{2}\right)^2$$
$$\left[\sqrt{5}\left(x-\frac{3}{2}\right)-\frac{\sqrt{61}}{2}\right]\left[\sqrt{5}\left(x-\frac{3}{2}\right)+\frac{\sqrt{61}}{2}\right]$$

2.5
1.5
75 5
5
125

14/09/2018

Resolución de la Ecuacion de Segundo Grado $ax^2+bx+c=0$

Introduccion a la función polinomial

$y=f(x)=a_nx^n \dots a_2x^2+a_1x^1+a_0$ cuando $f(x)=0$

Se le llama ecuación en la variable x de grado n

Es decir, toda ecuacion de grado $n\geq 2$ se busca resolver por factorización en la forma:

$$(x-c_1)(x-c_2)(x-c_3)\dots(x-c_n)=0$$

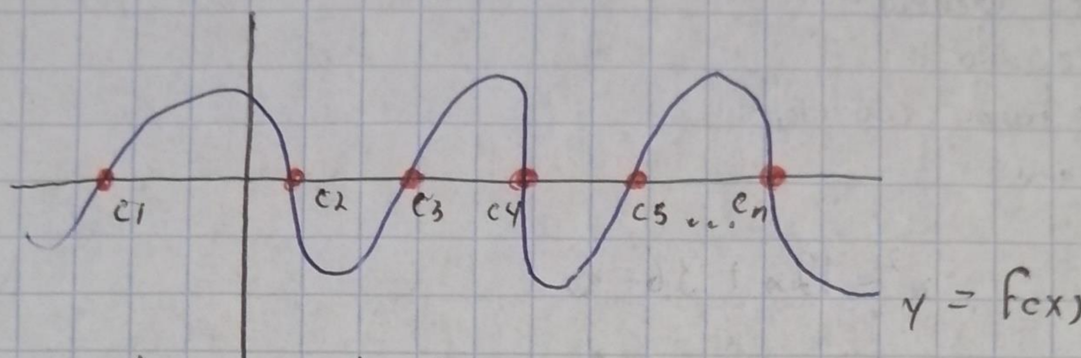
Donde c1, c2, c3, cn pueden ser números reales todos diferentes o bien se pueden repetir y puede ser que sean números complejos

La resolución de toda ecuación de grado $n\geq 2$

Es posible por la propiedad algebraica

$a\,0=0$ Si $ab=0$, entonces $a=0$ ó $b=0$

Geometricamente $y = f(x)$ es una curva del plano R^2 o xy



Las soluciones de la ecuación son $x = c_1$, $x = c_2$, $x = c_3$, $x = c_4$ ... $x = c_n$ que son las intersecciones de la curva $y = f(x)$ con el eje x

A la solución de una ecuación se le llama solución, cero o raíz de la ecuación

Ejercicio

Resolver la ecuación $x^2 + 5x + 6 = 0$

a) Usando la fórmula general

b) Factorizando

c) Completar el TCP para graficar la función original

a) $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ $\quad \dfrac{-5 \pm \sqrt{25 - 24}}{2}$

$\dfrac{-5 + 1}{2}$ $\quad \dfrac{-5 - 1}{2}$

$-2 \quad -3$

b) $(x + 3)(x + 2)$

c) $(x^2 + 5x) + 6$

$$\left(x^2 + 5x + \frac{25}{4}\right) + 6 - \frac{25}{4} \rightarrow \left(x + \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}$$

$$[x+2][x+3] \longleftarrow \left[\left(x + \frac{5}{2}\right) - \frac{1}{2}\right]\left[\left(x + \frac{5}{2}\right) + \frac{1}{2}\right]$$

17/09/2018

Ejercicio
Resolver
a) Con F. General
b) Factorizando
c) Completando cuadrados
d) Graficando

a)

$$x^2-12x+36=0$$

$$\frac{-(-12)\pm\sqrt{(-12)^2-4(1)(36)}}{2(1)}$$

$$x_1=\frac{12+0}{2} \qquad x_2=\frac{12-0}{2}$$

$$x=6 \qquad x=6$$

Con multiplicidad algebraica de orden $k=2$

La solución se repite

Numero de veces que se repite la solución

b)

$$x^2-12x+36=0$$

$$(x-6)(x-6)=0$$

$$x=6 \qquad x=6$$

Con multiplicidad algebraica de orden $k=2$

c)

$$(x^2-12x)+36=0$$

$$(x^2-12x+36)+36-36=0$$

$$(x-6)^2=0$$

Multiplicidad $k=2$

$-2 = -1 \cdot 2$

$\sqrt{-2^2} = \sqrt{-1^2 \cdot 2^2}$

$\sqrt{-1^2} \cdot \sqrt{2^2}$

$i^2 \quad = -1 \quad 2$

Observación

Resolver a una ecuación es despejar a la variable bajo las reglas

$$(\sqrt{x}^{\,2}) = \sqrt{x^2} = x$$

Resolver

$$x^4 - x^3 = 0$$
$$x^3(x-1) = 0$$
$$x=0,\quad x=0,\quad x=0,\quad x=1$$

Multiplicidad $k=3$

Ejemplo $x^4 - 16 = 0$

$$(x^2+2^2)(x^2-2^2)=0$$

$x^2+2^2=0$

$(x^2-(-2^2))$

$x^2 - [(\sqrt{-1})^2 \cdot 2^2)] = 0$

$(x+2i)(x-2i)=0$

$x=-2i \quad x=2i$

$x^2-2^2=0$

$(x+2)(x-2)=0$

$x=-2 \quad x=2$

18/09/2018

Resolver una ecuación es despejar a la variable sin olvidar que:

$ab=0 \leftrightarrow a=0,\ b=0$

Ejercicio

Resolver $x^2 = \dfrac{x+3}{2}$

$$2x^2 - x - 3 = 0$$
$$\frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4(2)(-3)}}{4}$$
$$\frac{1 \pm \sqrt{1+24}}{4}$$
$$\frac{1+5}{4} \qquad \frac{1-5}{4}$$
$$\frac{6}{4} \qquad -1$$

Resolver

$$\frac{1}{2x+3} - \frac{2}{2x-3} = \frac{1}{4x^2-9}$$

$$\frac{2x-3-4x-6}{4x^2-9} = \frac{1}{4x^2-9}$$

$$\frac{-2x-9}{4x^2-9} = \frac{1}{4x^2-9}$$

$$-\frac{2x+9}{4x^2-9} = \frac{1}{4x^2-9}$$

$$-2x-9 = \frac{1\cdot(4x^2-9)}{\cancel{4x^2-9}}$$

$$0 = 2x+10$$

$$-10 = 2x$$

$$-5 = x$$

Resolver

$$\frac{x}{3} = \frac{6}{x} - 1$$

$$0 = \frac{6}{x} - \frac{x}{x} - \cancel{[illegible]}$$

$$\frac{x}{3} = \frac{6-x}{x}$$

$$\cancel{x = \frac{18-3x}{x}}$$

$$\cancel{0 = \frac{6-x}{x} - \frac{x}{3}}$$

$$\cancel{\frac{18-3x}{3x} - \frac{x^2}{3x}}$$

$$\cancel{0 = \frac{-x^2-3x+18}{3x}}$$

$$\cancel{-\frac{1}{3}x - 1 + \frac{6}{x}}$$

$$\frac{x}{3} = \frac{6-x}{x}$$

$$x^2 = 18-3x$$

$$x^2+3x-18 = 0$$

$$(x+6)(x-3) = 0$$

$$x = -6 \qquad x = 3$$

$\sqrt{x} = 6$

$x = 36$

$\sqrt{\sqrt{x} + 2} = \sqrt{2x - 4}$

$\sqrt{x} + 2 = 2x - 4$

$\sqrt{x} = 2x - 6$

$x = 4x^2 - 24x + 36$

$0 = 4x^2 - 25x + 36$

$$\frac{-(-25) \pm \sqrt{(-25)^2 - 4(4)(36)}}{8}$$

$$\frac{25 \pm 7}{8}$$

$x_1 = 4 \qquad x_2 = 2.25$

$\sqrt{x+7} = \sqrt{2x} + 1$

$x + 7 = 2x + 2\sqrt{2x} + 1$

$(-x + 6) = 2\sqrt{2x}$

$36 - 12x + x^2 = 4 \cdot 2x$

$x^2 - 20x + 36 = 0$

formula general xd

$x_1 = 18 \qquad x_2 = 2$

14/09/2018

Resolver

$\sqrt{x^2 - 9} = 9 - x$

$x^2 - 9 = 81 - 18x + x^2$

$x^2 - 19x + 90 = 0$	$90 - 18x = 0$
$(x - 10)(x - 9)$	$9(10 - 2x) = 0$
$x_1 = 10$	$-2x = -10$
$x_2 = 9$	$x = 5$

$\sqrt[3]{x^2 - 9} = 3 - x$

$(x^2 - 9) = (3 - x)^3$

$27 - 3(9)x + 3(3)x^2 - x^3$

$x^2 - 9 = 27 - 27x + 9x^2 - x^3$

$0 = 36 - 27x + 8x^2 - x^3$

Otra solución

$$x^2 - 9 = (3-x)^3$$

$$(x+3)(x-3) = (3-x)(3-x)(3-x)$$

$$(x+3)\cancel{(x-3)} = -1\cancel{(x-3)}(3-x)(3-x)$$

$$x+3 = -(3-x)^2$$

$$x+3 = -(9-6x+x^2)$$

$$x+3 = -9+6x-x^2$$

$$x+3+x^2-6x+9 = 0$$

$$x^2-5x+12 = 0$$

$$x = \frac{-(-5) \pm \sqrt{25-48}}{2}$$

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{-23}}{2}$$

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{23}\,i}{2}$$

$$x_1 = \frac{5+\sqrt{23}\,i}{2} \qquad x_2 = \frac{5-\sqrt{23}\,i}{2}$$

$$\frac{4x}{\frac{3}{2x}} = \frac{\frac{4x}{3}}{2x}$$

$$4x = \frac{\frac{12x}{3}}{4x^2}$$

$$16x^3 = \frac{12x}{3}$$

$$16x^3 = 4x$$

$$16x^3 - 4x = 0$$

$$x(16x^2-4) = 0$$

$$x = 0 \qquad 16x^2 = 4$$

$$x^2 = \frac{1}{4} \rightarrow x = \frac{1}{2}, \; x = -\frac{1}{2}$$

9

20/09/2018

Resolver

$$\frac{x-2}{\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{2x}}{3}\left(\frac{5x^2-20}{x}\right)$$

$$\frac{\frac{x-2}{\sqrt{x}}}{\frac{5x^2-20}{x}} = \frac{\sqrt{2x}}{3}$$

$$\frac{x(x-2)}{\sqrt{x}\,[5\cdot(x^2-4)]} = \frac{\sqrt{2x}}{3}$$

$$\frac{\sqrt{\cancel{x}}\,\cancel{(x-2)}}{\sqrt{x}\,[5\cdot(x+2)\cancel{(x-2)}]}$$

$$\frac{\sqrt{x}}{5\cdot(x+2)} = \frac{\sqrt{2x}}{3}$$

$$\frac{3\cancel{\sqrt{x}}}{5(x+2)\cdot\sqrt{2}\cdot\cancel{\sqrt{x}}} = 1$$

$$\frac{3}{5\sqrt{2}} = x+2 \rightarrow \frac{3}{5\sqrt{2}} - 2 = x$$

$$x = \frac{3-10\sqrt{2}}{5\sqrt{2}}$$

$$\frac{x}{x+3} = \frac{3x-4}{x^2-9} + \frac{x}{x-3}$$

$$\frac{x}{x+3} = \frac{3x-4}{(x+3)(x-3)} + \frac{x}{x-3}$$

x^2+3x $$\frac{x(x-3)}{(x+3)(x-3)} = \frac{3x-4}{(x+3)(x-3)} + \frac{x(x+3)}{(x-3)(x+3)}$$

x^2-3x $$\frac{x(x-3)-x(x+3)}{(x+3)(x-3)} = \frac{3x-4}{(x+3)(x-3)}$$

$$\frac{\cancel{x^2}-3x-\cancel{x^2}-3x}{(x+3)(x-3)} = \frac{3x-4}{(x+3)(x-3)}$$

$$\frac{-6x\cdot\cancel{(x^2-9)}}{\cancel{(x^2-9)}(3x-4)} = 1$$

$$-\frac{6x}{3x-4} = 1$$

$$-6x = 3x-4$$

$$4 = 9x \rightarrow \frac{4}{9} = x$$

Scribe

Resolver

$$\frac{\frac{x+3}{x}}{x-\frac{9}{x}} = \frac{\frac{x^2}{9}}{x-3}$$

$$\frac{\frac{x+3}{x}}{\frac{x^2-9}{x}} = \frac{\frac{x^2}{9}}{x-3} \rightarrow \frac{(x+3)\cancel{x}}{(x^2-9)\cancel{x}} = \frac{\frac{x^2}{9}}{x-3}$$

$$\frac{\cancel{x+3}}{\cancel{(x+3)}\cancel{(x-3)}} = \frac{\frac{x^2}{9}}{\cancel{x-3}}$$

$$1 = \frac{x^2}{9}$$

$$9 = x^2 \rightarrow x=3, \quad x=-3$$

21/09/2018

Repaso

La racionalización o eliminación de radicales

$$(\sqrt{a})^2 = a = \sqrt{a^2}$$

$$a^2-b^2 = (a+b)(a-b)$$

Ejemplo:

$$\frac{2}{\sqrt{2}} = \frac{2\cdot\sqrt{2}}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

Ejercicios:

$$\frac{-1}{6+3\sqrt{5}} = \frac{-1(6-3\sqrt{5})}{36-9\cdot 5} = \frac{-1(6-3\sqrt{5})}{\cancel{-}9} = \frac{3(2-\sqrt{5})}{9}$$

$$\frac{2-\sqrt{5}}{3}$$

Ejercicio:

$$\frac{x}{\sqrt{x+5}-\sqrt{5}} = \frac{\cancel{x}(\sqrt{x+5}+\sqrt{5})}{\cancel{x+5-5}} = \sqrt{x+5}+\sqrt{5}$$

Resolver $\dfrac{\sqrt{x-\sqrt{2}}-\sqrt{\sqrt{2}}}{x}$

$$\frac{x-\sqrt{2}-\sqrt{2}}{x\left(\sqrt{x-\sqrt{2}}+\sqrt{\sqrt{2}}\right)} = \frac{x-2\sqrt{2}}{x\,(\text{eso})}$$

25/09/2018

Repaso del Valor Absoluto

$$|a| = \begin{cases} a & \text{si } a \geq 0 \\ -a & \text{si } a < 0 \end{cases}$$

$|a| < k \leftrightarrow -k < a < k$

$|a| \leq k \leftrightarrow -k \leq a \leq k$

$|a| > k \leftrightarrow a > k$ o bien $a < -k$

$|a| \geq k \leftrightarrow a \geq k$ o bien $a \leq -k$

$|a| = |b| \leftrightarrow a = b \quad a = -b$

Ejercicio

$$\left|\frac{x+2}{x-5}\right|$$

Solución

$\dfrac{x+2}{x-5} = 5$ $\qquad$ $\dfrac{x+2}{x-5} = -5$

$x+2 = 5x-25$ $\qquad$ $x+2 = -5x+25$

$27 = 4x$ $\qquad$ $6x = 23$

$\dfrac{27}{4} = x$ $\qquad$ $x = \dfrac{23}{6}$

$x \in \left\{\dfrac{27}{4}, \dfrac{23}{6}\right\}$

$$|5x-3| = |3x+5|$$

$$\frac{|5x-3|}{|3x+5|} = 1 \rightarrow \left|\frac{5x-3}{3x+5}\right| = 1$$

$$\frac{5x-3}{3x+5}=1 \qquad \frac{5x-3}{3x+5}=-1$$

$5x-3=3x+5$

$2x=8$

$x=4$

$5x-3=-3x-5$

$8x=-2$

$x=-\frac{1}{4}$

$$|5-2x|<3$$

$$-3<5-2x<3$$

$-3<5-2x$

$\frac{-8}{-2}>x$

$4>x$

$5-2x<3$

$-2x<-2$

$x>1$

$$4>x>1$$

$$\left|2-\frac{3}{2}x\right|\leq 5$$

$$-5\leq 2-\frac{3}{2}x\leq 5$$

$-5\leq 2-\frac{3x}{2}$

$\frac{-7\cdot 2}{-3}\geq x$

$\frac{14}{3}\geq x$

$2-\frac{3x}{2}\leq 5$

$\frac{-3x}{2}\leq 3$

$-3x\leq 6$

$x\geq -2$

$$\frac{14}{3}\geq x\geq -2$$

Scribe

$$|x+4| \leq |2x-6|$$

$$-(2x-6) \leq x+4 \leq 2x-6$$

$-2x+6 \leq x+4$

$-2 \leq 3x$

$\frac{2}{3} \leq x$

$x+4 \leq 2x-6$

$10 \leq x$

$$x \geq \frac{2}{3} \quad y \quad x \geq 10$$

$$\therefore \quad x \in [10, +\infty)$$

Nota $\quad a < b < c \quad \geq \quad c > b > a$

$$a<b<c \quad = \quad a<b \cap b<c$$

Repase Regla de Signos

$$ab > 0 \longleftrightarrow \{a>0 \cap b>0\} \cup \{a<0 \cap b<0\}$$
$$ab < 0 \longleftrightarrow \{a>0 \cap b<0\} \cup \{a<0 \cap b>0\}$$

Ejercicio $\quad \sqrt{x^2-16}$

$x^2 - 16 \geq 0$

$(x+4)(x-4) \geq 0$

$(x+4)(x-4) \geq 0 \longleftrightarrow \{x+4 \geq 0 \cap x-4 \geq 0\} \cup \{x+4 \leq 0 \cap x-4 \leq 0\}$

$x \geq -4 \quad x \geq 4 \quad x \leq -4 \quad x \leq 4$

$[4, +\infty) \cup (-\infty, -4]$

$\sqrt{4-x^2}$

$$4-x^2 \geq 0$$
$$(2+x)(2-x) \geq 0$$

$(2+x)(2-x) \geq 0$

$\{2+x \geq 0 \cap 2-x \geq 0\} \cup \{2+x \leq 0 \cap 2-x \leq 0\}$

$x \geq -2 \qquad 2 \geq x \qquad\qquad x \leq -2 \qquad 2 \leq x$

$[-2,2] \qquad \cup \qquad \emptyset$

$[-2,2]$

SEGUNDO PARCIAL 26/09/2018

Exponentes y Logaritmos

$a^m a^n = a^{m+n}$

$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$

$a^m b^m = (ab)^m$

$a^{mn} = (a^m)^n$

$\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$

Lo fundamental de sus propiedades son:

$1^m = 1$

$0^m = 0 \qquad m > 0$

$a^0 = 1 \qquad a \neq 0$

Simplificar $(a^2b^3 - ab)(a^2b^3 + ab)$

$(a^2b^3)^2 - (ab)^2$

$a^4b^6 - a^2b^2$

$(\sqrt{x}\, y^2 + 2\sqrt{y})(\sqrt{x}\, y^2 - 2\sqrt{y})$

$(\sqrt{x}\, y^2)^2 - (2\sqrt{y})^2$

$xy^4 - 4y$

"Todo es competir y sólo se premia al ganador"

Desarrolla $\left(xy + \frac{1}{xy}\right)^2$

$$x^2y^2 + 2 + \frac{1}{x^2y^2}$$

$$\left(e^{\operatorname{sen}\theta} - \frac{1}{e^{\operatorname{sen}\theta}}\right)^2$$

$$e^{2\operatorname{sen}\theta} - 2 + \frac{1}{e^{2\operatorname{sen}\theta}}$$

En la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$
donde $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

¿cómo se define x en: $2x + 5\sqrt{x} + 7 = 0$?

$$x = \sqrt{x}$$

$$\downarrow$$

$$2x^2 + 5x + 7 = 0$$

OMAIGA

Otra igual:

$$\frac{8}{x^2} - \frac{3}{x} + 2 = 0$$

$$x = \frac{1}{x}$$

$$\downarrow$$

Jugando simbolicamente $8x^2 - 3x + 2$

OMAIGA X2

Boss Battle

$$3\cos^2 x + 5\sqrt{1-\operatorname{sen}^2 x} + 2 = 0$$

$$x = \cos x$$

$$3\cos^2 x + 5 \cdot \cos x + 2 = 0$$

OMAIGA

02/10/2018

Ejercicio

$$-\sqrt{64} = -(8^2)^{1/2} = -8$$

$$\sqrt[3]{64} = (4^3)^{1/3} = 4$$

$$\sqrt{\frac{3}{4}\left(\frac{144}{3}\right)}$$

1c

$$\sqrt{\frac{144}{4}} = \frac{12}{2} = 6$$

$$\sqrt[3]{81x^4y^6}$$

40

$$\sqrt[3]{3 \cdot 27 \cdot x \cdot x^3 \cdot y^6}$$

120 / 3

$$3xy^2\sqrt[3]{3x}$$

Factorizar

$$40\sqrt[3]{x^2} + \frac{8}{3}\sqrt[3]{x^5}$$

$$40\sqrt[3]{x^2} + 8 \cdot \frac{1}{3} \cdot x\sqrt[3]{x^2}$$

$$\underline{8} \cdot 5\,\underline{\sqrt[3]{x^2}} + \underline{8} \cdot \frac{1}{3} \cdot x\,\underline{\sqrt[3]{x^2}}$$

$$8\sqrt[3]{x^2}\left(5 + \frac{x}{3}\right)$$

$x + \sqrt{x} + 1 \qquad x^2 + x + 1$

$\sqrt{x}$

Introducir cantidades a un radical

$$a\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^n b}$$

$$\frac{\sqrt[n]{b}}{a} = \sqrt[n]{\frac{b}{a^n}}$$

Ejercicio

$$(a-b)\sqrt{\frac{a+b}{a-b}}$$

$$\sqrt{(a-b)^{\cancel{2}}\frac{a+b}{\cancel{a-b}}} = \sqrt{a^2-b^2}$$

Simplificar

$$\sqrt{x^3-y^3}\sqrt{\frac{x+y}{x^2+xy+y^2}} = \sqrt{(x-y)\cancel{(x^2+xy+y^2)}}\sqrt{\frac{x+y}{\cancel{x^2+xy+y^2}}}$$

$(x-y)(x^2+xy+y^2)$

$$\sqrt{x^2-y^2}$$

03 / 10 / 2018

Logaritmos y la Resolucion de las Ecuaciones Logaritmicas

Introducción

Reglas de los Exponentes

$$x^a \cdot x^b = x^{a+b}$$

$$\frac{x^a}{x^b} = x^{a-b}$$

$$(x^a)^b = x^{ab}$$

Van a permitir definir a los logaritmos de un número positivo diferente de 1

Com conjunto, si $y = f(x)$ tiene función inversa f^{-1}

$\therefore \quad x = f^{-1}(y) = y = f(x)$

Ejemplo:

$$y = \sqrt[3]{x}$$

$$y^3 = x$$

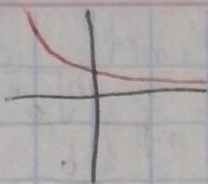
$$x = y^3$$

Se define el número o función exponencial:

$y = f(x) = b^x$ con $b > 0$ y $b \neq 1$ es un número real

Observación

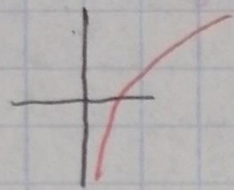
$$y = f(x) = b^{-x} = (b^{-1})^{x} = \left(\frac{1}{b}\right)^{x}$$



Definicion de Logaritmo Base b

$b^{y} = x \rightarrow \quad y = \log_b x$

$f(x) = \log_b x$



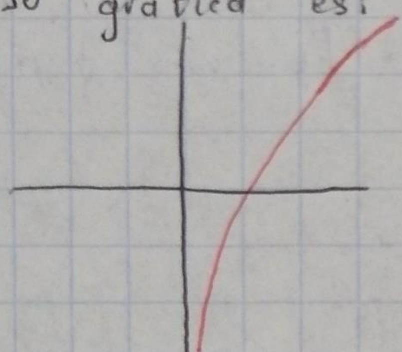
4/10/2018

Tenemos

$b^{y} = x$ significa $y = \log_b x$

Como conjunto $y = f(x) = \log_b x$

Su gráfica es:



Es su forma "primitiva"

Tipos de Logaritmos

- Si la base es 10 $y = \log_{10} x$ se denota $y = \log x$. Se denomina logaritmo común o vulgar

Observación:

$100 = 10^{2}$ $\quad$ $0.001 = 1 \times 10^{-3}$

$\log 100 = 2$ $\quad$ $\log 0.001 = -3$

Notacion científica →

- Si la base $b = e$ donde e es el número de Euler $e = 2.7182818$, $y = \log_e x$ se denota $y = \ln x$

Se denomina logaritmo natural

$\ln 1 = 0 \rightarrow e^{0} = 1$

$\ln e = 1 \quad\quad e^{1} = e$

$\log_b 1 = 0$ $b^0 = 1$

Otro conjunto es el exponencial natural $y = f(x) = e^x$

e^x y $\ln x$ son inversas

Los logaritmos se usan para simplificar expresiones

Observación

$$b^{A+B} = b^A b^B \rightarrow \log_b AB = \log_b A + \log_b B$$

$$b^{A-B} = \frac{b^A}{b^B} \rightarrow \log_b \frac{A}{B} = \log_b A - \log_b B$$

$$(b^A)^B = b^{AB} \rightarrow \log_b A^B = B \log_b A$$

$$\log_b 1 = 0$$

$$\log_b b = 1$$

Simplificar

$$\log_2 \left(\frac{x-3}{x+3}\right)^5$$

$$5 [\log_2 (x-3) - \log_2 (x+3)]$$

$$\ln \sqrt[3]{\frac{x-1}{x(x+2)}}$$

$$\ln \sqrt[3]{x-1} - \ln \sqrt[3]{x(x+2)}$$

Otro metodo

$$\ln \left(\frac{x-1}{x(x+2)}\right)^{1/3}$$

$$\frac{1}{3} \ln (x-1) - \frac{1}{3} \ln (x^2+2x)$$

Unidad 1: Propiedades de los Números Reales

Aprendizajes Esperados:

- Conjuntos
  - Diagramas de Venn-Euler
  - Relación de Inclusión
  - Conjunto vacío y Conjunto universo
  - Pertenencia, contención, unión, intersección, complemento y diferencia de conjuntos

- Propiedades y Operaciones con Números Reales
  - Definición de los números reales como un campo ordenado
  - Subconjunto de los números reales
  - Definición de resta y definición de división
  - Propiedades aritméticas de los números reales
  - Propiedades de orden de los números reales
  - Operaciones algebraicas básicas: suma, resta, multiplicación, división, potenciación y radicación
  - Potencia y radicación de expresiones algebraicas
  - Productos notables y factorización
  - Completar trinomios cuadrados perfectos
  - Fracciones algebraicas
  - Resolución de ecuaciones de primer grado y reducibles a primer grado
  - Métodos de solución de ecuaciones de segundo grado (Factorización, completar el cuadrado y fórmula general) y reducibles a segundo grado

- Desigualdades
  - Conjuntos e intervalos
    a) Definición y símbolos de desigualdad

b) Representación de desigualdades en la recta real
c) Definición de intervalo y tipos de intervalos
d) Propiedades de las desigualdades
- Desigualdades lineales
  a) Definición de desigualdad lineal de una variable
  b) Resolución de desigualdades lineales de una variable
  c) Desigualdades con fracciones algebraicas
- Desigualdad cuadrática de una variable
  a) Definición de desigualdad cuadrática de una variable
  b) Resolución de desigualdades cuadráticas de una variable
  c) Desigualdades con fracciones algebraicas
- Valor Absoluto
  a) Definición y principales propiedades del valor absoluto
  b) Solución de ecuaciones con valor absoluto
  c) Solución de desigualdades con valor absoluto

- Solución de ecuaciones mediante el empleo de las propiedades de las funciones exponenciales y logaritmo natural

- Notación Sigma y Tópicos Relacionados
  - Notación, definición de Σ y propiedades de Σ
  - Aplicación de las propiedades de Σ (sumas especiales)
  - Teorema del Binomio
  - Factorial
  - Coeficiente Binomial y sus Propiedades

Propiedades de Simplificación de los Logaritmos

$$\left\{\begin{array}{l} \log_b AB = \log_b A + \log_b B \\ \log_b \frac{A}{B} = \log_b A - \log_b B \\ \log_b A^P = P \log_b A \end{array}\right.$$

Simplificar

$$\log_4 \left(\frac{x+2}{x-2}\right)^4$$

$$\log_4 \frac{(x+2)^4}{(x-2)^4}$$

$$\log_4 (x+2)^4 - \log_4 (x-2)^4$$

$$4 \log_4 (x+2) - 4 \log_4 (x-2)$$

$$\ln \left(\frac{x+2}{x-2}\right)^4$$

$$4 \left[\ln \left(\frac{x+2}{x-2}\right)\right]$$

$$4 [\ln (x+2) - \ln (x-2)]$$

$$4 \ln (x+2) - 4 \ln (x-2)$$

$$\log_2 \sqrt{(5+3x)^3}$$

$$\frac{3}{2} \cdot \log_2 (5+3x)$$

$$\ln \sqrt{(5+3x)^3}$$

$$\frac{3}{2} \ln (5+3x)$$

$$\log_5 \sqrt[3]{\frac{x+1}{x(x-2)^2}}$$

$$\log_5 \left(\frac{x+1}{x(x-2)^2}\right)^{1/3}$$

$$\frac{1}{3} \log_5 (x+1) - \frac{1}{3} \log_5 [x(x-2)^2]$$

$\frac{1}{3}\log_5(x+1)-\frac{1}{3}\log_5[x(x-2)^2]$

$\frac{1}{3}\log_5(x+1)-\frac{1}{3}[\log_5 x+2\log(x-2)]$

$\frac{1}{3}\log_5(x+1)-\frac{1}{3}\log_5 x-\frac{2}{3}\log(x-2)$

$\ln\sqrt[3]{\frac{x+1}{x(x-2)^2}}$

$\frac{1}{3}\ln(x+1)-\frac{1}{3}\ln x-\frac{2}{3}\ln(x-2)$

Resolución de Ecuaciones Logarítmicas

Introducción:

Si $y=f(x)$ tiene por función inversa $y=f^{-1}(x)$

se cumple que

$(f\circ f^{-1})(x)=f(f^{-1}(x))=x$

Toda función se anula con su inversa OMG WoW

Como conjunto $y=f(x)$

e^x y $\ln x$

son funciones inversas entre sí

Esto significa:

- $e^{\ln x}=x$
- $\ln e^x=x$

Wow ·-·

ono

Resolver $e^{x^2-4}=1$

$\ln e^{x^2-4}=\ln 1$

$x^2-4=0$

$(x+2)(x-2)=0$

$x=-2,\ x=2$

09/10/2018

Consecuencias de las Propiedades de las funciones inversas (Reglas de Simplificación)

$e^{\ln A} = A$

$\ln e^{A} = A$

Recordar:

$\ln 1 = 0$ $\quad e^1 = e$

$\ln e = 1$ $\quad e^{\ln 1} = 1$

* No existen:

$\ln 0$

$\ln a$ si a es negativo

Resolver

$\ln 2x = \ln 5$

$e^{\ln 2x} = e^{\ln 5}$

$2x = 5 \rightarrow x = \frac{5}{2}$

$3 \ln x = \ln 8$

$\ln x^3 = \ln 8$

$e^{\ln x^3} = e^{\ln 8} \rightarrow$ $x^3 = 8 \therefore x = 2$

9^2

$(3^2)^2$

$2 \log x = \log 4$

$\log x^2 = \log 4$

$10^{\log x^2} = 10^{\log 4} = x^2 = 4 \therefore x = 2$

Se rechaza $x = -2$

$2^{\log_2 x + \log_2 2} = 3$

$2^{\log_2 x + 1} = 3$

$2^{\log_2 x} \cdot 2^{\log_2 2} = 3$

$2^{\log_2 x} \cdot 2^1 = 3$

$2^{\log_2 x} = \frac{3}{2} \rightarrow x = \frac{3}{2}$

$25^{x+2} = 5^{3x-4}$

$(5^2)^{x+2} = 5^{3x-4}$

$5^{2x+4} = 5^{3x-4} \rightarrow \log_5 5^{2x+4} = \log_5 5^{3x-4} = 2x+4 = 3x-4$

$x = 8$

Resolver

$5 + 3(4^{x-1}) = 12$

$3(4^{x-1}) = 7$

$4^{x-1} = \frac{7}{3}$

$\log_4 4^{x-1} = \log_4 \frac{7}{3} \rightarrow x-1 = \log_4\left(\frac{7}{3}\right)$

$x-1 = \log_4 7 - \log_4 3$

$x = \log_4 7 - \log_4 3 + 1 \leftarrow$ Sin calculadora así está bien

$x = 1.611$

Otra forma

$\ln 4^{x-1} = \ln \frac{7}{3}$

$(x-1)\ln 4 = \ln \frac{7}{3}$

$x-1 = \frac{\ln \frac{7}{3}}{\ln 4} \rightarrow x = \frac{\ln \frac{7}{3}}{\ln 4} + 1$

10/10/2018

Los Bellos Numeros Complejos

Definicion del conjunto de los números complejos:

El conjunto C de los números Z que son de la forma $a + bi$ donde $a, b \in R$ y $i = \sqrt{-1}$

Se denomina conjunto de numeros complejos

Esto es:

$Z \in C = \{Z = a + bi : a, b \in R, \sqrt{-1} = i\}$

Para $Z \in C$ se definen los conceptos:

$i = \sqrt{-1}$ es la unidad imaginaria

$z = i = 0 + 1i$

Dado $Z = a + bi$ su conjugado se denota $\overline{Z} = a - bi$

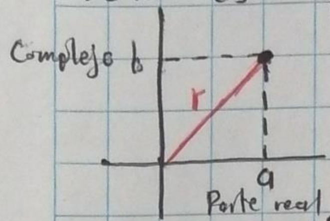
El número complejo 0 es:

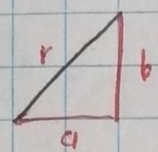
$0 = 0 + 0i$

El módulo de $Z = a + bi \in \mathbb{C}$ se define como

$$r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Esto es por el plano de Argand o plano complejo





Por ello: $r = \sqrt{a^2 + b^2}$

En cálculo se le llaman coordenadas polares y en álgebra hablaremos de la formas polares

Por ejemplo:

$Z = 2 + \sqrt{3}\, i$ tiene por módulo

$$r = |Z| = \sqrt{(2)^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{4+3} = \sqrt{7}$$

$Z = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} i$ tiene por módulo

$$r = |Z| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{9+4}{36}} = \frac{\sqrt{13}}{6}$$

$Z = \cos\frac{\pi}{2} + i \operatorname{sen}\frac{\pi}{2}$ tiene por módulo

$$r = |Z| = \sqrt{\left(\cos\tfrac{\pi}{2}\right)^2 + \left(\operatorname{sen}\tfrac{\pi}{2}\right)^2} = \sqrt{1} = 1$$

Para el conjunto $\mathbb{C}$ de números complejos, su campo se establece de las operaciones

Desarrollo Simplificar Terminos Semejantes

$Z_1 + Z_2$ Observación $\rightarrow$ $Z_1 - Z_2 = Z_1 + (-Z_2)$

$Z_1 \cdot Z_2$ $\leftarrow$ No olvidar $i^2 = (\sqrt{-1})^2 = -1$

$\frac{Z_1}{Z_2}$ $\leftarrow$ No olvidar $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

$\downarrow$

Esto es: $\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{Z_1 \cdot \overline{Z_2}}{Z_1 \cdot \overline{Z_2}}$

$$Z^p = \underbrace{(Z)(Z)\cdots(Z)}_{p}$$

$Z_1 + Z_2 = (4 + 3i) + (3 + 4i)$
$(4+3) + (3i + 4i)$
$7 + 7i$

$Z_1 + Z_2 = (2 + 5i) + (3 - 5i)$
$(2+3) + (5i - 5i) = 5 + 0i$

$Z_1 Z_2 = (2+3i)(4+7i)$

$8 + 14i + 12i + 21i^2$

$8 + 26i - 21$

$-13 + 26i$

$(3+5i)(3-5i)$

$9 - 25i^2$

$9 + 25$

34

Esto fue $(Z_1)(\overline{Z_1})$

Obtener: $Z^2 = (2-3i)^2 = 4 - 12i + 9i^2$

$4 - 12i - 9$

$-5 - 12i$

11/10/2018

Ejercicio

Sea $Z = \sqrt{2} + \sqrt{2}i$

Obtenga Z^2

$Z^2 = (\sqrt{2} + \sqrt{2}\,i)^2$

$2 + 2\sqrt{2}\sqrt{2}\,i + 2(-1)$

$2 + 4i + 2(-1)$

$2 + 4i - 2$

$0 + 4i$

Si $Z_1 = 1 + i$

$Z_2 = 2 + 2i$

Obtenga $\frac{Z_1}{Z_2}$

Sabemos $\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{Z_1\ \overline{Z_2}}{Z_2\ \overline{Z_2}} = \frac{(1+i)(2-2i)}{(2+2i)(2-2i)} = \frac{2 - \cancel{2i} + \cancel{2i} - 2i^2}{4 - 4i^2}$

$\frac{2 - (-2(-1))}{4 - 4i^2} = \frac{4}{4 - (4(-1))} = \frac{4}{8} =$

$\frac{1}{2} + 0i$

Sea $Z_1 = \cancel{1+1} \quad 1+i$

$Z_2 = 1-i$

Obtenga $\dfrac{Z_1}{Z_2}$

Sabemos $\dfrac{Z_1\,\overline{Z_2}}{Z_2\,\overline{Z_2}} = \dfrac{(1+i)(1+i)}{(1-i)(1+i)} = \dfrac{1+2i+i^2}{1-i^2}$

$\dfrac{\cancel{1}+2i+\cancel{(-1)}}{1-(-1)} = \dfrac{2i}{2} = 0+\dfrac{2i}{2}$

$0+i$

Forma Polar y Forma Exponencial de los Numeros Complejos

Las operaciones importantes a desarrollar en el campo de los números complejos $\mathbb{C}$ son

Z^n y $\sqrt[n]{Z}$

Es decir si $Z = a+bi$, queremos calcular

$Z^n = (a+bi)^n$ → él n-ésimo exponente de Z

y $\sqrt[n]{Z} = \sqrt[n]{a+bi}$ → las n raíces de Z

Es más simple una representación trigonométrica y una representación exponencial de Z para esas operaciones

La forma polar de Z

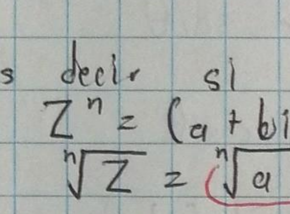
$Z = a+bi$

se estudia en el plano de Ergand o plano complejo

denotando $Z = a+bi = (a,b)$

a = Parte real de $Z = \mathrm{Re}(Z)$

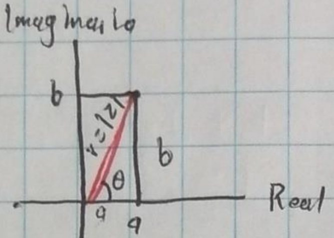
b = Parte imaginario de $Z = \mathrm{Im}(Z)$



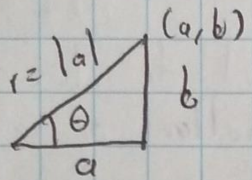
$Z = a+bi \qquad Z = (a,b)$

12/10/2018

Tenemos $z = a + bi$ que se representa en el plano complejo como $Z = (a, b)$



La representación de $Z = a + bi$ como $Z = (a, b)$ define el triángulo



donde

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{b}{r} \qquad \cos\theta = \frac{a}{r} \qquad \tan\theta = \frac{b}{a}$$

de donde

$$b = r \operatorname{sen}\theta \qquad a = r\cos\theta \qquad \theta = \tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right)$$

θ es el argumento de Z y es un ángulo medido positivo (se mide en sentido antihorario) en π radianes donde $\pi = 180°$ Ejemplos: $60 = \frac{\pi}{3}$, $45 = \frac{\pi}{4}$

$360 = 2\pi$ $\quad 30° = \frac{\pi}{6}$

Entonces $Z = a + bi$ se puede representar $Z = r\cos\theta + r\operatorname{sen}\theta\, i$

esto es: $r(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta)$

forma Polar de Z

Donde

$Re(Z) = a = r\cos\theta$

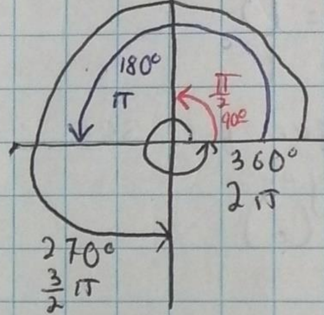
$Im(Z) = b = r\operatorname{sen}\theta$

donde el argumento $\theta = \tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right)$ medido positivo y en radianes

Al término $\cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta$ se le denomina exponencial compleja

- Entonces $Z = a + bi = (a, b) = r(\cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta)$
- también se representa $Z = re^{i\theta}$ ← forma exponencial del número complejo

Observación Plano Complejo

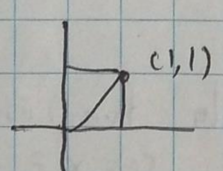


El eje real está a $\theta = 0° = 0\pi$

Al número complejo $Z = 1 + i$
representar en a) el plano complejo
b) En forma polar
c) En forma exponencial y con esta forma obtener Z^{720}

a) Solución

$$Z = 1 + i$$
$$Z = 1 + 1i \rightarrow (1, 1)$$



$$r = \sqrt{a^2 + b^2}$$
$$r = \sqrt{1 + 1} = \sqrt{2}$$
$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{1}{1}\right) = 45° = \frac{\pi}{4}$$

b) Forma polar $Z = r(\cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta)$

$$Z = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\,\text{sen}\,\frac{\pi}{4}\right)$$

c) Forma exponencial $Z = re^{i\theta}$

$$Z = \sqrt{2}\,e^{i\frac{\pi}{4}}$$

luego $Z^{720} = \left[\sqrt{2}\,e^{i\frac{\pi}{4}}\right]^{720}$

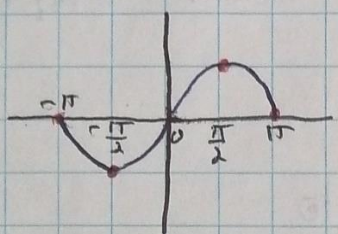
$$2^{360} \cdot e^{180 i \pi}$$

19/10/2018

Exponentes y las n Raíces de un Número Complejo

Introducción

La función $y = f(x) = \operatorname{sen} x$ con x medido en radianes tiene por gráfico



Nótese

$\operatorname{sen}(0) = 0$

$\operatorname{sen} \pi = \operatorname{sen} 180° = 0$

$\operatorname{sen} \frac{\pi}{2} = \operatorname{sen} 90° = 1$

La función es impar por ser simétrica al origen

$\operatorname{sen}(-a) = -\operatorname{sen}(a)$

En general la imagen de $f(x) = \operatorname{sen} x$

siempre $|\operatorname{sen}(a)| \leq 1$

esto es $-1 \leq \operatorname{sen}(a) \leq 1$

Una función con ~~peri~~ periodo P tiene como propiedad

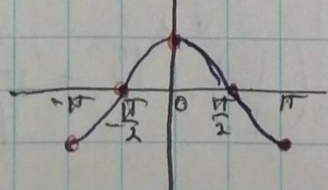
$f(x) = f(x + P)$

En general es $f(x) = f(x + kP)$ con k siendo entero

Entonces $y = f(x) = \operatorname{sen} x = \operatorname{sen}(x + 2\pi)$

en forma más general $f(x) = \operatorname{sen} x = \operatorname{sen}(x + 2\pi k)$

La función $\cos x$



Aquí la función es par

$\cos x = \cos(-x)$

La imagen de $\cos x$ es igual;

$-1 \leq \cos x \leq 1$

Observación:

- $Z = r(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)$ es igual $Z = r(\cos(\theta + 2\pi k) + i \operatorname{sen}(\theta + 2\pi k))$

16/10/2018

Tenemos las identidades

$\operatorname{sen}(-\alpha) = -\operatorname{sen}(\alpha)$ $\qquad$ $\operatorname{sen}(\alpha) = \operatorname{sen}(\alpha + 2k\pi)$

$\cos(-\alpha) = \cos(\alpha)$ $\qquad$ $\cos(\alpha) = \cos(\alpha + 2k\pi)$

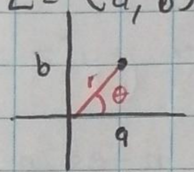
donde $2k\pi$ es periodo

0
30
45
60
90
180
270
360

Para los números complejos esas identidades dan representación y definen operación

- $Z \in \mathbb{C}$ se representa $Z = a + bi$ Forma algebra

$Z = (a, b)$ que es un punto del plano imaginario



$r = |Z| = \sqrt{a^2 + b^2}$

$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right)$

donde θ es un ángulo positivo medido en radianes $\pi = 180$

Forma Polar

- $Z = r(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)$

donde se puede escribir

- $Z = r(\cos(\theta + 2k\pi) + i \operatorname{sen}(\theta + 2k\pi))$

esto define las operaciones

- $Z^n = r^n(\cos(n\theta) + i \operatorname{sen}(n\theta))$ ← Formula de De Moivre

Si $Z_1 = r_1 \cos\theta_1 + i \operatorname{sen}\theta_1$
$Z_2 = r_2 \cos\theta_2 + i \operatorname{sen}\theta_2$

$$\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{r_1}{r_2}(\cos(\theta_1 - \theta_2) + i \operatorname{sen}(\theta_1 - \theta_2))$$

La Raiz n-ésima de Z

$$\sqrt[n]{Z} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\left(\frac{\theta + 2\pi k}{n}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{\theta + 2\pi k}{n}\right)\right)$$

donde las raices son: para

$k = 0$ Primer raíz
$k = 1$ Segunda raíz
$k = 2$ Tercera raíz
$\vdots$
$k = n-1$ Raiz n-ésima

Forma Exponencial de Z

$Z = re^{i\theta}$ o bien $Z = re^{i(\theta + 2k\pi)}$

define las operaciones

- $Z^n = r^n e^{in\theta}$

Si $Z_1 = r_1 e^{i\theta_1}$

$Z_2 = r_2 e^{i\theta_2}$

entonces $\dfrac{Z_1}{Z_2} = \dfrac{r_1}{r_2} e^{i(\theta_1 - \theta_2)}$

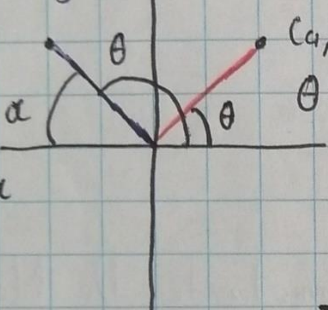
$k = 0$ Primer raíz

$\vdots$

$k = n-1$ Raíz n-ésima

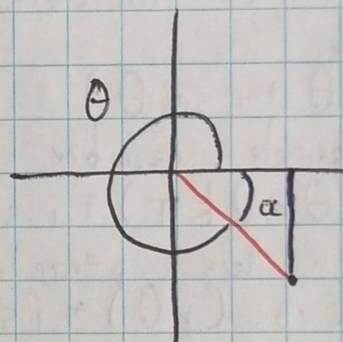
– $\sqrt[n]{Z} = \sqrt[n]{r}\, e^{i\left(\frac{\theta + 2\pi k}{n}\right)}$

El Argumento θ de Z

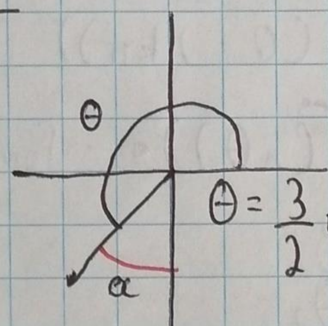


$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right)$

$\theta = \pi - \alpha$



$\theta = 2\pi - \alpha$



$\theta = \frac{3}{2}\pi - \alpha$

En todos los casos $\alpha = \tan^{-1}\left(\dfrac{\text{Im}(Z)}{\text{Re}(Z)}\right)$

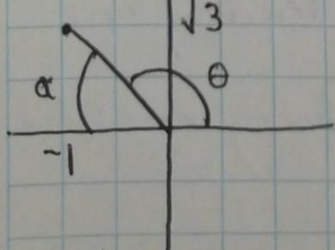
Fuera del primer cuadrante

α siempre es negativo

Ejercicio Para el número complejo dado representar en forma polar y exponencial complejo

$Z = -1 + \sqrt{3}\, i$

Solución $Z = (-1, \sqrt{3})$



$\theta = \pi - \alpha$

$\alpha = \tan^{-1}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{-1}\right)$

$\alpha = 60° = \dfrac{\pi}{3}$

$\theta = \pi - \alpha$ $\theta = 180 - 60 = 120°$

$\theta = \dfrac{3\pi - \pi}{3} = \dfrac{2\pi}{3}$ Son iguales

$Z = r\,(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)$

$r = \sqrt{(-1)^2 + (\sqrt{3})^2}$

$r = \sqrt{1+3}$

$r = \sqrt{4}$

$r = 2$

$Z = 2\left(\cos \dfrac{2\pi}{3} + i \operatorname{sen} \dfrac{2\pi}{3}\right)$ ← Forma Polar

$Z = r e^{i\theta}$

$Z = 2 e^{i\frac{2\pi}{3}}$ ← Forma Exponencial

17/10/2018

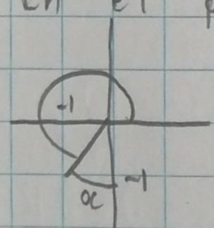
Ejercicio para el número complejo dado:

a) Llevarlo a forma polar

b) Llevarlo a forma exponencial

$Z = -1 - i$

En el plano complejo



$r = |Z| = \sqrt{a^2 + b^2}$

$r = |Z| = \sqrt{2}$

$\alpha = \tan^{-1}\left(\dfrac{b}{a}\right) = \tan^{-1}\left(\dfrac{-1}{-1}\right) = \tan^{-1}(1) = 45° = \dfrac{\pi}{4}$

$\theta = \dfrac{3}{2}\pi - \alpha = \dfrac{3}{2}\pi - \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{5\pi}{4}$ ó $225°$

$Z = r\left(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta\right) \therefore Z = \sqrt{2}\left(\cos\left(\dfrac{5\pi}{4}\right) + i \operatorname{sen}\left(\dfrac{5\pi}{4}\right)\right)$

Forma Polar

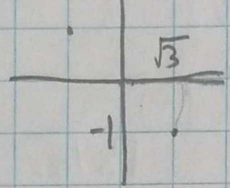
$Z = r e^{i\theta} \therefore Z = \sqrt{2}\, e^{i\left(\frac{5\pi}{4}\right)}$

forma exponencial

Ejercicio [redacted]

$Z = \sqrt{3} - i$

$\sqrt{3}, -1$



$|Z| = \sqrt{\sqrt{3}^2 + (-1)^2} = 2$

$\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{-1}{\sqrt{3}}\right) = 30° = \frac{\pi}{6}$

$\theta = 2\pi - \frac{\pi}{6} = \frac{11\pi}{6}$

Polar $Z = 2\left[\cos\left(\frac{11\pi}{6}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{11\pi}{6}\right)\right]$

Exponencial $Z = 2e^{i\left(\frac{11\pi}{6}\right)}$

Ejercicio Sea $Z_1 = -1 + 0i$

y $Z_2 = 0 - i$

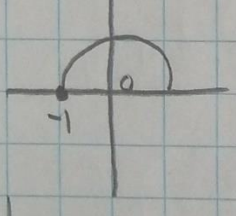
Aplicando Forma Polar y exponencial obtener

$(Z_1)^{-4}$

$\frac{Z_2}{Z_1}$

Para $Z_1 = -1 + 0i$

$(-1, 0)$

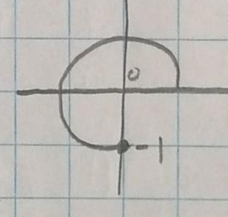


$r_1 = \sqrt{(-1)^2 + (0)^2} = 1$

$\theta = 180° = \pi$

Para $Z_2 = 0 - i$

$(0, -1)$



$r_2 = \sqrt{0^2 + (-1)^2} = 1$

$\theta = 270° = \frac{3\pi}{2}$

Luego

$Z_1 = 1\left[\cos(\pi) + i \operatorname{sen}(\pi)\right]$

$Z_1 = 1 \cdot e^{i\pi}$

$Z_2 = 1\left[\cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{2}\right)\right]$

$Z_2 = 1 \cdot e^{i\left(\frac{3\pi}{2}\right)}$

Entonces en la forma polar

$(Z_1)^{-4} = 1(\cos\pi + i \operatorname{sen}\pi)^{-4}$

Por la fórmula de De Moivre

$Z^n = r^n(\cos n\theta + i \operatorname{sen} n\theta)$

Pero $\cos(-a) = \cos a$

$\operatorname{sen}(-a) = -\operatorname{sen} a$

$$Z_1 = \frac{1}{1^4}\left(\cos 4\pi - i \operatorname{sen} 4\pi\right)$$

Esto es:

$$Z_1^{-4} = \frac{1}{1}\left(\cos 4\cdot 180 - i \operatorname{sen} 4\cdot 180\right)$$

$$Z_1^{-4} = 1\left(1 - i(0)\right)$$

$$Z_1^{-4} = 1 - 0i$$ → Obtuvimos el mismo resultado y esto se llama "Invariante"

En forma exponencial

$$Z_1^{-4} = \left[1 e^{i\pi}\right]^{-4} = 1^{-4}\left(e^{i\pi}\right)^{-4}$$

$$Z_1^{-4} = \frac{1}{1^4} e^{-4i\pi}$$

Como $e^{i\theta} = (\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)$

Entonces

$$Z_1^{-4} = \frac{1}{1}\left(\cos(-4\pi) + i \operatorname{sen}(-4\pi)\right)$$

esto es

$$Z_1^{-4} = 1\left(1 - 0i\right)$$

$$Z_1^{-4} = 1 - 0i$$

17/10/2018

Efectuar

$$\frac{Z_2}{Z_1}$$

Sabemos que $\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{r_1}{r_2}\left(\cos(\theta_1 - \theta_2) \cdot i \operatorname{sen}(\theta_1 - \theta_2)\right)$

Entonces $\frac{Z_2}{Z_1} = \frac{1}{1}\left(\cos\left(\frac{3\pi}{2} - \pi\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{2} - \pi\right)\right)$

$$\frac{Z_2}{Z_1} = 1\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)$$

$$\frac{Z_2}{Z_1} = 1\left(\cos 90° + i \operatorname{sen} 90°\right)$$

$$\frac{Z_2}{Z_1} = 1\left(0 + i(1)\right) \rightarrow \frac{Z_2}{Z_1} = 0 + i$$

Hacer $Z_1 \cdot Z_2$

Sabiendo que: $Z_1 Z_2 = r_1 r_2 \left(\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \operatorname{sen}(\theta_1 + \theta_2)\right)$

$$Z_1 Z_2 = (1)(1)\left(\cos\left(\pi + \frac{3\pi}{2}\right) + i \operatorname{sen}\left(\pi + \frac{3\pi}{2}\right)\right)$$

$$Z_1 Z_2 = 1\left(\cos\left(\frac{5\pi}{2}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{5\pi}{2}\right)\right)$$

$$Z_1 Z_2 = 1\left(\cos\left(\frac{5(180)}{2}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{5(180)}{2}\right)\right)$$

$$Z_1 Z_2 = 1 (\cos 450 + i \operatorname{sen} 450$$

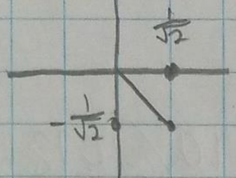
$$Z_1 Z_2 = 1(0 + i(1))$$

$$Z_1 Z_2 = 0 + i$$

Sea $Z = \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} i$

Use la fórmula de De Moivre para obtener Z^{20}

$\hookrightarrow Z^n = r^n\left(\cos(n\theta) + i \operatorname{sen}(n\theta)\right)$



$$\theta = 360 - 45$$

$$\theta = 315 = \frac{7}{4}\pi$$

$$r = \sqrt{\left(\tfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\tfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}$$

$$r = 1$$

$$Z^{20} = 1^{20}\left[\cos\left(20 \cdot \frac{7\pi}{4}\right) + i \operatorname{sen}\left(20 \cdot \frac{7\pi}{4}\right)\right]$$

$$Z^{20} = 1\left[\cos(35\pi) + i \operatorname{sen}(35\pi)\right]$$

$$Z^{20} = 1(-1 + i(0))$$

$$Z^{20} = -1 + 0i$$

Calcular ahora Z^{-20}

$$Z^{-20} = 1^{-20}\left[\cos\left(-20 \cdot \frac{7\pi}{4}\right) + i \operatorname{sen}\left(-20 \cdot \frac{7\pi}{4}\right)\right]$$

$$Z^{-20} = 1^{20} \cdot [\cos(-35\pi) + i \operatorname{sen}(-35\pi$$

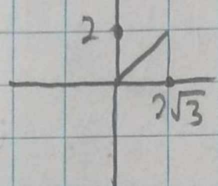
Por paridad/imparidad

$$Z^{-20} = 1^{-20}\left[\cos(35\pi) - i\ \text{sen}(35\pi)\right]$$

$$Z^{-20} = -1 + 0i$$

Sea $Z = 2\sqrt{3} + 2i$

obtengo Z^{-6}



$$r = \sqrt{(2\sqrt{3})^2 + (2)^2}$$

$$r = 4$$

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{\cancel{2}}{\cancel{2}\sqrt{3}}\right) = 30^\circ = \frac{\pi}{6}$$

$$Z^{-6} = 4^{-6}\left[\cos\left(-6\cdot\frac{\pi}{6}\right) + i\ \text{sen}\left(-6\cdot\frac{\pi}{6}\right)\right]$$

$$Z^{-6} = \frac{1}{4^6}\left[\cos\left(\frac{\pi}{1}\right) - i\ \text{sen}\left(\frac{\pi}{1}\right)\right]$$

$$Z^{-6} = \frac{1}{4096}\left[-1 + 0i\right]$$

$$Z^{-6} = -\frac{1}{4096} + 0i$$

19/10/2018

Nota A partir de aquí comienza tercer parcial

Las Raíces de los Números Complejos

Por la fórmula de De Moivre sabemos que

dado $Z = a + bi$

Z^n se efectúa

como $Z^n = r^n(\cos(n\theta) + i\ \text{sen}(n\theta))$

Entonces un problema natural es querer resolver $\sqrt[n]{Z}$

Como Z tiene como representación exponencial

$$Z = re^{i\theta}$$

o explícitamente $Z = re^{i(\theta + 2\pi k)}$

entonces $$Z^{1/n} = \left[re^{i(\theta + 2\pi k)}\right]^{1/n}$$

$$Z^{1/n} = r^{1/n} e^{i\left(\frac{\theta + 2\pi k}{n}\right)}$$

Donde para cada $k = 0, 1, 2 \ldots n-1$
Se define las n-ésimas raíces de Z

Recuerde
$$e^{i\theta} = \cos\theta + i \operatorname{sen}\theta$$
bajo la identidad
$$\cos\theta = \cos(\theta + 2\pi k)$$
$$\operatorname{sen}\theta = \operatorname{sen}(\theta + 2\pi k)$$

Con lo anterior estamos resolviendo la ecuación
$$x^n - Z = 0$$
donde la variable x es un número tal que
$$x \in R \subset C$$
x pertenece a los reales y está contenido en los complejos
porque $Z \in C$ y es de la forma $Z = a + bi$
con $i = \sqrt{-1}$

Nótese
$$x^n - Z = 0$$
$$x^n = Z$$
$$\sqrt[n]{x^n} = \sqrt[n]{Z}$$
$$x = \sqrt[n]{Z}$$
Lo que se busca es el θ definido por $x^n - Z$
Por otra parte
$$x^{1/n} - Z = 0$$
despejando
$$x^{1/n} = Z$$
$$\sqrt[n]{x} = Z$$
$$(\sqrt[n]{x})^n = Z^n$$
$$x = Z^n$$
En general, como $Z = a + bi$ es una suma bajo $i = \sqrt{-1}$
$$\sqrt[n]{x} - (\alpha + \beta) = 0$$ donde α y β son reales
define $\sqrt[n]{x} = \alpha + \beta$
$$x = (\alpha + \beta)^n$$

que es el bello Binomio de Newton

$$x = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{(n-k)!\,k!} \cdot a^{n-k} \cdot b^{k}$$

22/10/2018

Ejercicio

Calcular las dos raices cuadradas de

$Z = -\sqrt{2} + \sqrt{2}\, i$

Solucion

Sabemos que las n raices n-esimas de un número complejo están dadas por

$\mathcal{E}_k = r^{\frac{1}{n}} e^{i\left(\frac{\theta + 2k}{n}\right)}$

donde $k = 0, 1, 2, 3 \ldots n-1$

En nuestro caso

$Z = -\sqrt{2} + \sqrt{2}\, i$ $\qquad r = 2$

$Z = (-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ $\qquad \theta = \frac{3}{4}\pi = 135^\circ$

Como se buscan las raices cuadradas de $Z = -\sqrt{2} + \sqrt{2}\, i$

esto es: $\sqrt{Z} = Z^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\sqrt{-2} + \sqrt{2}\, i}$

$n = 2$

Luego $\mathcal{E}_k = r^{\frac{1}{n}} \cdot e^{i\left(\frac{\theta + 2\pi k}{n}\right)}$

i. Primer raiz $\mathcal{E}_0 = 2^{\frac{1}{2}} \cdot e^{i\left(\frac{\frac{3\pi}{4} + 2\pi 0}{2}\right)}$

$2^{\frac{1}{2}} \cdot e^{i \frac{3}{8}\pi}$

$\sqrt{2} \cdot \left(\cos \frac{3 \cdot 180}{8} + i \operatorname{sen} \frac{3 \cdot 180}{8}\right)$

$\sqrt{2} \cdot (0{,}3826 + 0{,}9238 i)$

$\mathcal{E}_0 = \sqrt{2} \cdot 0{,}3826 + \sqrt{2} \cdot 0{,}9238 i$

Segunda raiz $\mathcal{E}_1 = 2^{\frac{1}{2}} \cdot e^{i\left(\frac{\frac{3\pi}{4} + 2\pi(1)}{2}\right)}$

$2^{\frac{1}{2}} \cdot e^{i\frac{11\pi}{8}}$

$\sqrt{2} \cdot \left(\cos \frac{11 \cdot 180}{8} + i \operatorname{sen} \frac{11 \cdot 180}{8}\right)$

$$\sqrt{2}\,(-0.3826-0.9238\,i)$$
$$\varepsilon_1 = -0.3826\sqrt{2} - 0.9238\,i\sqrt{2}$$

Calcular las 4 raíces de $Z = 1 + 0i$

$Z = 1 + 0i$ $\quad r = 1$

$Z = (1, 0)$ $\quad \theta = 0$

$$Z = re^{i\theta}$$

$$r^{1/n} \cdot e^{i\left(\frac{\theta + 2\pi k}{n}\right)}$$
$$1^{1/4} \cdot e^{i\left(\frac{0 + 2\pi k}{4}\right)}$$

Raíz

1 $\quad \frac{0 + 2\pi 0}{4} = 0$

2 $\quad \frac{0 + 2\pi 1}{4} = \frac{\pi}{2}$

3 $\quad \frac{0 + 2\pi 2}{4} = \pi$

4 $\quad \frac{0 + 2\pi 3}{4} \quad \frac{3\pi}{2}$

Solución 1 $\quad 1\,(\cos 0 + i \operatorname{sen} 0)$
$$1\,(1 + 0i)$$
$$\varepsilon_0 = 1 + 0i$$

Solución 2 $\quad 1\,(\cos \frac{\pi}{2} + i \operatorname{sen} \frac{\pi}{2})$
$$1\,(0 + 1i)$$
$$\varepsilon_1 = 0 + i$$

Solución 3 $\quad 1\,(\cos \pi + i \operatorname{sen} \pi)$
$$1\,(-1 + i(0))$$
$$\varepsilon_2 = -1 + 0i$$

Solución 4 $\quad 1\,(\cos \frac{3\pi}{2} + i \operatorname{sen} \frac{3\pi}{2})$
$$1\,(0 + i(-1))$$
$$\varepsilon_3 = 0 - i$$

Suma todas

Para poder interpretar de forma adecuada la suma de muchos términos como $(a+b)^n$ es necesario conocer el operador $\sum$ llamado operador sumatoria o sigma:

$$\sum_{i=1}^{n} f(i) = f(1) + f(2) + f(3) + f(4) \cdots f(n)$$

lim superior: n

lim inferior: $i=1$

El índice i cambia sucesivamente de 1 en 1 y uno tras otro

Cuando $n \to +\infty$

$$\sum_{i=1}^{+\infty} f(i) = \lim_{n \to +\infty} \sum_{i=1}^{n} f(i)$$

Si f es continua en $[a, b]$ y f es diferenciable en (a, b)

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n \to +\infty} \sum_{i=1}^{n} f(i)\,\Delta x_i$$

25/10/2018

Tenemos

La sumatoria de $f(i)$

$$\sum_{i=1}^{n} f(i) = f(1) + f(2) + f(3) \cdots f(n-1) + f(n)$$

Cuando $n \to +\infty$

$$\sum_{i=1}^{+\infty} f(i) = \lim_{n \to +\infty} \sum_{i=1}^{n} f(i)$$

- Bajo la propiedad de los límites

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} = 0 \quad y \quad \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n^p} = 0^p = 0$$

Propiedad de Linealidad del Operador Sigma o Sumatoria

- $\sum_{i=1}^{n} c\, f_{(i)} = c \sum_{i=1}^{n} f_{(i)}$ c es una constante

- $\sum_{i=1}^{n} [f_{(i)} \pm G_{(i)}] = \sum_{i=1}^{n} f_{(i)} \pm \sum_{i=1}^{n} G_{(i)}$

Verificación de la primera propiedad

$$\sum_{i=1}^{n} c\, f_{(i)} = c f_{(1)} + c f_{(2)} + c f_{(3)} + c f_{(4)} \dots$$
$$= c\,(f_{(1)} + f_{(2)} + f_{(3)} + f_{(4)} \dots)$$
$$\therefore = c \sum_{i=1}^{n} f_{(i)}$$

Verificación de la segunda propiedad

$$\sum_{i=1}^{n} [f_{(i)} + G_{(i)}] = [f_{(1)} + G_{(1)}] + [f_{(2)} + G_{(2)}] \dots$$

Por propiedad conmutativa y asociativa

$$= [f_{(1)} + f_{(2)} \dots] + [G_{(1)} + G_{(2)} \dots]$$

Por definición de sumatoria

$$\therefore = \sum_{i=1}^{n} f_{(i)} + \sum_{i=1}^{n} G_{(i)}$$

Valor de Operación con $\sum$

$$\sum_{i=1}^{n} 1 = n \qquad \sum_{i=1}^{n} c = cn$$

Obtenga la suma

$$\sum_{i=1}^{100} \frac{1}{25} = 100\left(\frac{1}{25}\right) = 4$$

Obtenga la suma

$$\sum_{i=1}^{8000} (\sqrt{2}-1) = \sum_{i=1}^{8000} \sqrt{2} - \sum_{i=1}^{8000} 1$$

$$8000\sqrt{2} - 8000$$

Sumas Trascendentes

$1+2+3+4\ldots$

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$$

$1^2+2^3+3^2+4^2\ldots$

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$1^3+2^3+3^3+4^3\ldots$

$$\sum_{i=1}^{n} i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

26/10/2018

Propiedades de Σ

$$\sum_{i=1}^{n} c = cn$$ Ya anotadas previamente

Obtenga la suma $\sum_{i=1}^{7}\left(\frac{3}{2}i-2\right) =$

Solución $\sum_{i=1}^{7} \frac{3}{2}i - \sum_{i=1}^{7} 2$

$$\frac{3}{2}\sum_{i=1}^{7} - \sum_{i=1}^{7} 2 \rightarrow \frac{3}{2}\cdot\frac{7(7+1)}{2} - 2(7)$$

$$42 - 14 = \underline{28}$$

Resolver $\sum_{i=1}^{7} (i^2 + 1)$

$$\sum i^2 + \sum 1$$

$$\frac{7(7+1)([2 \cdot 7] + 1)}{6} + 7$$

$$\frac{7 \cdot \cancel{8}^{4} \cdot \cancel{15}^{5}}{\cancel{6}_{\cancel{3}}} = 7 \cdot 4 \cdot 5 = \underbrace{7 \cdot 20}_{} = \cancel{140}$$

$$140 + 7 = \underline{147}$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{27}{n^3} i^2$$

$$\lim_{n \to +\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{27}{n^3} i^2$$

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{27}{n^3} \sum i^2$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{27}{n^3} \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$\frac{27}{6} \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{n^3}$$

$$\frac{27}{6} \cdot \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{n^3}$$

$$\frac{27}{6} \cdot 2 + \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2}$$

$$\frac{27}{6} \left[\lim_{n \to \infty} 2 + 3 \underbrace{\cancel{\lim \frac{1}{n}}}_{0} + \underbrace{\cancel{\lim \frac{1}{n^2}}}_{0} \right]$$

$$\frac{27}{6} \cdot (2 + 3(0) + 0) \to \frac{27(2)}{6} = \frac{54}{6} = 9$$

Calcular
$$\sum_{i=1}^{+\infty} \frac{-8}{n^2}\, i$$

$$\lim \sum \frac{-8}{n^2}\, i$$

$$\lim \frac{-8}{n^2} \sum i$$

$$\lim \frac{-8}{n^2} \cdot \frac{n(n+1)}{2} \to -4 \cdot \frac{n(n+1)}{n} \to -4\left(1+\frac{1}{n}\right)$$

$$-4 \cdot \lim \left(\underset{\downarrow\, 1}{1} + \cancel{\frac{1}{n}}_{0}\right) \to -4(1) \to \underline{-4}$$

Fracciones Parciales o la División como Suma
Introducción
Sabemos que algebraicamente: $\frac{a}{b} = a\, b^{-1}$ con $b \neq 0$

nótese que dividir es una multiplicación
y como $\frac{a}{b}$ significa $a \div b$, a "entre" b

$b \overline{)\, a}$ efectuar división

Algoritmo de la división

$$\begin{array}{r} c \\ b \overline{)\, a} \\ -\,a\,c \\ \hline r \end{array}$$

c ← cociente

divisor

r ← residuo

entonces
$$\frac{a}{b} = c + \frac{r}{b}$$
La división es una suma bajo el algoritmo de la división

Supongamos los polinomios
$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} \dots a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$
$$q(x) = b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} \dots b_2 x^2 + b_1 x + b_0$$
de tal manera que el grado n de $p(x)$ y el grado m de $q(x)$ sea tal que $n \leq m$

Entonces en la función racional:

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} \dots a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} \dots b_1 x + b_0}$$

Se buscan los factores del divisor $q(x)$ para asociarlos algebraicamente con los coeficientes del numerador $p(x)$

- $q(x)$ puede tener sólo factores lineales que no se repiten

$$(x - c_1)(x - c_2)(x - c_3) \dots (x - c_n)$$

por ejemplo

$$x^2 - 9 = (x+3)(x-3)$$
$$x^2 - 7x = x(x-7) = (x+0)(x-7)$$

- También puede tener factores lineales que se repiten

$$x^2 + 4x + 4 = (x+2)(x+2) = (x+2)^2$$
$$x^2 - 2x + 1 = (x-1)(x-1) = (x-1)^2$$

- También puede tener factores cuadráticos que no se pueden factorizar más

$$x^2 + 9$$
$$x^2 + x + 1$$

- O una combinación de los casos anteriores

$$x^3 - 2x^2 + x = x(x^2 - 2x + 1) = (x-0)(x-1)^2$$
$$x^4 + 9x^2 = x^2(x^2+9) = (x-0)^2(x^2+9)$$
$$x^3 - 27 = x^3 - 3^3 = (x-3)(x^2+3x+9)$$

Fracción Parcial

Caso: Factores lineales que no se repiten

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{p(x)}{(x-c_1)(x-c_2)(x-c_3)\dots(x-c_n)} = \frac{A}{x-c_1} + \frac{B}{x-c_2} \dots \frac{Z}{x-c_n}$$

donde al efectuar la suma de fracciones

Por la propiedad asociativa: asociamos los términos de la variable $x^n, x^{n-1} \dots x_2, x_1, a_0$ con los coeficientes de $p(x)$

Descomponer en fracciones parciales

$$\frac{3x}{x^2+x-6}$$

Solución

$$\frac{3x}{x^2+x-6} = \frac{3x}{(x+3)(x-2)}$$

Factores lineales diferentes

$$\frac{A}{x+3} + \frac{B}{x-2} = \frac{A(x-2)+B(x+3)}{(x+3)(x-2)}$$

$$\frac{Ax-2A+Bx+3B}{(x+3)(x-2)} = \frac{(A+B)x+(-2A+3B)}{(x+3)(x-2)}$$

Entonces:

$$\frac{3x}{x^2+x-6} = \frac{(A+B)x+(-2A+3B)}{(x+3)(x-2)} = \frac{3x+0}{(x+3)(x-2)}$$

La igualdad se cumple si y sólo si los términos correspondientes son iguales entre sí

- $A+B=3$
- $-2A+3B=0$

} Resolvemos el sistema ... $B=\frac{6}{5}$, $A=\frac{9}{5}$

Luego

$$\frac{3x}{x^2+x-6} = \frac{9/5}{x+3} + \frac{6/5}{x-2}$$

30/10/2018

Obtenga las Fracciones Parciales

$$\frac{4x-2}{x^3-x^2-2x}$$

Solución

$$\frac{4x-2}{x^3-x^2-2x} = \frac{4x-2}{x(x^2-x-2)} = \frac{4x-2}{x(x-2)(x+1)}$$

Factores lineales

$$\frac{A}{x} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x+1}$$

$$\frac{A(x-2)(x+1) + B(x)(x+1) + C(x)(x-2)}{x(x-2)(x+1)}$$

$$\frac{Ax^2 - Ax - 2A + Bx^2 + Bx + Cx^2 - 2Cx}{x(x-2)(x+1)}$$

$$\rightarrow \frac{(A+B+C)x^2 + (-A+B-2C)x + (-2A)}{x(x-2)(x+1)}$$

Entonces

$$\frac{4x-2}{x^3-x^2-2x} = \frac{0x^2+4x+(-2)}{x^3-x^2-2x} = \text{a lo anterior}$$

Por lo tanto

Asociamos los terminos con asteriscos:

$$\left.\begin{array}{ll} * & A+B+C=0 \\ * & -A+B-2C=4 \\ * & -2A=-2 \end{array}\right\} \quad \underline{\underline{A=1}}$$

$1+B+C=0 \rightarrow B=-1-C$

$-1+B-2C=4 \rightarrow B=4+1+2C$

$-1-C=4+1+2C$

$\frac{-6}{3}=C$, $\therefore \underline{\underline{C=2}}$

$\therefore \underline{\underline{B=1}}$

$$\frac{A}{x} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x+1}$$

$$\downarrow$$

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x-2} + \frac{-2}{x+1}$$

Descomponer en fracciones Parciales

$$\frac{5x-2}{x^2-4} = \frac{5x-2}{(x+2)(x-2)} \rightarrow \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x-2}$$

$$\frac{A(x-2)+B(x+2)}{(x+2)(x-2)} = \frac{Ax-2A+Bx+2B}{(x+2)(x-2)}$$

$$\frac{(A+B)x+2(B-A)}{(x+2)(x-2)}$$

$$\left.\begin{array}{l} A+B=5 \\ 2B-2A=-2 \end{array}\right\} \begin{array}{l} B=5-A \\ B=A-1 \end{array} \therefore 5-A=A-1 \therefore A=3 \quad B=2$$

$$\frac{3}{x+2} + \frac{2}{x-2}$$

31/10/2018

Caso: Factores que se repiten

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{p(x)}{(x-c_1)^n (x-c_2)^m}$$

$x-c_1$ se repite n veces

$x-c_2$ se repite m veces

Se obtendrá:

$$\frac{A}{x-c_1} + \frac{B}{(x-c_1)^2} + \frac{C}{(x-c_1)^3} \cdots \frac{L}{(x-c_1)^n} +$$

$$\frac{M}{x-c_2} + \frac{O}{(x-c_2)^2} + \frac{P}{(x-c_2)^3} \cdots \frac{Z}{(x-c_2)^m}$$

Descomponer en fracciones parciales $\frac{-1}{x^4-2x^3+x^2}$

Solución $$\frac{-1}{x^4-2x^3+x^2} = \frac{-1}{x^2(x^2-2x+1)} = \frac{-1}{x^2(x-1)^2}$$

"x" y "$x-1$" se repiten

Descomponemos:

$$\frac{-1}{x^2(x-1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{(x-1)} + \frac{D}{(x-1)^2}$$

Sumamos las fracciones

$$\frac{Ax(x-1)^2 + B(x-1)^2 + Cx^2(x-1) + Dx^2}{x^2(x-1)^2}$$

$$\frac{Ax^3 - 2Ax^2 + Ax + Bx^2 - 2Bx + B + Cx^3 - Cx^2 + Dx^2}{x^2(x-1)^2}$$

$$\frac{x^3(A+C) + x^2(-2A+B-C+D) + x(A-2B) + B}{x^2(x-1)^2}$$

De donde la igualdad se cumple si los términos correspondientes son iguales entre sí:

$$A + C = 0$$
$$-2A + B - C + D = 0$$
$$A - 2B = 0 \rightarrow A - 2(-1) = 0 \rightarrow \underline{A = -2}$$
$$\underline{B = -1}$$

$$-2 + C = 0 \rightarrow \underline{C = 2}$$

$$-2(-2) + (-1) - 2 + D = 0 \rightarrow \underline{D = -1}$$

Luego

$$\frac{-1}{x^4 - 2x^3 + x^2} = \underbrace{\frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x-1} + \frac{D}{(x-1)^2}}$$

$$\frac{-2}{x} + \frac{-1}{x^2} + \frac{2}{x-1} + \frac{-1}{(x-1)^2}$$

Descomponer en fracciones parciales $\frac{1}{x^3+3x^2}$

$$\frac{1}{x^2(x+3)} \rightarrow \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x+3}$$

$$\frac{Ax(x+3) + B(x+3) + Cx^2}{x^2(x+3)}$$

$$\frac{Ax^2 + 3Ax + Bx + 3B + Cx^2}{x^2(x+3)} = \frac{x^2(A+C) + x(3A+B) + (3B)}{x^2(x+3)}$$

$A + C = 0$

$3A + B = 0$

$3B = 1 \rightarrow B = \frac{1}{3}$

$3A + \frac{1}{3} = 0 \quad A = -\frac{1}{9}$

$-\frac{1}{9} + C = 0 \quad \therefore \quad C = \frac{1}{9}$

Entonces $\frac{1}{x^3+3x^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x+3}$

$$\frac{-\frac{1}{9}}{x} + \frac{\frac{1}{3}}{x^2} + \frac{\frac{1}{9}}{x+3}$$

05/11/2018

Descomponer en fracciones parciales $\frac{3x^2 - x + 1}{x^3 - x^2}$

$$\frac{3x^2 - x + 1}{x^2(x-1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x-1}$$

$$\frac{Ax(x-1) + B(x-1) + Cx^2}{x^2(x-1)}$$

$$\frac{Ax^2 - Ax + Bx - B + Cx^2}{x^2(x-1)}$$

$$\frac{x^2(A+C) + x(-A+B) + (-B)}{x^2(x-1)}$$

Veamos los numeradores:

$$3x^2 - x + 1 = x^2(A+C) + x(-A+B) + (-B)$$

Entonces

$A + C = 3$

$-A + B = -1 \quad \rightarrow -A - 1 = -1$

$-A = 0 \quad \rightarrow \underline{A = 0}$

$-B = 1 \quad \rightarrow \underline{B = -1}$

$\therefore \underline{C = 3}$

$$\frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x-1} = \frac{0}{x} + \frac{-1}{x^2} + \frac{3}{x-1}$$

Caso: Cuando $q(x)$ tiene factores cuadráticos que no se pueden factorizar

Puedo factorizar algebraicamente $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$ pero $a^2 + b^2$ no, como número real

Bases canónicas

numeralizar

$$x^2 + bx + c = (x + n_1)(x + n_2)$$

donde $n_1 n_2 = c$

$n_1 + n_2 = b$

$n_1 > n_2$

Cuando no se puede determinar directamente n_1 y n_2 el trinomio se expresa igual

Si $$\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{p(x)}{(x-c_1)(x-c_2)(x^2+c_3)+(x^2+bx+c)}$$

Factores lineales

Que no se pueden factorizar

Son rectas

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{A}{x-c_1} + \frac{B}{x-c_2} + \frac{Cx+D}{x^2+c^3} + \frac{Ex+F}{x^2+bx+c}$$

Descomponer en factores

$$\frac{1}{x^3+x^2+x} = \frac{1}{x(x^2+x+1)}$$

factor lineal

factor cuadrático no factorizable

$$\frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+x+1}$$

Sumamos las fracciones

$$\frac{Ax^2+Ax+A+Bx^2+Cx}{x(x^2+x+1)}$$

$$\frac{x^2(A+B)+x(A+C)+A}{x(x^2+x+1)}$$

$$\frac{1}{x^3+x^2+x} = \frac{0x^2+0x+1}{x^3+x^2+x} = \frac{x^2(A+B)+x(A+C)+A}{x(x^2+x+1)}$$

$A + B = 0$
$A + C = 0$
$A = 1$

$B = -1$
$C = -1$

Si $\frac{A}{x} + \frac{Bx + C}{x^2 + x + 1}$

Será $\frac{1}{x} + \frac{-x - 1}{x^2 + x + 1}$

Descomponer $\frac{2x^2}{x^4 + 2x^2}$

$$\frac{2x^2}{x^2(x^2+2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{Cx + D}{x^2 + 2}$$

$$\frac{Ax(x^2+2) + B(x^2+2) + C(Cx + D)(x^2)}{x^2(x^2+2)}$$

$$\frac{Ax^3 + 2Ax + Bx^2 + 2B + Cx^3 + Dx^2}{x^2(x^2+2)}$$

$$\frac{x^3(A + C) + x^2(B + D) + x(2A) + 2B}{x^2(x^2+2)}$$

$A + C = 0 \rightarrow C = 0$
$B + D = 2 \rightarrow D = 2$
$2A = 0 \rightarrow A = 0$
$2B = 0 \rightarrow B = 0$

$$\frac{0}{x} + \frac{0}{x^2} + \frac{0x + 2}{x^2 + 2}$$

Se deja indicado porque no pide simplificar.

Tarea

Descomponer a) $\frac{2}{x^2+2}$

b) $\frac{3x+1}{x^4-8x^2+16}$

a) $\frac{2}{x^2+2} = \frac{2}{x^2+2}$

b) $\frac{3x+1}{x^4-8x^2+16} = \frac{\text{eso}}{(x^2-4)(x^2-4)}$

$\frac{\text{eso}}{(x+2)^2(x-2)^2} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{(x+2)^2} + \frac{C}{x-2} + \frac{D}{(x-2)^2}$

$\frac{A(x+2)(x-2)^2 + B(x-2)^2 + C(x+2)^2(x-2) + D(x+2)^2}{(x+2)^2(x-2)^2}$

$Ax^3 - 2Ax^2 - 4Ax + 8A + Bx^2 - 4Bx + 4B + Cx^3 + 2Cx^2 - 4Cx$
$- 8C + Dx^2 + 4Dx + 4D$

$x^3(A+C) + x^2(-2A+B+2C+D) + x(-4A-4B-4C+4D) + 8A$
$+ 4B - 8C + 4D$

$A + C = 0$
$-2A + B + 2C + D = 0$
$-4A - 4B - 4C + 4D = 3$
$8A + 4B - 8C + 4D = 1$

$-A - B - C + D = 3/4$
$2A + B - 2C + D = 1/4$

$A \quad 0 \quad -3C + 2D = 1$

Como $A + C = 0 \rightarrow C = -A$

$$A + B + C - D = -\tfrac{3}{4}$$
$$B - D = -\tfrac{3}{4}$$
$$B = D - \tfrac{3}{4}$$

$$2A + B - 2C + D = \tfrac{1}{4}$$
$$2A + D - \tfrac{3}{4} + 2A + D = \tfrac{1}{4}$$
$$4A + 2D = 1$$
$$8A + 4D = 2 \qquad \therefore \quad 4B - 8C = -1$$
$$8A = 2 - 4D \qquad -8C = -1 - 4B$$
$$2 - 4D = -1 - 4B$$
$$2 - 4D = -1 - 4\left(D - \tfrac{3}{4}\right)$$
$$2 - 4D = -1 - 4D + 3$$

Resolver por determinantes

$$A + C = 0$$
$$-2A + B + 2C + D = 0$$
$$-4A - 4B - 4C + 4D = 3$$
$$8A + 4B - 8C + 4D = 1$$

$$D \quad \left.\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 2 & 1 \\ -4 & -4 & -4 & 4 \\ 8 & 4 & -8 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 2 & 1 \\ -4 & -4 & -4 & 4 \end{array}\right\} -256$$

$D_1 = -8$ $\qquad D_2 = 80$ $\qquad D_3 = 8$ $\qquad D_4 \; -112$

$\frac{1}{32}$ $\qquad -\frac{5}{16}$ $\qquad -\frac{1}{32}$ $\qquad \frac{7}{16}$

06/11/2018

Polinomios Generados por el Binomio de Newton

Introducción: Generación del polinomio:

$$(x+b)^n = \binom{n}{0} x^n b^0 + \binom{n}{1} x^{n-1} b^1 + \binom{n}{2} x^{n-2} b^2 + \binom{n}{3} x^{n-3} b^3 \cdots \binom{n}{n-1} x b^{n-1} + \binom{n}{n} x^0 b^n$$

Polinomio es una expresión de más de dos términos

Comenzamos por el factorial

El factorial se define $n! = n(n-1)(n-2)\cdots 3\cdot 2\cdot 1$

$$0! = 1$$
$$1! = 1$$

$$n! = (n)(n-1)!$$

Efectuar $\frac{7!}{4!} = 7\cdot 6\cdot 5$

Otra notación es

$$n! = \prod_{k=1}^{n} k = 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4 \cdots n$$

El coeficiente binomial si n y k con $n \geq k$ se llama coeficiente binomial

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!\,k!}$$

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

07/11/2018

El Binomio de Newton

Un polinomio $f(x)$ es el resultado de multiplicar

$f(x) = (x - c_1)(x - c_2) \dots (x - c_{n-1})(x - c_n)$

que al desarrollarse se obtiene

$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} \dots a_2 x^2 + a_1 x + a_0$

Se denominan factores del polinomio:

$x - c_1$

$x - c_2$

$x - c_3$

$x - c_n$

Y puede ser que los números $c_1, c_2 \dots c_n$ sean todos iguales o diferentes

O bien sean complejos

Si el polinomio $f(x)$ está igualado a cero

$f(x) = 0$

Esto es:

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0$$

Entonces tenemos a la ecuación en x de grado n

Que podemos escribir:

$(x - c_1)(x - c_2)(x - c_3) \dots (x - c_n) = 0$

Por la propiedad

$$ab = 0 \longleftrightarrow a = 0, \; b = 0$$

$x - c_1 = 0$

$x - c_2 = 0$

$\vdots$

$x - c_n = 0$ $\longrightarrow$ $\boxed{\begin{matrix} x = c_1 \\ x = c_2 \\ \vdots \\ x = c_n \end{matrix}}$ Soluciones de la ecuación

Teorema del Binomio

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^{n} a^{n-k} b^k$$

Ejercicio

$$(x+2)^3 \quad \sum_{k=0}^{3} \binom{3}{k} x^{3-k} \cdot 2^k$$

$$\binom{3}{0} x^3 2^0 + \binom{3}{1} x^2 2^1 + \binom{3}{2} x^1 2^2 + \binom{3}{3} x^0 2^3$$

$$x^3 + 6x^2 + 12x + 8$$

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
5 10 10 5 1

Ejercicio

Resolver

$$x^3 + 6x^2 + 12x + 8 = 0$$

$$(x+2)^3 = 0$$

$(x+2) = 0$ $\quad$ $x+2=0$ $\quad$ $x+2=0$

$x = -2$ $\quad$ $x=-2$ $\quad$ $x=-2$

$x=-2$ con multiplicidad algebraica de orden $k=3$

Desarrollar

$(x+2)^5$

16
5
0

160
80

$$x^5 + 10x^4 + 40x^3 + 80x^2 + 80x + 32$$

Resolver

$$x^5 + 10x^4 + 40x^3 + 80x^2 + 80x + 32 = 0$$

$$(x+2)^5 = 0$$

$x = -2$ con multiplicidad algebraica de orden $k = 5$

08 / 11 / 2018

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!\, k!}$$

Desarrollar $(e^x - e^{-x})^5$

$$e^{5x} - 5e^{3x} + 10e^x - \frac{10}{e^x} + \frac{5}{e^{3x}} - \frac{1}{e^{5x}}$$

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
5 10 10 5 1

$e^{4x} \cdot e^{-x}$

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1

Serie de Taylor

Cómo resolver a 0

$$e^{5x} - 5e^{3x} + 10e^{x} - \frac{10}{e^{x}} + \frac{5}{e^{3x}} - \frac{1}{e^{5x}} = 0$$

$$(e^{x} - e^{-x})^5 = 0$$

$$e^{x} - e^{-x} = 0$$

$$e^{x} = e^{-x} \rightarrow e^{x} = \frac{1}{e^{x}} \rightarrow x = 0$$

con multiplicidad $k = 5$

08 / 11 / 2018

$$\left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^4 \quad x^2 - 4x + 6 - \frac{4}{x} + \frac{1}{x^2}$$

$$\left(\frac{1}{a^2} - \sqrt{b^3}\right)^4 \quad \frac{1}{a^8} - \frac{4\sqrt{b^3}}{a^6} + \frac{6b^3}{a^4} - \frac{4\sqrt{b^9}}{a^2} + b^6$$

Resolver la ecuación $x^2 - 4x + 6 - 4x^{-1} + x^{-2} = 0$

$$\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}} = 0$$

$$\sqrt{x} = \frac{1}{\sqrt{x}} \rightarrow x = 1$$

con multiplicidad 4

09/11/2018

Desarrollar $\left(\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^4$

Tarea para el martes
Aplique el Teorema del Binomio para desarrollar
a) $(\ln\sqrt{x}-1)^5$ Resolver la ecuación definida por $(\ln\sqrt{x}-1)^5=0$

b) $\left(\frac{a}{b}-\frac{b}{a}\right)^4$

13/11/2018

Las Raíces o Ceros o Soluciones de una Ecuación y el Teorema Fundamental del Álgebra
Sabemos que la ecuación en la variable x está dada por el polinomio $f(x)$ igualado a 0
Es decir $f(x)=0$
Esto es: $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} \dots a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0$
donde n es el grado de la ecuación y a_0 es el término independiente y $a_n \to a_1$ son los coeficientes de la variable
Como $ab=0$ significa que $a=0$, $b=0$ donde a y b son factores de la multiplicación
Resolver $f(x)=0$
Es poder escribir a $f(x)$ en sus n factores
$(x-c_1)(x-c_2)\dots(x-c_{n-1})(x-c_n)=0$
Donde $\%=0$ $\therefore$

$$x=c_1$$
$$x=c_2$$
$$\vdots$$
$$x=c_n$$

La ecuación $f(x)=0$ de grado n tiene n soluciones
Como los factores $x-c_i$ no son todos simples:
El teorema fundamental del álgebra establece que la ecuación

$$\begin{array}{r} x^2 - x - 6 \\ x + 1 \\ \hline x^3 - x^2 - 6x \\ x^2 + x - 6 \end{array}$$

$f(x) = 0$ tiene n soluciones
Que pueden ser:
- Todas números reales diferentes
- Todas se repiten (multiplicidad algebraica)
- Todas números complejos $a + bi$ y $a - bi$
- Una combinación de todas las anteriores

Pero en todas son n soluciones
Si $x - c_i = 0$ entonces $x = c_i$
por lo que si $f(x) = 0$ entonces $f(c_i) = 0$
Se dice que $x = c_i$ es una raíz, solución o cero
Significa que $x - c_i$ es divisor de $f(x)$

Si $f(x) = 0$ y $f(c_i) = 0$
$x = c_i$ es solución de la ecuación

que significaba:

$$x - c_i \overline{\smash{)}\, f(x)}\quad q(x)$$

entonces $\dfrac{f(x)}{x - c_i} = q(x)$ de donde $f(x) = q(x)(x - c_i)$

Ejercicio
Resolver $x^3 - 7x - 6 = 0$
a) Verificar que $x = -1$ es raíz
b) Si $x = -1$ es raíz determinar las otras dos raíces

a)

$$\begin{array}{r|l} & x^2 - x - 6 \\ \hline x + 1 & x^3 - 7x - 6 \\ & x^3 + x^2 \\ & +x^2 + x \\ & -6x - 6 \\ & -6x - 6 \\ \hline & 0 \end{array}$$

← Aquí da 0

b) $x^2 - x - 6$
$(x - 3)(x + 2)$

14/11/2018

Sea $x^4 - 3x^3 + 5x^2 - 27x - 36 = 0$

a) Verificar que $x = 4$ es raíz

b) Hallar todas sus raíces

a)
$$
\begin{array}{r|l}
 & x^3 + x^2 + 9x + 9 \\
x-4 & x^4 - 3x^3 + 5x^2 - 27x - 36 \\
 & -x^4 + 4x^3 \\
 & 0 \quad x^3 + 5x^2 \\
 & -x^3 + 4x^2 \\
 & 0 \quad 9x^2 - 27x \\
 & -9x^2 + 36x \\
 & 0 + 9x - 36 \\
 & -9x + 36 \\
 & 0 \quad 0
\end{array}
$$

Aquí vemos que $x = 4$ es raíz

b)

$$x^3 + x^2 + 9x + 9 \rightarrow x^2(x+1) + 9(x+1) \rightarrow (x^2+9)(x+1)$$

$$(x^2 + 9)(x + 1)$$

$$\underbrace{(x+3i)(x-3i)(x+1)}$$

$$(x+3i)(x-3i)(x+1)(x-4) = x^4 - 3x^3 + 5x^2 - 27 - 36$$

Ejercicio Verificar si $x = -\frac{1}{2}$ es raíz de

$2x^3 + 5x^2 - 14x - 8 = 0$ y obtenga todas las raíces

$$
\begin{array}{r|l}
 & 2x^2 + 4x - 16 \\
x + \frac{1}{2} & 2x^3 + 5x^2 - 14x - 8 \\
 & -2x^3 - x^2 \\
 & 0 \quad 4x^2 - 14x - 8 \\
 & -4x^2 - 2x \\
 & 0 \quad -16x - 8 \\
 & 16x + 8 \\
 & 0
\end{array}
$$

$2x^2 + 4x - 16$

$2(x^2 + 2x - 8)$

$2[(x+4)(x-2)]$

$\downarrow$

$2(x+4)(x-2)(x+\frac{1}{2})$

$(x+4)(x-2)(2x+1)$

$x = -4,\ x = 2,\ x = -\frac{1}{2}$

$2ab \qquad 2[(a)(b)] \qquad 2(a)(b)$

Observación

$x+4=0$

$x-2=0$

$x+\frac{1}{2}=0$

Y también vemos: $\frac{2x^3+5x^2-14x-8}{x+\frac{1}{2}}=2x^2+4x-16$

Pero $x+\frac{1}{2}=0$

Lo que quiere decir que este es infinito

Resolver: $x^4+2x^2+1=0$

$(x^2+1)(x^2+1)$

$(x^2-(-1))(x^2-(-1))$

$(x^2-i^2)(x^2-i^2)$

$(x+i)(x-i)(x+i)(x-i)$

$x=i,\ x=-i,\ x=i,\ x=-i$

$x=i$ con multiplicidad $k=2$

$x=-i$ $k=2$

20/11/2018

Resolver

$$\sqrt[3]{\frac{1}{x^4}} - 5\sqrt[3]{\frac{1}{x^2}} + 4 = 0$$

$(x^{-4})^{1/3} - 5x^{2/3} + 4 = 0$

$(x^{-1/3})^4 - 5x^{2/3} + 4 = 0$ Su grado es $n = 4$

Factorizo

$(x^{-2/3} - 4)(x^{-2/3} - 1) = 0$

$x^{-2/3} - 4 = 0$ $x^{-2/3} - 1 = 0$

$(x^{-1/3})^2 - 2^2$ $(x^{-1/3})^2 - 1^2$

$(x^{-1/3} + 2)(x^{-1/3} - 2) = 0$ $(x^{-1/3} - 1)(x^{-1/3} + 1) = 0$

$x^{-1/3} = -2$ $x^{-1/3} = 2$ $x^{-1/3} = 1$ $x^{-1/3} = -1$

$x^{-1} = -8$ $x^{-1} = 8$ $x^{-1} = 1$ $x^{-1} = -1$

$x = -\frac{1}{8}$ $x = \frac{1}{8}$ $x = 1$ $x = -1$

Resolver

$4x^2 - 49 = 0$

$(2x)^2 - 7^2$

$(2x - 7)(2x + 7)$

$x = -\frac{7}{2}$ $x = \frac{7}{2}$ a numa

$16x^2 - 81 = 0$

$(4x)^2 - 9^2$

$(4x - 9)(4x + 9)$

$x = \frac{9}{4}$ $x = -\frac{9}{4}$

21/11/2018

Resolver $5x^4 - \frac{5}{16} = 0$

$(\sqrt{5}x^2)^2 - \left(\frac{\sqrt{5}}{4}\right)^2$

$\left(x^2\sqrt{5} - \frac{\sqrt{5}}{4}\right)\left(x^2\sqrt{5} + \frac{\sqrt{5}}{4}\right) = 0$

$$x^2\sqrt{5} - \frac{\sqrt{5}}{4} = 0$$
$$x^2 = \frac{1}{4}$$
$$x^2 - \frac{1}{4} = 0$$
$$\left(x + \frac{1}{2}\right)\left(x - \frac{1}{2}\right)$$
$$x = -\frac{1}{2}, \quad x = \frac{1}{2}$$

$$x^2\sqrt{5} + \frac{\sqrt{5}}{4} = 0$$
$$x^2 = -\frac{1}{4}$$
$$x^2 + \frac{1}{4} = 0$$
$$(x)^2 - \left(\frac{-1}{4}\right) = 0$$
$$(x)^2 - \left(\frac{\sqrt{-1}}{2}\right)^2 = 0$$
$$\left(x - \frac{i}{2}\right)\left(x + \frac{i}{2}\right)$$
$$x = \frac{i}{2}, \quad x = \frac{-i}{2}$$

$$x^{-1/4} - x^{-1/2} = 0$$
$$(x^{-1/2})^2 - x^{-1/2} + 0 = 0$$
$$\cancel{(x^{-1/2} - \quad)(x^{-1/2} + \quad) = 0}$$
$$x^{-1/4} - x^{-1/4}\,x^{-1/4} = 0$$
$$x^{-1/4}\left(1 - x^{-1/4}\right) = 0$$
$$x^{-1/4} = 0$$
$$\left(\frac{1}{x^{1/4}}\right)^4 = 0^4$$
$$\frac{1}{x} = 0$$

$$1 - x^{-1/4} = 0$$
$$1 = x^{-1/4}$$
$$1 = \frac{1}{x}$$
$$1 = x$$

Así se dejo porque $1 = 0x$

OMAIGA → $1 = 0$ No tiene sentido

Resolver $x^3 - 8 = 0$

$$(x)^3 - (2)^3 = (x-2)(x^2 + 2x + 4) = 0$$
$$x - 2 = 0$$
$$x = 2$$
$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$
$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{-12}}{2} \rightarrow$$

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{4 \cdot 3 \cdot -1}}{2}$$

$$x = \frac{-2 \pm 2\sqrt{3}\, i}{2}$$

$x = 2$ $\quad x = -1 + \sqrt{3}\, i \quad x = -1 - \sqrt{3}\, i$

22/11/2018

Resolver $x^6 - 1 = 0$

$$(x^3 - 1)(x^3 + 1) = 0$$

$$(x-1)(x^2 + x + 1)(x+1)(x^2 - x + 1) = 0$$

$x = 1 \qquad x = -1$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4}}{2}$$

$$\frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2}$$

$$\frac{-1 \pm \sqrt{3}\, i}{2}$$

$$x = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i$$

$$x = \frac{-1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i$$

$$x = \frac{-(-1) \pm \sqrt{1-4}}{2}$$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{-3}}{2}$$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{3}\, i}{2}$$

$$x = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i$$

$$x = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i$$

$$x^4 + 2x^2 - x^3 - 2x = 0$$

$$x(x^3 + 2x - x^2 - 2) = 0$$

$x = 0 \qquad x^3 - x^2 + 2x - 2 = 0$

$$x^2(x-1) + 2(x-1) = 0$$

$$(x^2 + 2)(x - 1) = 0$$

$x^2 - (-2), \quad x = 1$

$$x^2 - (\sqrt{-2})^2$$

$$(x + \sqrt{-2})(x - \sqrt{-2})$$

$x = -\sqrt{2}\, i, \quad x = \sqrt{2}\, i$

23/11/2018

Resolución de una Ecuacion considerando los factores primos del termino independiente de la ecuación

Cuando no podemos factorizar directamente buscamos los factores primos del término independiente

Ejemplo $\dots\dots + 8x + 8$

$\downarrow$

factores: 2

También podemos buscar los factores $\frac{a_0}{a_n}$

$$4x^7 + ax^5 \dots + 1 \longrightarrow \frac{a_0}{a_n} = \frac{1}{4}$$

Si en la ecuación $f(x) = 0$

a_0 y $\frac{a_0}{a_n}$

define los factores primos $p_1, p_2, p_3 \dots$

Si se cumple que $f(p_1) = 0$ entonces $x = p_1$ es solución de la ecuación y $x - p_1 = 0$ divide a $f(x)$

$$x - p_1 \overline{\big) f(x)} \quad q(x), \; 0$$

entonces $f(x) = q(x)(x - p_1)$

Si p_i es tal que $f(p_i) = 0$ $x = p_i$ es solución entonces divide a $q(x)$

$$x - p_i \overline{\big) q(x)} \quad q_2(x), \; 0$$

$f(x) = q_2(x)(x - p_1)(x - p_i)$

26/11/2018

Ejercicio

Aplicando el concepto de factor primo del término independiente a_0 o de $\frac{a_0}{a_n}$ resolver la ecuación

$$x^3 + x^2 - 5x + 3 = 0$$

Solución

Los factores de 3 son ± 3 y ± 1

Si hacemos $x = 3$

$f(3) = x^3 + x^2 - 5x + 3$

$27 + 9 - 15 + 3$

$24 \neq 0$

$f(-3) = (-3)^3 + (-3)^2 - 5(-3) + 3$

$-27 + 9 + 15 + 3$

0

Entonces -3 es raiz o solución

Luego, ser raiz significa que divide a $f(x)$ entonces:

$$\begin{array}{r|l} & x^2 - 2x + 1 \\ x+3 & x^3 + x^2 - 5x + 3 \\ & \cancel{-x^3} - 3x^2 \\ & \cancel{-2x^2} - \cancel{5x} \\ & \cancel{2x^2} + \cancel{6x} \\ & \cancel{x + 3} \\ & \cancel{x - 3} \end{array}$$

Entonces $f(x) = (x^2 - 2x + 1)(x + 3) = 0$

Como $x - 1$ divide a $x^2 - 2x + 1 \longrightarrow$ $(x-1)(x-1)(x+3) = 0$

Luego: $x - 1 = 0$ $x = 1$ $x = 1$ con multiplicidad $k = 2$

$x - 1 = 0$ $x = 1$

$x + 3 = 0$ $x = -3$ $x = -3$

Resolver $x^4 - 3x^3 + 3x^2 - 3x + 2 = 0$

Primos: ± 2, ± 1

$f(-2) = (-2)^4 - 3(-2)^3 + 3(-2)^2 - 3(-2) + 2$

$16 + 24 + 12 + 6 + 2$

$f(2) = (2)^4 - 3(2)^3 + 3(2)^2 - 3(2) + 2$

$16 - 24 + 12 - 6 + 2$

0

$$\begin{array}{r|l} & x^3 - x^2 + x - 1 \\ \hline x-2 & x^4 - 3x^3 + 3x^2 - 3x + 2 \\ & \cancel{-x^4} + 2x^3 \\ \hline & \cancel{-x^3} + 3x^2 \\ & \cancel{x^3} - 2x^2 \\ \hline & \cancel{x^2} - 3x \\ & \cancel{-x^2} + 2x \\ \hline & \cancel{-x} + 2 \\ & \cancel{x} - 2 \\ \hline & 0 \end{array}$$

$$(x^3 - x^2 + x - 1)(x - 2)$$

$$\begin{array}{r|l} & x^2 + 0x + 1 \\ \hline x-1 & x^3 - x^2 + x - 1 \\ & -x^3 + x^2 \\ \hline & 0 \quad 0 + x - 1 \\ & 0 \end{array}$$

$$(x^2+1)(x-1)(x-2)$$

$$\downarrow$$

$$(x^2 - (-1))$$

$$(x)^2 - (\sqrt{-1})^2$$

$$(x - i)(x + i)$$

$$(x-1)(x-2)(x-i)(x+i)$$

$x = 1 \quad x = 2 \quad x = i \quad x = -i$

27/11/2018

Para $2x^3 + 3x^2 - 9x - 5 = 0$

a) Obtenga los factores primos de a_0 y $\frac{a_0}{a_n}$ ¿qué significan?

b) Resolver la ecuación

a) $a_0 = 5$ $\qquad 5, 1, -5, -1$

$\frac{a_0}{a_n} = \frac{5}{2}$ $\qquad \frac{5}{2}, \frac{1}{2}, \frac{-5}{2}, \frac{-1}{2}$

Son $\pm \frac{1}{2}, \pm \frac{5}{2}, \pm 1, \pm 5$

Significa que son las posibles soluciones para $f(x) = 0$ junto con los posibles complejos $x = a + bi$
$x = a - bi$

Realizar los factores y resolver para

C enchiló $8x^4 + 30x^3 + 29x^2 - 2x - 30 = 0$

$a_0 = 30$ $\quad \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 5$

30	2
15	3
5	5
1	1
1	

$\frac{a_0}{a_n} = \frac{30}{8}$ $\quad 30\left(\frac{1}{8}\right) \quad 15\left(\frac{1}{4}\right)$

$\frac{15}{2}\left(\frac{1}{2}\right) \quad 2\left(\frac{15}{8}\right)$

$3\left(\frac{10}{8}\right) \quad 6\left(\frac{5}{8}\right)$

$30 \quad 1(30) \quad 2(15) \quad 3(10) \quad 6(5)$

$\frac{1}{8} \quad \left(\frac{1}{8}\right)^1 \quad \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}\right)$

$1\left(\frac{30}{8}\right), 30\left(\frac{1}{8}\right), \frac{30}{2}\left(\frac{1}{4}\right), \frac{30}{4}\left(\frac{1}{2}\right), \frac{2}{2}\left(\frac{15}{4}\right)$

$\frac{15}{2}\left(\frac{2}{4}\right), 2\left(\frac{15}{8}\right), \frac{2}{8}(15), 3\left(\frac{10}{8}\right), 10\left(\frac{3}{8}\right)$

$\frac{3}{2}\left(\frac{10}{4}\right), \frac{10}{2}\left(\frac{3}{4}\right), 6\left(\frac{5}{8}\right), 5\left(\frac{6}{8}\right), \frac{6}{2}\left(\frac{5}{4}\right)$

$\frac{5}{2}\left(\frac{6}{4}\right)$

$1, \frac{15}{4}, 30, \frac{1}{8}, 15, \frac{1}{4}, \frac{15}{2}, \frac{1}{2}, 2, \frac{15}{8}, 3, \frac{5}{4}, 10, \frac{3}{8}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}$

$\frac{3}{4}, 6, \frac{5}{8}, 5, \frac{6}{8},$

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!\,k!} \qquad \frac{3}{2} - \frac{1}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

n: 0, 1, 2, 3, 4

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1

0 1 2 3 4

k

Guía

1-

a) $\left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^4 \leftarrow \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$

$$\binom{4}{0} \cdot (\sqrt{x})^4 \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^0 + \binom{4}{1} (\sqrt{x})^3 \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^1$$
$$+ \binom{4}{2} \cdot (\sqrt{x})^2 \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2 + \binom{4}{3} \cdot (\sqrt{x})^1 \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^3$$
$$+ \binom{4}{4} \cdot (\sqrt{x})^0 \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^4$$

$$\frac{4!}{(4-0)!\,0!} = 1 \qquad \frac{4 \cdot 3 \cdot \cancel{2!}}{\cancel{2!}\,2!} = \frac{4 \cdot 3}{2!} = 2 \cdot 3 = 6$$

$$\frac{4!}{(4-1)!\,1!} = \frac{4 \cdot \cancel{3!}}{\cancel{3!}} = 4 \qquad \frac{4!}{(4-3)!\,3!} = 4$$

1
1 1
1 2 1

$$\left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^4 \quad 1 \cdot \sqrt{x}^4 + 4\sqrt{x}^3 \cdot \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{6\sqrt{x}^2}{\sqrt{x}^2} + \frac{4\sqrt{x}}{\sqrt{x}^3} + \frac{1}{\sqrt{x}^4}$$

$$x^2 + 4x + 6 + \frac{4}{x} + \frac{1}{x^2}$$

4- a)

$$x^7 - 64x = 0$$
$$x(x^6 - 64) = 0$$
$$x(x^3 + 8)(x^3 - 8) = 0$$
$$x(x+2)(x^2 - 2x + 4)(x-2)(x^2 + 2x + 4) = 0$$

a b c

$$\frac{-(-2) \pm \sqrt{4 - 16}}{2}$$

$$\frac{2 + \sqrt{-12}}{2} \qquad \frac{2 - \sqrt{12}}{2}$$

$(a^3 + b^3)$

$(a + b)(a^2 - ab + b^2)$

$2^6 \qquad 2^3$

$\sqrt{3} \cdot \sqrt{-1}$

$$\frac{2 \pm 2\sqrt{-3}}{2} = \frac{\cancel{2}(1 \pm \sqrt{-3})}{\cancel{2}} = 1 \pm \sqrt{-3}$$

$1 + \sqrt{3}\,i$

$1 - \sqrt{3}\,i$

$-1 + \sqrt{3}\,i$

$-1 - \sqrt{3}\,i$

$$
\begin{array}{r|l}
 & 8x^3 + 34x^2 + 46x + 21 \\
\hline
x - \frac{1}{2} & 8x^4 + 30x^3 + 29x^2 - 2x - 30 \\
 & \cancel{-8x^4} + 4x^3 \\
 & \cancel{34x^3} + 29x^2 \\
 & \cancel{-34x^3} + 17x^2 \\
 & \cancel{46x^2} - 2x \\
 & \cancel{-46x^2} + 23x \\
 & \cancel{21x} - 30 \\
 & \cancel{-21x} + \frac{21}{2}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{r|l}
\rightarrow & 8x^3 + 26x^2 + 16x - 10 \\
\hline
x + \frac{1}{2} & 8x^4 + 30x^3 + 29x^2 - 2x - 30 \\
 & \cancel{8x^4} - 4x^3 \\
 & \cancel{26x^3} + 29x^2 \\
 & \cancel{-26x^3} - 13x^2 \\
 & \cancel{16x^2} - 2x \\
 & \cancel{-16x^2} - 8x \\
 & -\cancel{10x} - 30 \\
 & \cancel{10x} + 5
\end{array}
$$

$x + \frac{3}{2} \,|\, 8x^4 + 30x^3 + 29x^2 - 2x - 30$

$8(-1)^4 + 30(-1)^3 + 29(-1)^2 - 2(-1) - 30$

$8 - 30 + 29 + 2 - 30$ 39

$8(-2)^4 + 30(-2)^3 + 29(-2)^2 - 2(-2) - 30$

$128 - 240 + 116 + 4 - 30$

$128 - 120 - 30$ 22

$$
\begin{array}{r|l}
 & 8x^3 + 36x^2 + 56x + 40 \\
\hline
x - \frac{3}{4} & 8x^4 + 30x^3 + 29x^2 - 2x - 30
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{r|l}
\hline
x + \frac{3}{2} & 8x^3 + 36x^2 + 56x + 40
\end{array}
$$

$8x^2 + 16x + 16$

$x = \frac{3}{4}$ $\quad (x - \frac{3}{4}) = 0$

$16^2(1-2)$
$256 - 512$

$$\frac{-16 \pm \sqrt{16^2 - 4 \cdot 8 \cdot 16}}{2 \cdot 8}$$

$$-16 \pm \sqrt{16^2 - 32 \cdot 16}$$

$$\frac{-16 \pm \sqrt{256 - 512}}{16}$$

$$\frac{-16 \pm \sqrt{-256}}{16}$$

$$\frac{-16 \pm 16\sqrt{-1}}{16}$$

$$-1 \pm \sqrt{-1}$$

$$-1 + \sqrt{-1} \qquad -1 - \sqrt{-1}$$

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} \left(\left(\frac{i}{n}\right)^2 + 2\left(\frac{i}{n}\right) \right)$$

$$\sum \frac{\overset{n^2+n}{n(n+1)}(2n+1)}{6} + 2\sum \frac{\frac{n(n+1)}{2}}{n}$$

$$\sum \frac{2n^3 + \overset{n^2}{n^2} + 2n^2 + n}{6n^2} + 2\sum \frac{n^2+n}{2n} = \frac{\frac{n^2}{n^2} + \frac{n}{n^2}}{\frac{2n}{n^2}} = \frac{1 + \cancel{\frac{1}{n}}^{0}}{\cancel{\frac{2}{n}}_{0}} = \infty$$

$$\cancel{\sum \frac{1n}{3} + \frac{1}{2} + \cancel{\frac{1}{6n}}_{0} + 2\sum \frac{n}{2} + \frac{1}{2}}$$

$$\frac{\frac{2n^3}{n^3} + \frac{3n^3}{n^3} + \frac{n}{n^3}}{\frac{6n^2}{n^3}} = \frac{2 + \cancel{\frac{3}{n}}^{0} + \cancel{\frac{1}{n^2}}^{0}}{\cancel{\frac{6}{n}}^{0}} = \infty + \infty$$

$$\infty$$

$\frac{81}{4}$ 324 $\frac{27}{4}$ 108

Guia Examen Final Resolucion (En Sucio)

1- a) $Z = -4 + 0i$

$\sqrt[4]{Z} = \sqrt[4]{r}\left[e^{i\left(\frac{\theta + 2\pi k}{n}\right)}\right]$

$r = 4$

$\theta = 180° = \pi$ $k = 0$ $\rightarrow \sqrt[4]{4}\left[e^{i\left(\frac{\pi + 2\pi(0)}{4}\right)}\right]$

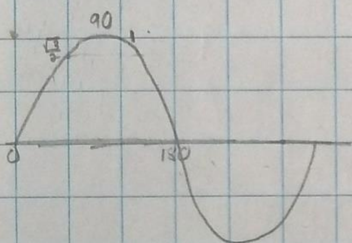
$\sqrt{2}\left[e^{i\left(\frac{\pi}{4}\right)}\right] = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\,\text{sen}\frac{\pi}{4}\right)$

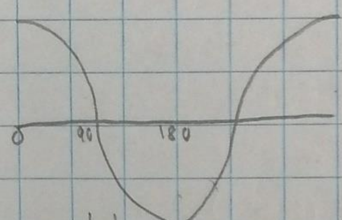
$\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

$1 + i$

0 30 45 60 90

$0 \quad \frac{1}{2} \quad \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \frac{\sqrt{3}}{2} \quad 1 \quad \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \frac{1}{2} \quad 0 \quad -\frac{1}{2} \quad -\frac{\sqrt{2}}{2} \quad -\frac{\sqrt{3}}{2} \quad -1$





$k = 1$

$4 - 4 - 35 + 36 - 9 = -8$ ~~$x = 1$~~

$4 - 4 + 35 + 36 - 9 = -10$ ~~$x = -1$~~

$324 - 108 - 315 + 108 - 9 = 0$ $x = 3$ ✓

$16 \quad 27 = \quad 3$

b) $256 \times 3 = 768$

$768 + 256 = 1024 = 2^{10}$ ∴

2- b

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1

$\frac{1}{x^{12}} - \frac{6\sqrt{2}}{x^{10}} + \frac{30}{x^8} - \frac{40\sqrt{2}}{x^6} + \frac{15\cdot 4}{x^4} - \frac{6\cdot 4\sqrt{2}}{x^2} + 8$

	4	8	-11	3
		3	$\frac{33}{4}$	$-\frac{33}{166}$
	4	11	$-\frac{11}{4}$	

	4	8	-11	3
3		12	60	
	4	20	49	

	4	8	-11	3
$\frac{1}{2}$		2	5	-3
48	4	10	-6	

$x^3 + 2x + 5$ $\qquad \pm 1 \quad \pm 5$

$$\begin{array}{r} x^2 \\ x+5 \,\big)\, \overline{x^3 + 2x + 5} \\ -x^3 \end{array}$$

$x^3 + 2x + 5 = 0$

$x^3 + 2x = -5$

$x(x^2 + 2) = -5$

$\cancel{1 \,\big)\, x^3 + 0x^2 + \dots}$

$$\begin{array}{c|cccc} \frac{\sqrt{7}}{2} & 1 & 0 & 2 & 5 \\ & & \frac{\sqrt{7}}{2} & \frac{7}{4} & \frac{15\sqrt{7}}{8} \\ \hline & 1 & \frac{\sqrt{7}}{2} & \frac{15}{4} & \end{array}$$

$A + B = 0$

$2B + C = 5$

$2A + 2C + D = 6$

$5A + 2D = 2$

$D = \dfrac{2 - 5A}{2}$

$A = -B$

$-B = \dfrac{C - 5}{2}$

$A = \dfrac{6 - 2C - D}{2}$

$\dfrac{C-5}{2} = \dfrac{6 - 2C - D}{2}$

$C - 5 = 6 - 2C - D$

$3C + D = 1 \qquad D = 1 - 3C$

$\dfrac{2 - 5A}{2} = 1 - 3C$

$2 - 5A = 2 - 6C$

$-5A + 6C = 0$

$\dfrac{9}{4} \qquad \dfrac{9}{1/4} \qquad \dfrac{1(9)}{1(1/4)} \qquad \dfrac{3(3)}{1/2\,(1/2)}$

$1, 9/4, 9, 1/4, 1/2, 9/2, 3, 3/4, 3/2, 3/2$

$1, 9/4, 9, 1/4, 1/2, 9/2, 3, 3/4, 3/2$

Formulario Parcial 1

- Cerradura de R: Sumar y multiplicar números reales da como resultado un número real
- Propiedad Conmutativa: $a, b \in R$ $\quad a+b = b+a$
  $ab = ba$
- Propiedad Asociativa: $a, b, c \in R$ $\quad (a+b)+c = a+(b+c)$
  $(ab)c = a(bc)$
- Propiedad Distributiva: $a, b, c \in R$ $\quad (a+b)c = ac + bc$

Elementos Neutros

$a + 0 = a = 0 + a \qquad 0 = a - a$

$a1 = a = 1a \qquad 1 = a/a$ con $a \neq 0$

Inverso de un Número

El inverso aditivo de a es $-a$

El inverso multiplicativo de a es $1/a$

Valor Absoluto

$|a|^2 = a^2$

$|a| = |b| \leftrightarrow a = b,\ a = -b$

$|a| < k \leftrightarrow -k < a < k$

$|a| > k \leftrightarrow a > k$ o bien $a < -k$

Regla de Signos

$ab > 0 \leftrightarrow \{a > 0 \cap b > 0\} \cup \{a < 0 \cap b < 0\}$

$ab < 0 \leftrightarrow \{a > 0 \cap b < 0\} \cup \{a < 0 \cap b > 0\}$

Algebra Superior - Araceli Reyes Guerrero

$(a^m)^n \quad a^{m \cdot n}$ $\quad a\sqrt{x} = \sqrt{x\,a^2}$

- $(a^2 b^3 - ab)(a^2 b^3 + ab)$

$a^4 b^6 - a^2 b^2$

- $\left(xy + \frac{1}{xy}\right)^2$

$x^2y^2 + 2 + \frac{1}{x^2y^2}$

$(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$
$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$
$(a-b)^3 =$

$x^3 - y^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$

! Productos Notables para formulario

No confundir
$(a-b)^2 = (a-b)(a-b)$
$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$

- $\left(e^{\text{sen}\theta} - \frac{1}{e^{\text{sen}\theta}}\right)^2$

$e^{2\,\text{sen}\theta} - 2 + \frac{1}{e^{2\,\text{sen}\theta}}$

- Factorizar $40\sqrt[3]{x^2} + \frac{8}{3}\sqrt[3]{x^5}$

$40\sqrt[3]{x^2} + \frac{8}{3}\sqrt[3]{x^5}$

$5 \cdot 8 \cdot \sqrt[3]{x^2} + 8 \cdot \frac{1}{3} \cdot x\sqrt[3]{x^2} \longrightarrow x^{3/3} = x \cdot x^{2/3}$

$8\sqrt[3]{x^2}\left(5 + \frac{1}{3}x\right)$

- Simplificar $(a-b)\sqrt{\frac{a+b}{a-b}}$

$(a-b)\sqrt{\frac{a+b}{a-b}}$

$\sqrt{(a-b)^{\cancel{2}} \cdot \frac{a+b}{\cancel{a-b}}} = \sqrt{(a-b)(a+b)} = \sqrt{a^2 - b^2}$

- $\log_2\left(\frac{x-3}{x+3}\right)^5$

$25 = 5^2$ $\cancel{\log_4} \, 4^x = 4^y$

$x = y$

- $\ln \sqrt{(5+3x)^3}$

Funciones Inversas

$\boxed{(f \circ f^{-1})(x) = x}$

$\rightarrow y = 3x + 6$ $\quad x = 2, \; y = 12$

$x = 3y + 6$

$x - 6 = 3y$

$\frac{x-6}{3} = y$ $\quad x = 12, \; y = 2$

$\cancel{3}\left(\frac{x - \cancel{6}}{\cancel{3}}\right) \cancel{+6}$

$y = e^x$ $\quad y = \ln x \rightarrow \ln e^x$

x

[redacted] $e^{x^2-4} = 1$ $\quad \ln x^2 - 4$

$\cancel{\ln}(e^{(x^2-4)}) = \ln 1$

$x^2 - 4 = 0$

- Resolver $\ln 2x = \ln 5$

$e^{\ln 2x} = e^{\ln 5}$ $\quad 2x = 5$

$2 \log x = \log 4$ $\quad x = 2$

$25^{x+2} = 5^{3x-4}$

- Resolver $5 + 3(4^{x-1}) = 12$

$(5^2)^{x+2} =$ $\quad 4^{x-1} = \frac{7}{3}$ $\quad x - 1 = \log_4 \frac{7}{3}$

$5^{2x+4} =$ $\quad \log_4 4^{x-1} = \log_4 \frac{7}{3}$ $\quad x = \log_4 \frac{7}{3} + 1$

Asesoría 06 / 11 / 2018

Fórmulas y Propiedades Relevantes

Exponentes y Logaritmos

- $a^m a^n = a^{m+n}$
- $\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$
- $a^m b^m = (ab)^m$
- $a^{mn} = (a^m)^n$
- $\left(\dfrac{a}{b}\right)^m = \dfrac{a^m}{b^m}$

Curiosidad

$1^m = 1$

$0^m = 0$ con $m > 0$

$a^0 = 1$ con $a \neq 1$

Introducir Cantidades a un Radical

- $a \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^n b}$
- $\dfrac{\sqrt[n]{b}}{a} = \sqrt[n]{\dfrac{b}{a^n}}$

Definición de Logaritmo

- $b^y = x \longrightarrow y = \log_b x$

Propiedades de Simplificación de Logaritmos

- $\log_b AB = \log_b A + \log_b B$
- $\log_b \dfrac{A}{B} = \log_b A - \log_b B$
- $\log_b A^P = P(\log_b A)$

Resolución de Ecuaciones Logarítmicas

- $e^{\ln x} = x$
- $\ln(e^x) = x$

$a^{\log_a x} = x$

$\log_a(a^x) = x$

Números Complejos

$Z \in \mathbb{C} = \{ Z = a + bi : a, b \in \mathbb{R}, \; i = \sqrt{-1} \}$

Dado $Z = a + bi$

Su conjugado es: $\overline{Z} = a - bi$

Operaciones de Números Complejos:

- $Z_1 + Z_2 \longrightarrow$ Álgebra
- $Z_1 \cdot Z_2 \longrightarrow i^2 = \sqrt{(-1)^2} = -1$
- $\dfrac{Z_1}{Z_2} \longrightarrow \dfrac{Z_1 \cdot \overline{Z_2}}{Z_2 \cdot \overline{Z_2}}$

Módulo de $Z = a + bi$:

- $r = |Z| = \sqrt{a^2 + b^2}$

Forma Polar de Z:

- $Z = a + bi = r(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)$

Forma Exponencial de Z:

- $Z = a + bi = re^{i\theta}$

Trigonometría (Lo básico para números complejos)

Ángulos Rectángulos:

Grados	Radianes	sin	cos	tan
0	0	0	1	0
30	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
45	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
60	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{\sqrt{3}}$
90	$\frac{\pi}{2}$	1	0	—
180	π	0	-1	0
270	$\frac{3\pi}{2}$	-1	0	—
360	2π	0	1	0

Conversión de Grados a Radianes:

- $\pi\left(\frac{x^{0}}{180}\right)=$ radianes

Exponentes y las n Raíces de un Número Complejo

Fórmula de De Moivre:

- $Z^{n}=r^{n}\left[\cos(n\theta)+i\,\text{sen}(n\theta)\right]$
- $Z^{n}=r^{n}e^{in\theta}$

La raíz n-ésima de Z:

- $\sqrt[n]{Z}=\sqrt[n]{r}\left[\cos\left(\frac{\theta+2\pi k}{n}\right)+i\,\text{sen}\left(\frac{\theta+2\pi k}{n}\right)\right]$
- $\sqrt[n]{Z}=\sqrt[n]{r}\cdot e^{i\left(\frac{\theta+2\pi k}{n}\right)}$

División de Números Complejos en Forma Polar

- $\frac{Z_1}{Z_2}=\frac{r_1}{r_2}\left[\cos(\theta_1-\theta_2)\cdot i\,\text{sen}(\theta_1-\theta_2)\right]$

Ejercicios:

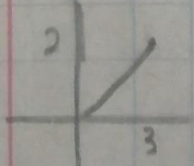
Resolver $\ln 3x=\ln 8$

Resolver $\ln 4x=\ln 5$

Resolver $2\ln 2x=\ln 16$

Resolver $5\ln x-2\ln 2x=\ln 8$

$Z=3+2i$



$r=\sqrt{4+9}$

$r=\sqrt{13}$

$\theta=\tan^{-1}\frac{2}{3}=0.588$

$Z=r(\cos\theta+i\,\text{sen}\,\theta)$

$\sqrt{13}(\cos .588+i\,\text{sen}\,.588$