Unidad 1: Álgebra

Aprendizajes Esperados:
- Progresiones aritméticas y progresiones geométricas
- Notación de Sumatoria y Aplicaciones

U2 - Estudio elemental de potencias y logaritmos
U2 - Propiedades de las potencias y logaritmos
U2 - Cambio de base

- Teorema del binomio: Desarrollo de $(a+b)^n$ $n \in N$
- Cálculo de los coeficientes del desarrollo de la potencia de un binomio usando el triángulo de Pascal y $\binom{n}{r}$

Capítulo 6: Patrones, progresiones y series

Progresiones Aritméticas

Ejercicio (p. 162): Yo decido comenzar a ahorrar dinero (numa que milagro) Ahorro $20 la primera semana, $25 la segunda, $30 la tercera y así sucesivamente

a) Copia y completa la tabla

Ya :v

Número de semana	Ahorro semanal	Total ahorrado
1	20	20
2	25	45
3	30	75
4	35	110
5	40	150
6	45	195
7	50	245
8	55	300

b) ¿Cuánto ahorraré en la 10ma semana? ¿Y en la 17ma?

$300 + 60 + 65 = \underline{425}$

No K rnal ahí muere :v

* Pista: ¿Cómo se puede obtener el enésimo término?

En una progresión aritmética: u_1 = Primer término

$u_2 = u_1 + d$ → d = diferencia

$u_3 = u_2 + d = (u_1 + d) + d = u_1 + 2d$

$u_4 = u_3 + d = (u_1 + 2d) + d = u_1 + 3d$

de modo que: $u_n = u_1 + (n-1)d$

* Pista: ¿Cómo se puede obtener la suma de los primeros n términos?
Usemos el ejemplo del a) para obtener la suma de los primeros 8 términos
Observemos que:

20
25
30
35
40] 75 | 75 | 75 | 75
45
50
55

Se obtiene la misma suma al juntar el término 1 y el último. Obteniendo el número 75 la mitad del número de términos usados

Por lo tanto: $\sum_{u_1}^{u_n} = \frac{(u_1+u_n)n}{2}$

b) ¿Entonces cuánto ahorraré en la semana 17? >:v

$u_{17} = 20 + (16\cdot 5) \to 100$ $\quad \sum_{u_1}^{u_{17}} = \frac{(20+100)17}{2} \to \underline{1020}$

c) ¿Cuánto ahorraré al cabo de un año?

$u_{52} = 20 + (51\cdot 5) \to 275$; $\sum_{u_1}^{u_{52}} = \frac{(20+275)52}{2} \to \underline{7670}$

d) ¿Cuánto tiempo me tomará ahorrar al menos $1000?

$1000 = \frac{\{20 + [20+(x-1)5]\}x}{2}$

$2000 = (40 + 5x - 5)x$

$\frac{2000}{35+5x} = x \to \frac{2000}{5(7+x)} = x \to 400 = 7x + x^2 \to 0 = x^2 + 7x - 400$

$\to x_1 = 16.8$

$\cancel{x_2 = -23.8}$

Al menos 17 semanas

e) Escribe una fórmula para el monto que ahorro cada semana. Sea M el monto que ahorro cada semana y n el número de semana

$M = 20 + (n-1)5$

f) Escribe una fórmula para el monto total de dinero ahorrado. Sea T el total ahorrado y n el número de semana

$T = \frac{(20+M)n}{2}$

Una progresión numérica es un patrón de números dispuestos en un orden particular de acuerdo con una regla.

Cada número o elemento de la progresión se denomina término
Para el ejemplo anterior, una fórmula recursiva de escribir la progresión es: $U_{n+1} = U_n + 5$

Ejemplo: Escriba una fórmula recursiva para el enésimo término de las progresiones:

a) 9, 15, 21, 27...

$u_1 = 9 \quad u_{n+1} = n + 6$

b) 2, 6, 18, 54...

$u_1 = 2 \quad u_{n+1} = 3u_n$

Escriba una fórmula general para el enésimo término de cada progresión:

a) 4, 8, 12, 16...

$4n$

b) $\frac{1}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{9}, \frac{1}{12} \ldots$

$\frac{1}{3n}$

Ejercicios 6A (p. 164):

1- Escriba los próximos 3 términos de cada progresión:

a) 3, 7, 11, 15 19 23 27

b) 1, 2, 4, 8 16 32 64

c) 3, 4, 6, 9, 13 18 24 31

d) 5, -10, 20, -40 80 -160 320

e) $\frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{5}{8}, \frac{7}{11} \quad \frac{9}{14} \quad \frac{11}{17} \quad \frac{13}{20}$

f) 6.0, 6.01, 6.012, 6.0123 6.01234, 6.012345, 6.0123456

- Pregunta tipo examen -

En una progresión aritmética $u_{10} = 37$ y $u_{21} = 4$

Halla la diferencia y el primer término

$$\left.\begin{aligned} 37 &= x + (9d) \quad & 37 - 9d &= x \\ 4 &= x + (20d) \quad & 4 - 20d &= x \end{aligned}\right\} 37 - 9d = 4 - 20d \rightarrow 33 = -11d$$

$$-3 = d$$

$$\therefore$$

$$\left.\begin{aligned} 37 + 27 &= x \\ 4 + 60 &= x \end{aligned}\right\} x = 64$$

Primer término: 64

Diferencia: -3

Progresiones Geométricas

En la progresión 2, 6, 18, 54... cada término se obtiene triplicando el anterior. Ésta es un ejemplo de progresión geométrica.

Cada término se obtiene multiplicando al anterior por un valor constante denominado razón o "r"

En una progresión geométrica: u_1 = Primer término

$$u_2 = u_1 \cdot r$$

$$u_3 = u_2 \cdot r = (u_1 \cdot r)\, r = u_1 \cdot r^2$$

$$u_4 = u_3 \cdot r = (u_1 \cdot r^2)\, r = u_1 \cdot r^3$$

de modo que: $u_n = u_1 \cdot r^{n-1}$

Ejemplo 6 (p. 168): Halle el 9no término de la serie 1, 4, 16, 64...

$r = 4$

$u_9 = 1 \cdot (4^8) = 65536$ $\underline{u_9 = 65536}$

Ejemplo 7 (p. 168): Halle el 12vo término de la serie 7, -14, 28, -56...

$r = -2$

$u_{12} = 7 \cdot (-2)^{11} = -14336$ $\underline{u_{12} = -14336}$

Ejemplo 8 (p. 168): En una progresión geométrica $u_1 = 864$ y $u_4 = 256$. Halle la razón

$256 = 864 \cdot r^3$ $\frac{256}{864} = r^3$ $\sqrt[3]{\frac{8}{27}} = r$ $\therefore r = \frac{2}{3}$

Ejemplo 9 (p. 169): Para la progresión geométrica 5, 15, 45... Halle el menor valor de n tal que el enésimo término resulte mayor que 50,000.

$u_n = 5 \cdot 3^{n-1}$ $50{,}000 = 5 \cdot 3^x$

$10{,}000 = 3^x$

$\ln 10{,}000 = x \ln 3$

$\frac{\ln 10{,}000}{\ln 3} = x$

$8.38 = x$

$9 = x = n - 1 \quad \therefore n = 10$

El menor término mayor a 50,000 es el décimo término

Ejercicios 6E (p. 169):

1- Una progresión geométrica tiene $u_2 = 50$ y $u_5 = 3.2$
Halle el primer término y la razón

$50 = u_1 \cdot r^1$
$3.2 = u_1 \cdot r^4$

$\frac{50}{r} = \frac{3.2}{r^4} \rightarrow \frac{50}{3.2} = \frac{r}{r^4}$ $15.625 = \frac{1}{r^3}$ $\frac{1}{15.625} = r^3$

$0.064 = r^3$

$\underline{0.4 = r}$

$\left.\begin{array}{l} 50 = u_1 \cdot 0.4 \\ 3.2 = u_1 \cdot 0.0256 \end{array}\right\} \underline{u_1 = 125}$

2- Una progresión geométrica tiene $u_3 = -18$ y $u_6 = 144$
Halle el primer término y la razón

$-18 = u_1 \cdot r^2$
$144 = u_1 \cdot r^5$

$\frac{-18}{r^2} = \frac{144}{r^5} \rightarrow \frac{-18}{144} = \frac{r^2}{r^5}$ $-8 = r^3 \therefore \underline{-2 = r}$

$\left.\begin{array}{l} -18 = u_1 \cdot 4 \\ 144 = u_1 \cdot (-32) \end{array}\right\} \underline{u_1 = -4.5}$

La Notación de Sumatoria (Σ) y las series

La suma de los términos de una progresión se llama serie

$u_1, u_2, u_3, u_4 \ldots u_n$ es una progresión

$u_1 + u_2 + u_3 + u_4 \ldots u_n$ es una serie

$\sum_{i=1}^{n} u_i$ significa la suma de los primeros n términos de una progresión. Se lee "la suma de todos los términos u_i, desde $i=1$ hasta $i=n$"

La progresión aritmética 8, 14, 20... tiene primer término 8 y diferencia 6. Una regla general para el enésimo término de esta progresión es $u_n = 6n+2$

La suma de los primeros 5 términos de esta progresión es:

$\sum_{n=1}^{5}(6n+2)$ Esto significa "la suma de todos los términos $6n+2$ desde $n=1$ hasta $n=5$

Por lo tanto, lo anterior es igual a: $8+14+20+26+32=100$

Ejemplo 10 (p. 170):

a) Escriba la expresión $\sum_{x=1}^{4}(x^2-3)$ como una suma de términos

$(1^2-3)+(2^2-3)+(3^2-3)+(4^2-3)$

b) Calcule la suma de estos términos

$-2+1+6+13=18$

Ejemplo 11 (p. 171): Evalúe la expresión $\sum_{n=3}^{8}(2^n)$

$2^3+2^4+2^5+2^6+2^7+2^8 = 8+16+32+64+128+256 = 504$

Ejemplo 12 (p. 171): Escriba la serie $3+15+75+375+1875+9375$ usando notación de sumatoria

$\sum_{n=1}^{6}(3\cdot 5^{n-1})$

Ejercicios 6F (p. 171):

3- Evalúe

a) $\sum_{n=1}^{9}(8n-5) = 3+11+19+27+35+43+51+59+67 = 315$

b) $\sum_{n=1}^{5}(3^n) = 3+9+27+81+243+729 = 1092$

c) $\sum_{n=1}^{7}(n^2) = 1+4+9+16+25+36+49 = 140$

d) $\sum_{n=4}^{10}(7n-4) = 24+31+38+45+52+59+66 = 315$

Series Aritméticas

Cuando una serie tiene pocos términos, sumarlos no es complicado. Sin embargo, si la serie tiene 50 o 100 términos se recurre a la fórmula ya explicada anteriormente que es la siguiente:

$$S_n = \frac{(u_1 + u_n)n}{2}$$

También se puede usar:

$$S_n = \frac{(2u_1 + (n-1)d)n}{2}$$

ya que se reemplazó "u_n" por $u_1 + (n-1)d$

Ejemplo 13 (p. 173): Calcule la suma de los 15 primeros términos de la serie 29, 21, 13...

$$S_n = \frac{(2 \cdot 29 + 14 \cdot (-8))15}{2}$$

$$\underline{S_n = -405}$$

Ejemplo 14 (p. 173):

a) Halle el número de términos de la serie 14 + 15.5 + 17 + 18.5 ... 50

$$u_n = u_1 + (n-1)d$$
$$50 = 14 + (n-1)1.5$$
$$36 = (n-1)1.5$$
$$24 = n-1$$
$$25 = n$$

<u>25 términos</u>

b) Halle la suma de los términos

$$S_n = \frac{(u_1 + u_n)n}{2}$$

$$S_n = \frac{(14 + 50)25}{2}$$

$$\underline{S_n = 800}$$

Ejercicios 6G (p. 173):

1- Halle la suma de los 12 primeros términos de la serie 3 + 6 + 9 ...

$$S_n = \frac{(u_1 + u_n)n}{2} \quad S_n = \frac{(2u_1 + (n-1)d)n}{2}$$

$$S_n = \frac{(2 \cdot 3 + 11 \cdot 3)12}{2} \rightarrow S_n = 234$$

2- Halle la suma de los 18 primeros términos de la serie 2.6 + 3 + 3.4 ...

$$S_n = \frac{(2u_1 + (n-1)d)n}{2}$$

$$S_n = \frac{(2 \cdot 2.6 + 17 \cdot 0.4)18}{2} \rightarrow S_n = 108$$

3- Halle la suma de los 27 primeros términos de la serie $100 + 94 + 88 \ldots$

$S_n = \frac{(2u_1 + (n-1)d)n}{2}$

$S_n = \frac{(2 \cdot 100 + 26 \cdot -6)27}{2}$ $\quad \underline{S_n = 594}$

4- Halle la suma de los 16 primeros términos de la serie $(2-5x), (3-4x), (4-3x)$

$d = 1+x$ $\quad S_n = \frac{(2u_1 + (n-1)d)n}{2}$

$S_n = \frac{(2 \cdot (2-5x) + 15(1+x))16}{2}$

$S_n = \frac{(4 - 10x + 15 + 15x)16}{2}$ $\quad S_n = (19+5x)8$ $\quad \underline{S_n = 152 + 40x}$

- Pregunta tipo examen -

5- Considere la serie $120 + 116 + 112 \ldots 28$

a) Halle el número de términos de la serie

$u_n = u_1 + (n-1)d$

$28 = 120 + (n-1)4$

$\frac{-92}{-4} = n-1 \rightarrow +23 = n-1 \therefore +22 = n$ $\quad$ <u>22 términos</u>

b) Halle la suma de los términos

$S_n = \frac{(u_n + u_1)n}{2}$ $\quad S_n = \frac{(120+28)22}{2}$ $\quad \therefore S_n = 1628$

6- Halle la suma de la serie $15 + 22 + 29 \ldots 176$

$176 = 15 + (n-1)7$ $\quad S_n = \frac{(2u_1 + (n-1)d)n}{2}$ $\quad S_n = \frac{(2 \cdot 15 + 23 \cdot 7)24}{2}$

$n = 24$

$\underline{S_n = 2292}$

Ejemplo 15 (p. 174):

a) Escriba una expresión para S_n la suma de los primeros n términos de la serie $64 + 60 + 56 \ldots$

$S_n = \frac{(128 + (n-1)-4)n}{2}$ $\quad S_n \frac{(128 - 4n + 4)n}{2}$ $\quad S_n = 66n - 2n^2$

b) A partir de lo anterior, halle el valor de n para el que $S_n = 0$

$0 = 66n - 2n^2$

$0 = n(66 - 2n)$

$0 = 66 - 2n$ $\qquad 0 = n$

$2n = 66$

$\underline{n = 33}$

Series Geométricas

Toma el concepto de series aritméticas y cámbiale en todas las partes que diga "aritmética" por "geométrica" y listo xd

Sumando los términos de una progresión geométrica obtenemos la siguiente igualdad. Vamo a divertirnos... XD

$S_n = u_1 + u_1 r + u_1 r^2 + u_1 r^3 \dots u_1 r^{n-1}$

Multiplicamos ambos lados por r

$r S_n = u_1 r + u_1 r^2 + u_1 r^3 + u_1 r^4 \dots u_1 r^n$

Restamos la primera igualdad de la segunda

$r S_n - S_n = -u_1 + u_1 r^n = u_1 r^n - u_1$

Factorizamos ambos miembros de la igualdad

$S_n (r-1) = u_1 (r^n - 1)$

Y obtenemos esto

$$S_n = \frac{u_1 (r^n - 1)}{r-1} \quad \text{ó} \quad S_n = \frac{u_1 (1 - r^n)}{1 - r}$$

Cuando $r > 1$ es más conveniente usar la primera fórmula para evitar trabajar con un denominador negativo

Ejemplo 16 (p. 175): Calcule la suma de los 12 primeros términos de la serie $1 + 3 + 9 \dots$ $S_n = \frac{1(3^{12} - 1)}{2} \rightarrow \underline{S_n = 265720}$

Ejemplo 17 (p. 176):

a) Halle el número de términos de la serie $8192 + 6144 + 4608 + \dots 1458$

$u_n = u_1 \cdot r^{n-1}$ $\quad 1458 = 8192 \cdot .75^{n-1}$ $\quad 6 = n - 1$ $\therefore$ $\underline{7 = n}$

b) Calcule la suma de los términos

$S_n = \frac{u_1 (r^n - 1)}{r - 1}$ $\quad S_n = \frac{8192(1 - .75^7)}{.25} \rightarrow S_n = 28394$

Ejercicios 6 I (p. 176):

1- Calcule el valor S_{12} para cada serie geométrica

a) $0.5 + 1.5 + 4.5 \dots$

$S_n = \frac{0.5(3^{12} - 1)}{3 - 1}$ $\quad \underline{S_n = 132860}$

b) $0.3 + 0.6 + 1.2 \dots$

$S_n = \frac{0.3(2^{12} - 1)}{2 - 1}$ $\quad \underline{S_n = 1228.5}$

c) $64 - 32 + 16 - 8 \dots$

$S_n = \frac{64(1 + 0.5^{12})}{1 + 0.5}$ $\quad S_n = 42.677$

d) $(x+1) + (2x+2) + (4x+4)$

$$S_n = \frac{(x+1)[(x+1)^{12} - 1]}{x}$$

$$S_n = \frac{(x+1)^{13} - (x+1)}{x}$$

2.- Calcule el valor de S_{20} para cada serie

a) $0.25 + 0.75 + 2.25 \ldots$

$$S_n = \frac{0.25(3^{20}-1)}{3-1} \qquad S_n = 435848050$$

b) $\frac{16}{9} + \frac{8}{3} + 4 \ldots$

$$S_n = \frac{\frac{16}{9}\left[\left(\frac{3}{2}\right)^{20}-1\right]}{\frac{3}{2}-1} \qquad S_n = 11819.57948$$

c) $3 - 6 + 12 - 24 \ldots$

$$S_n = \frac{3(1-(-2)^{20})}{1-(-2)} \qquad S_n = -1048575$$

d) $\log a + \log(a^2) + \log(a^4) + \log(a^8) \ldots$

$$S_n = \frac{\log a(2^{20}-1)}{2-1} \qquad S_n = \log(a^{1048575})$$

– Pregunta tipo examen –

3.- Para cada serie geométrica
i) Halle el número de términos
ii) Calcule la suma

a) $1024 + 1536 + 2304 \ldots 26244$

i) $26244 = 1024 \cdot 1.5^{n-1} \qquad n-1 = 8 \therefore \quad$ i) $n = 9$

ii) $S_n = \frac{1024(1.5^9-1)}{1.5-1} \qquad$ ii) $S_n = 76684$

b) $2.7 + 10.8 + 43.2 \ldots 2764.8$

i) $2764.8 = 2.7 \cdot 4^{n-1} \qquad n-1 = 5 \therefore \quad$ i) $n = 6$

ii) $S_n = \frac{2.7(4^6-1)}{4-1} \qquad$ ii) $S_n = 3685.5$

c) $\frac{125}{128} + \frac{25}{64} + \frac{5}{32} + \ldots \frac{1}{625}$

i) $\frac{1}{625} = \frac{125}{128} \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^{n-1} \qquad n-1 = 7 \therefore \quad$ i) $n = 8$

ii) $S_n = \frac{\frac{125}{128} \cdot \left[\left(\frac{2}{5}\right)^8 - 1\right]}{\frac{2}{5}-1} \qquad$ ii) $S_n = 1.62654$

d) $590.49 + 196.83 + 65.61 \ldots 0.01$

i) $0.01 = 590.49 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \qquad n-1 = 10 \therefore \quad$ i) $n = 11$

ii) $S_n = \frac{590.49\left[1-\left(\frac{1}{3}\right)^{11}\right]}{1-\frac{1}{3}} \qquad$ ii) $S_n = 885.73$

Series Convergentes y Sumas de Infinitos Términos

Para las siguientes tres series geométricas hallar la razón, S_{10}, S_{15} y S_{20}

a) $2+1+0.5\ldots$ $r=0.5$ $S_{10}=3.996$ $S_{15}=3.9998$ $S_{20}=3.99999$

b) $75+30+12\ldots$ $r=0.4$ $S_{10}=124.9869$ $S_{15}\approx 124.99987$ $S_{20}=124.999998$

c) $240+60+15-3.75\ldots$ $r=0.25$ $S_{10}=191.99981$ $S_{15}=192.0000021$ $S_{20}\approx 192$

Ke sta pazando aki duktor garsia

Como hemos notado, los valores S_{10}, S_{15} y S_{20} son muy próximos. Esto se debe a que cuando una serie geométrica tiene una razón tal que $|r|<1$, la diferencia de cada término decrece a medida que n aumenta. Estas series geométricas reciben el nombre de series convergentes

En el a) ¿$S_{50}=4$? No, es 3.999999999

Si $|r|<1$ a medida que $n\to\infty$, $r^n=0$ por lo tanto la expresión sería igual a:

$$S_n \to \frac{u_1(1-0)}{1-r} = \frac{u_1}{1-r}$$

Se puede escribir así

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{u_1(1-r^n)}{1-r}\right)=\frac{u_1}{1-r} \quad \text{ó} \quad S_\infty=\frac{u_1}{1-r}$$

Esto significa que a medida que n se acerque al infinito, el valor se aproxima a $\frac{u_1}{1-r}$. Escribimos esto como S_∞ y la llamamos suma de infinitos términos. Para una serie geométrica con $|r|<1$, $S_\infty=\frac{u_1}{1-r}$

Ejemplo 20 (p. 179): Para la serie $18+6+2\ldots$ halle S_{10}, S_{15}, S_∞

$r=\frac{1}{3}$ $\quad S_n=\frac{u_1(1-r^n)}{1-r}$

$$S_{10}=\frac{18(1-(\frac{1}{3})^{10})}{1-\frac{1}{3}} \qquad S_{10}=26.9995$$

$$S_{15}=\frac{18[1-(\frac{1}{3})^{15}]}{1-\frac{1}{3}} \qquad S_{15}\approx 26.999$$

$$S_\infty=\frac{18}{1-\frac{1}{3}} \qquad S_\infty=27$$

BOSS BATTLE

Ejemplo 21 (p. 180): La suma de los primeros 3 términos de una serie geométrica es 148, la suma de infinitos términos es 256. Halle el primer término y la razón de la serie

$$148=\frac{u_1(1-r^3)}{1-r} \qquad \frac{148(1-r)}{(1-r^3)}=u_1$$

$$256=\frac{u_1}{1-r} \qquad 256(1-r)=u_1$$

$$\frac{148(1-r)}{(1-r^3)}=256(1-r)$$

$$148=256-256r^3$$

$$\frac{148-256}{-256}=r^3 \qquad 0.75=r$$

$148 = u_1 \frac{(1 - 0.75^3)}{1 - 0.75}$ $\therefore$ $\underline{u_1 = 64}$

Ejercicios 6K (p. 180):

1- Explique cómo sabe si una serie geométrica será una serie convergente

Deduciendo si la razón es menor que 1, mayor que -1 y diferente de 0. Esto hará que las diferencias de u_n y u_{n-1} sean cada vez menores

2- Halle S_4, S_7 y S_∞ para cada una de estas series

a) $144 + 48 + 16$

$r = \frac{1}{3}$ $S_4 = \frac{144(1-(\frac{1}{3})^4)}{1-\frac{1}{3}}$ $S_4 = 213.333$ $S_7 = 215.901$ $S_\infty = 216$

b) $500 + 400 + 320$

$r = 0.8$ $S_4 = \frac{500(1-(0.8)^4)}{1-0.8}$ $S_4 = 1476$ $S_7 = 1975.712$ $S_\infty = 2500$

c) $80 + 8 + 0.8$

$r = 0.1$ $S_4 = \frac{80(1-(0.1)^4)}{1-0.1}$ $S_4 = 88.88$ $S_7 = 88.88888$ $S_\infty = 88.8889$

d) $\frac{9}{2} + 3 + 2$

$r = \frac{2}{3}$ $S_4 = \frac{\frac{9}{2}\left[1-\left(\frac{2}{3}\right)^4\right]}{1-\frac{2}{3}}$ $S_4 = 10.8333$ $S_7 = 12.7099$ $S_\infty = 13.5$

3- Una serie geométrica tiene $S_\infty = 27/2$ y $S_3 = 13$. Halle S_5

$S_\infty = \frac{u_1}{1-r}$ $\quad \frac{27}{2}(1-r) = u_1$

$13 = \frac{u_1(1-r^3)}{1-r}$ $\quad \frac{13(1-r)}{1-r^3} = u_1$ $\Big\}$ $\frac{13(1-r)}{1-r^3} = \frac{27}{2} \cdot (1-r) \rightarrow 13 = \frac{27}{2} - \frac{27}{2} r^3$

$r = \frac{1}{3}$ $\therefore$ $u_1 = 9$

$S_5 = \frac{9(1-\frac{1}{3}^5)}{1-\frac{1}{3}}$ $\therefore$ $\underline{S_5 \approx 13.444}$

Aplicaciones de patrones aritméticos y geométricos

En muchas situaciones de la vida cotidiana hay ejemplos de patrones geométricos, tales como el interés compuesto y el crecimiento demográfico

Si un men deposita \$1000 en una caja de ahorros que paga intereses del 4% anual y no hace extracciones ni depósitos ¿cuánto tendrá la cuenta en 10 años?

Fácil $1000 \cdot (1.04)^{10} = 1480.24$ ¿no? No :v v:< Si >:v

¿Qué pasa si se capitaliza el interés más de una vez al año?

Ke wena pregunta, Doroti

Usamos la siguiente fórmula:

$$M = c\left(1 + \frac{i}{n}\right)^{nt}$$

Sea: M = El monto de dinero en la cuenta

i = la tasa de interés (escrito en decimal, un %)

n = el número de veces al año que se capitaliza

t = el número de años

c = el capital inicial

Ejemplo 22 (p. 182): Un men deposita \$1000 en una cuenta que paga un interés del 4% TNA (TNA = Tasa Nominal Anual). Suponiendo que este men no realice extracciones o depósitos ¿cuánto dinero habrá en la cuenta después de 10 años?

$$M = 1000\left(1+\frac{.04}{4}\right)^{40} = \quad M = 1488.864$$

Ejemplo 23 (p. 182): La población de un pueblo pequeño crece un 2% por año. Si la población al inicio de 1980 eran 12,500 mens ¿cuál es la población esperada en el inicio de 2020?

$$T = 12500\cdot(1.02)^{40} \therefore \quad T = 27600 \text{ mens}$$

Ejercicios 6L (p. 182):

1- En una progresión aritmética $u_6 = 3u_4$
Halle u_1 si $u_8 = 50$

$u_n = u_1 + (n-1)d$

$u_8 = u_7 + d \rightarrow u_7 = u_6 + d$

$u_8 = u_6 + 2d$ también $u_8 = 3u_4 + 2d$

$50 = u_6 + 2d$ $\qquad 50 = 3u_4 + 2d$

$u_6 = u_1 + 5d$

$50 = u_1 + 7d$ $\qquad 50 = 3\cdot(u_1+3d)+2d \rightarrow 50 = 3u_1 + 11d$

$50 - 7d = u_1$ $\qquad \frac{50-11d}{3} = u_1$

$50 - 7d = \frac{50-11d}{3}$

$150 - 21d = 50 - 11d$

$100 = 10d$

$10 = d$

$50 - 70 = u_1$

$u_1 = -20$

$u_4 = 10$

$u_6 = 30$

$u_8 = 50$

2- Un vaso de plástico tiene 12cm de alto. Cuando se apilan 5 vasos, la pila alcanza 15 cm

a) ¿Qué altura alcanzarán 20 vasos apilados?

$u_0 = 12$ $\qquad$ Realmente u_0 es u_1 xd

recíprocamente esto es $\rightarrow u_1 = 12 + d$

$u_5 = 12 + 5d \rightarrow 15 = 12 + 5d \qquad d = 0.6$

$u_{19} = 12 + 19d$

$u_{19} = 23.4$

b) ¿Cuántos vasos hay que apilar para que la altura sea al menos 1m?

$100 = 12 + x\,0.6$

$x = 146.666$ $\qquad$ Deben apilarse 147

-¡¡¡EL TRIANGULO DE PASCAL Y DESARROLLO DEL BINOMIO!!!-

Wenas Krnal, le vengo manejando poesía matemática, un triángulo bien shidori con proporciones exactas que ya seguramente lo ha dejado con cara de "Ah numa" gracias al Blaise Pascal (gracias, men)
Contempla esta belleza:

$$
\begin{array}{ccccccccccccccc}
 & & & & & & & 1 & & & & & & & \\
 & & & & & & 1 & & 1 & & & & & & \\
 & & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & & \\
 & 1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1 & \\
1 & & 7 & & 21 & & 35 & & 35 & & 21 & & 7 & & 1
\end{array}
$$

Ya Krnal ya me cansé >:v ¿Quieres más filitas? Calcúlalas >:v
En fin ya sabes como se usa y todo :v Saltemonos a lo bueno
La hermosísima combinatoria, el conteo, una de las pesadillas del hombre. Es sencillo contar los botones de un control de Xbox pero apuesto a que se volverá cada vez más difícil de contar la siguiente lista: Las teclas de un teclado, todos los equipos de soccer, todos los triples que Stephen Curry ha metido, las veces que LeBron ha perdido una final, la cantidad de libros en el mundo, la cantidad de autos en el mundo y seguro las veces que intentaste llegar a su corazón y no pudiste :'v
Pero eso es otra cosa, como sé lo mucho que te emociona el tema sólo repasemos

$$\binom{n}{r} = {}_nC_r$$

$${}_nC_r \neq {}_nP_r$$

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

$n! =$ No T wa a desir porke ia savez >:v

Momento de divertirse

Ejemplo 24 (p. 185): ¿Cuanto es $\binom{7}{5}$?

$$\frac{7!}{5!(2!)} = \frac{7\cdot 6}{2} = 7\cdot 3 = 21$$

Ejercicios 6M (p. 185): Halle cada valor con la fórmula

1- $\binom{5}{3}$ $\frac{5!}{3!(2!)} = \frac{5\cdot 4}{2} = 5\cdot 2 = 10$

2- $\binom{8}{2}$ $\frac{8!}{2!(6!)} = \frac{8\cdot 7}{2} = 4\cdot 7 = 28$

3- ${}_7C_3$ $\frac{7!}{3!(4!)} = \frac{7\cdot 6\cdot 5}{3\cdot 2} = 7\cdot 5 = 35$

4- $9C6 = \frac{9!}{6!(3!)} = \frac{9\cdot8\cdot7}{3\cdot2} = 3\cdot4\cdot7 = 84$

5- $\binom{6}{4} = \frac{6!}{4!(2!)} = \frac{6\cdot5}{2} = 15$

6- $\binom{10}{3} = \frac{10!}{3!(7!)} = 120$

JA ¿Eso es todo?

¿Quieres más? Va

Patrones de Polinomios (p. 185):

Desarrolle

1- $(a+b)^1 = a+b$

2- $(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$

3- $(a+b)^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$

4- $(a+b)^4 = a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4$

5- $(a+b)^5 = a^5+5a^4b+10a^3b^2+10a^2b^3+5ab^4+b^5$

6- $(a+b)^6 = a^6+6a^5b+15a^4b^2+20a^3b^3+15a^2b^4+6ab^5+a^6$

Ah ¿así que conoces el desarollo binomial? Of course

Ratos, bueno esta sí que no te la sabes:

Ejemplo 25 (p. 187): Utilice el teorema del binomio para desarrollar $(x+3)^5$. Escriba el answer en la forma más sencilla

$$(x+3)^5 = \binom{5}{0}x^5 3^0 + \binom{5}{1}x^4 3^1 + \binom{5}{2}x^3 3^2 + \binom{5}{3}x^2 3^3 + \binom{5}{4}x 3^4 + \binom{5}{5}x^0 3^5$$

$$= 1x^5 1 + 5x^4 3 + 10x^3 9 + 10x^2 27 + 5x81 + 1\cdot1\cdot243$$

$$= x^5 + 15x^4 + 90x^3 + 270x^2 + 405x + 243$$

Ejemplo 27 (p. 187): Halle el término en x^3 en el desarollo de $(4x-1)^9$

Observamos que para $x^9 \rightarrow \binom{9}{0}$ Para $x^8 \rightarrow \binom{9}{1}$

Por lo que para x^3 $\binom{9}{6}$ $\therefore \binom{9}{6}(4x)^3 1^6 \rightarrow 84\cdot64x^3 \rightarrow \underline{5376x^3}$ positivo

Ejemplo 28 (p. 188): En $(2x+1)^n$ el coeficiente de x^3 es 80. Halle n

$$\binom{n}{n-3}\cdot(2x)^3\cdot1^{n-3} \rightarrow \frac{n!}{(n-3)!(n-(n-3))!}\cdot8x^3 = 80x^3$$

$$\frac{n!}{(n-3)!(3)!} = 10$$

$$\frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)}{3\cdot2} = 10$$

$$n\cdot(n-1)\cdot(n-2) = 60$$

$$(n^2-n)(n-2) = 60$$

$$n^3-2n^2-n^2+2n = 60$$

$$n^3-3n^2+2n = 60$$

$$\underline{n = 5}$$

Unidad 2: Funciones y Ecuaciones

Aprendizajes Esperados:

- Concepto de función $f: x \to f(x)$
- Dominio, recorrido, imagen (valor) (No se requiere: Restricción del Dominio)
- Composición de funciones
- Función identidad. Función inversa f^{-1}

- Gráfico de una función, su ecuación $y = f(x)$
- Habilidades de representación gráfica de funciones
- Indagación de máximos y mínimos, puntos de corte con los ejes, asíntotas horizontales y verticales, simetrías y consideración de dominio y recorrido
- Uso de la tecnología para obtener el gráfico de una diversidad de funciones
- Gráfico de $y = f^{-1}(x)$ como simétrico respecto a la recta $y = x$ del gráfico de $y = f(x)$

- Transformaciones de Gráficos
- Traslaciones: $y = f(x) + b$ $y = f(x-a)$
- Simetrías (respecto a los dos ejes): $y = -f(x)$ $y = f(-x)$
- Estiramiento vertical de razón p: $y = pf(x)$
- Estiramiento en la dirección del eje x de razón $\frac{1}{q}$: $y = f(qx)$
- Transformaciones compuestas

- La función cuadrática $x \to ax^2 + bx + c$, su gráfico, su intersección con el eje y, $(0, c)$. Eje de simetría
- La forma $x \to a(x-p)(x-q)$, intersecciones con el eje x $(p, 0)$ y $(q, 0)$
- La forma $x \to a(x-h)^2 + k$, vértice (h, k)

- La función recíproco $x \to \frac{1}{x}$, $x \neq 0$; su gráfico y la propiedad de coincidir con su inversa
- La función racional $\frac{ax+b}{cx+d}$ y su gráfico
- Asíntotas horizontales y verticales

- Funciones exponenciales y sus gráficos: $x \to a^x$, $a > 0$, $x \to e^x$
- Funciones logarítmicas y sus gráficos: $x \to \log_a x$, $x > 0$ $x \to \ln x$, $x > 0$
- Relaciones entre las funciones: $a^x = e^{x \ln a}$; $\log_a a^x = x$; $a^{\log_a x} = x$, $x > 0$

- Resolución de ecuaciones, tanto de forma analítica como gráfica
- Uso de la tecnología para resolver una diversidad de ecuaciones, incluidas aquellas para las que no existe un enfoque analítico adecuado
- Resolución de $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$
- La fórmula de la solución de una ecuación cuadrática
- El discriminante $\Delta = b^2 - 4ac$ y la naturaleza de las raíces, es decir,

dos raíces reales distintas, dos raíces reales iguales o ninguna raíz real
- Resolución de ecuaciones exponenciales

- Aplicaciones de las habilidades referidas a la representación gráfica de funciones y resolución de ecuaciones relacionadas con situaciones de la vida real

Capítulo 1: Funciones

Introducción a las funciones

Una función es una relación matemática que asocia a cada elemento del dominio de la función exactamente un elemento del recorrido de la función.
Para que una relación sea una función no puede haber dos pares ordenados que tengan la misma primera componente
Dominio → Valores de x Rango o recorrido → Valores de y
Un intervalo cerrado • indica que el valor está incluido en la función y se representa con corchetes [,]
Un intervalo abierto o indica que el valor no está incluido en la función y se representa con paréntesis (,)
Una asíntota es una recta a la que el gráfico se acerca pero no corta

Funciones Compuestas

Una función compuesta es la combinación de dos funciones
$f(g(x))$ o $(f\circ g)(x)$ se lee "f de g de x" o "g compuesta con f de x"
Aplica una función al resultado de otra y se define como ya se escribió

Ejemplo 8 (p.15): Si $f(x) = 5-3x$ y $g(x) = x^2+4$ halle $(f\circ g)(x)$

$(f\circ g)(x) = 5-3(x^2+4)$
$f(g(x)) = 5-3x^2-12$
$f(g(x)) = -3x^2-7$

Ejemplo 10 (p.15): Dadas $f(x) = 2x+1$ y $g(x) = x^2-2$ halle:

a) $(f\circ g)(x) = 2(x^2-2)+1$
$2x^2-4+1$ $(f\circ g)(x) = 2x^2-3$

b) $(f\circ g)(4) = 29$

Ejercicios 1F (p.15): Dadas $f(x) = 3x$, $g(x) = x+1$ y $h(x) = x^2+2$ halle:

a) $(f\circ g)(3) = 3(3+1) = 12$
b) $(f\circ g)(0) = 3(0+1) = 3$
c) $(f\circ g)(-6) = 3(-6+1) = -15$
d) $(f\circ g)(x) = 3(x+1) = 3x+3$
e) $(g\circ f)(4) = 3(4)+1 = 13$
f) $(g\circ f)(5) = 3(5)+1 = 16$
g) $(g\circ f)(-6) = 3(-6)+1 = -17$
h) $(g\circ f)(x) = 3x+1$
i) $(f\circ h)(2) = 3(4+2) = 18$
j) $(h\circ f)(2) = (3\cdot 2)^2+2 = 38$
k) $(f\circ h)(x) = 3(x^2+2) = 3x^2+6$
l) $(h\circ f)(x) = (3x)^2+2 = 9x^2+2$
m) $(g\circ h)(3) = (9+2)+1 = 12$
n) $(h\circ g)(3) = (3+1)^2+2 = 18$
o) $(g\circ h)(x) = (x^2+2)+1 = x^2+3$
p) $(h\circ g)(x) = (x+1)^2+2 = x^2+2x+3$

- Pregunta tipo examen -

5- $g(x) = x^2+3$ y $h(x) = x-4$

a) Halle $(g\circ h)(x) \rightarrow (x-4)^2+3 = x^2-8x+19$

b) Halle $(h\circ g)(x) \rightarrow (x^2+3)-4 = x^2-1$

c) Resuelva la ecuación $(g\circ h)(x) = (h\circ g)(x)$

$x^2-8x+19 = x^2-1$

$20 = 8x \therefore \frac{5}{2} = x$

Funciones Inversas

La inversa de $f(x)$, $f^{-1}(x)$. Revierte la acción de esa función

Si $f(x) = 3x-4$ y $g(x) = \frac{x+4}{3}$ entonces $g(x)$ es la inversa de $f(x)$

¿Ah no me crees? >:v Watcha esto

$f(10) = 3(10)-4 = 26$ y $g(26) = \frac{26+4}{3} = 10$

No todas las funciones tienen inversa

La prueba de la recta vertical sirve para saber un gráfico es una función

La prueba de la recta horizontal sirve para saber si una función tiene inversa

Si una recta horizontal corta más de una vez al gráfico de una función, no tiene inversa

Ejercicios 1H (p.20):

2- Halle la inversa de las siguientes funciones

a) $f(x) = 3x-1 \rightarrow f^{-1}(x) = \frac{x+1}{3}$

b) $g(x) = x^3-2 \rightarrow f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x+2}$

c) $h(x) = \frac{1}{4}x+5 \rightarrow 4(x-5)$

d) $f(x) = \sqrt[3]{x}-3 \rightarrow (x+3)^3$

e) $g(x) = \frac{1}{x}-2 \rightarrow y+2 = \frac{1}{x} \rightarrow x(y+2) = 1 \rightarrow \frac{1}{x+2}$

f) $h(x) = 2x^3+3 \rightarrow \sqrt[3]{\frac{x-3}{2}}$

g) $f(x) = \frac{x}{3+x}$, $x \neq -3$ $3y+yx = x \rightarrow 3y = x-xy \rightarrow \frac{3y}{1-y} = x \therefore f^{-1}(x) = \frac{3x}{1-x}$

h) $g(x) = \frac{2x}{5-x}$, $x \neq 5$ $5y-xy = 2x \rightarrow 5y = 2x+xy \rightarrow \frac{5y}{2+y} = x \therefore f^{-1}(x) = \frac{5x}{2+x}$

3- Halle $f^{-1}(x)$ si...

a) $f(x) = 1-x$ $f^{-1}(x) = 1-x$

b) $f(x) = x$ $f^{-1}(x) = x$

c) $f(x) = \frac{1}{x}$ $f^{-1}(x) = \frac{1}{x}$

Me han trolleado >:V

$y=\frac{10}{x+7}$ $xy+7y=10$ $7y-10=-xy$ $-\frac{7y-10}{y}=x$

$-3x-2=-4xy$ $\frac{-3x-2}{-4x}=y$ $\frac{3x+2}{4x}$

4- Evalue $f^{-1}(5)$ en:

a) $f(x)=6-x$ $f^{-1}(x)=6-x$ $\therefore f^{-1}(5)=1$

b) $f(x)=\frac{10}{x+7}$ $f^{-1}(x)=\frac{-7x+10}{x}$ $\therefore f^{-1}(5)=-5$

c) $f(x)=\frac{2}{4x-3}$ $f^{-1}(x)=\frac{3x+2}{4x}$ $\therefore f^{-1}(5)=\frac{17}{20}$

$4xy-3y=2$

Va, ahora hazlo de un modo distinto

a) $5=6-x \rightarrow x=6-5$ $\therefore x=1$

b) $5=\frac{10}{x+7} \rightarrow 5x+35=10 \rightarrow x=\frac{-25}{5}$ $\therefore x=-5$

c) $5=\frac{2}{4x-3} \rightarrow 20x-15=2 \rightarrow x=\frac{17}{20}$

Transformacion de funciones

ATENCION: Debe usar la graficadora para dibujar los gráficos aquí

Okno me la creí :'v

Traslaciones

- Desplazamiento vertical
  - → $f(x)+k$ desplaza a $f(x)$ verticalmente hacia arriba una distancia de k unidades
  - → $f(x)-k$ hace lo mismo pero para abajo :v
- Desplazamiento horizontal
  - → $f(x+k)$ hace lo mismo pero a la izquierda :v
  - → $f(x-k)$ hace lo mismo pero a la derecha :v

Las traslaciones se representan de la forma $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$, a es la comp. horizontal, b es la comp. vertical

Simetrías

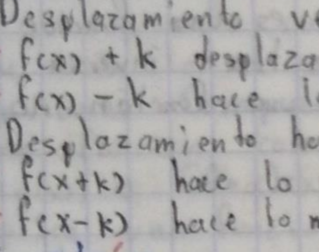
- Simetría respecto al eje "x" e "y"
  - → $-f(x)$ es la simetría de $f(x)$ respecto del eje x
  - → $f(-x)$ es la simetría de $f(x)$ respecto al eje y

Estiramientos

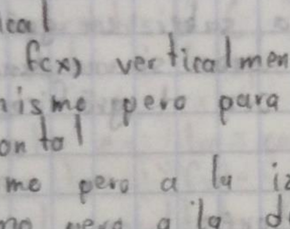
- Estiramiento (o compresión) horizontal o vertical
  - → $f(qx)$ se estira o comprime horizontalmente a $f(x)$ con una razón de $1/q$
  - → $pf(x)$ lo hace verticalmente a $f(x)$ con una razón de p

Ejemplo 14 (p.23): Dado el gráfico $f(x)$ a continuación, dibujar

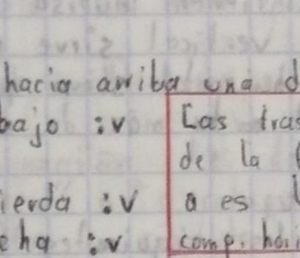
a) $f(x+1)$

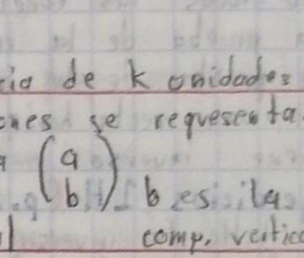


c) $f(-x)$

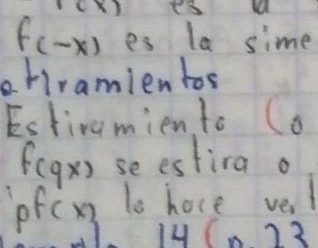


e) $2f(x)$

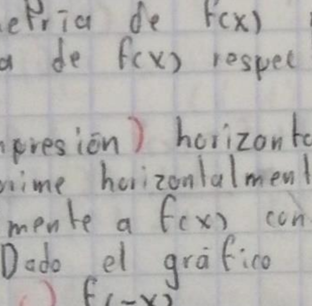




b) $f(x)-2$



d) $-f(x)$



Ejercicios 1I (p. 24)

1- Copie el gráfico. Dibuje estas funciones en el mismo sistema de ejes cartesianos

a) $f(x)+4$ ↑

b) $f(x)-2$ ↓

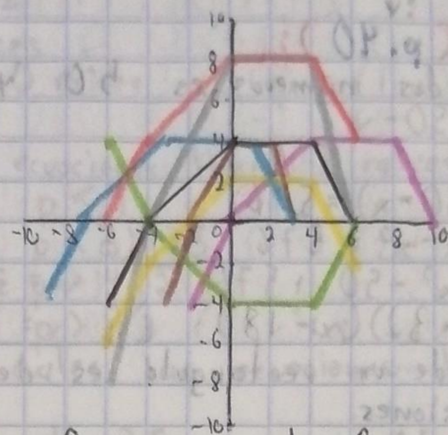
c) $-f(x)$

d) $f(x+3)$ ←

e) $f(x-4)$ →

f) $2f(x)$

g) $f(2x)$



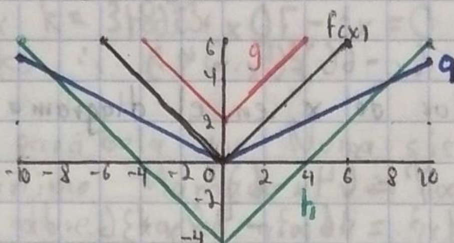
2- Las funciones g, h y q son transformaciones de $f(x)$. Escriba cada transformación en función de $f(x)$

$f(x)$

$g = f(x)+2$

$h = f(x)-4$

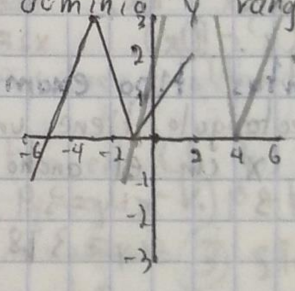
$q = \frac{f(x)}{2}$



4- Dibuje cada una de estas funciones e indique el dominio y rango

a) $2f(x-5)$

b) $-f(2x)+3$ Pendiente



Extra:

Explica lógicamente como diferenciar una traslación vertical de una horizontal

Se diferencian por $f(x+k)$ y $f(x)+k$. Imagina si $y=f(x)$ pero después $y=f(x)+k$ esa k afectará y aumentará "y" por lo que se moverá verticalmente, ahora la otra pos a donde queda :v horizontalmente

Lo mismo pero con simetrías :v

Su diferencia es $f(-x)$ y $-f(x)$. Imagina si $y=f(x)$ pero si $y=-f(x)$ los resultados serán negativos y la simetría será horizontal, la otra pos vertical

Lo mismo pero con estiramientos :v

Su diferencia es $f(px)$ y $p\,f(x)$. Imagina si $y=f(x)$ pero si $y=p\,f(x)$ doblará el valor de $f(x)$ p veces alargándola verticalmente y la otra será horizontal de modo $1/p$ veces

Capítulo 2: Funciones y ecuaciones cuadráticas

Ya sabes lo que es una ecuación cuadrática, factorizar y la fórmula general :v

Ejercicios 2F (p. 40):

1- La suma de dos números es 50 y su producto 576. Halla los números

$x+y=50 \quad y=50-x$

$xy=576$

$x(50-x)=576$

$50x-x^2=576$

$0=x^2-50x+576$

$(x-32)(x-18)$ $\quad x=32$, $x=18$

2- El perímetro de un rectángulo es de 70 cm y su área $264\ cm^2$. Halle las dimensiones

$x+y=70 \quad y=70-x$

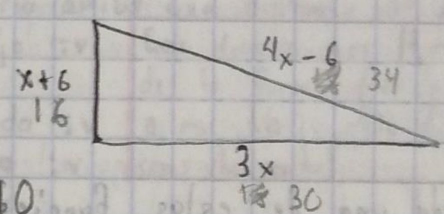
$xy=264$

$x(70-x)=264$

$0=x^2-70x+264$ $\quad x=66$

$(x-66)(x-4)$ $\quad x=4$

3- Halle el valor de x en el diagrama



$(x+6)^2+(3x)^2=(4x-6)^2$

$x^2+12x+36+9x^2=16x^2-48x+36$

$0=6x^2-60x$

$0=6(x^2-10x)$ $\quad x_1=10$ $\quad \therefore\ x=10$

$0=(x^2-10x)$ $\quad x_2=0$

- Preguntas tipo examen -

4- Un rectángulo tiene un largo de 23 cm y ancho de 16 cm. Si se reduce el largo x cm el ancho aumenta x cm. La nueva área es 378 cm. Halle las dimensiones

$23+16=39 \therefore x+y=39 \quad y=39-x$

$xy=378 \quad x(39-x)=378$

$0=x^2-39x+378$ $\quad x_1=21$

$(x-21)(x-18)$ $\quad x_2=18$

5- La fórmula $h=2+14t-4.9t^2$ proporciona la altura h mts que alcanza un balón de basket t segundos después de haber tirado el triple ¿Cuánto tiempo permanece el balón en el aire?

$0=2+14t-4.9t^2$ $\quad x_1=0.136$ $\quad \therefore$ 3 segundos

$x_2=2.9934$

Raíces de ecuaciones cuadráticas

Watchando $x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ podemos determinar la naturaleza de las raíces de la ecuación. Ya sabes cómo, así que vas :v

Ejercicios 2G (p. 42):

1- Halle el valor del discriminante e indique la naturaleza de las raíces

a) $x^2+5x-3=0 \quad b^2-4ac \rightarrow 25-(4)(1)(-3)=37 \ \therefore$ 2 raíces

b) $2x^2+4x+1=0$ $16-8$ ∴ 2 raíces
c) $4x^2-x+5=0$ $1-80$ ∴ 0 raíces
d) $x^2+8x+16=0$ $64-64$ ∴ 1 raíz
e) $x^2-3x+8=0$ $9-32$ ∴ 0 raíces
f) $12x^2-20x+25=0$ $400-1200$ ∴ 0 raíces

- Pregunta tipo examen -

2- Halle los valores de p donde las ecuaciones tienen 2 raíces distintas
a) $x^2+4x+p=0$ $16-(4)(1)(x)$ ∴ $p<4$
b) $px^2+5x+2=0$ $25-(4)(x)(2)$ ∴ $p<3.125$
c) $x^2+px+8=0$ $x^2-(4)(8)(1)$ ∴ $p>4\sqrt{2}$
d) $x^2+3px+1=0$ $9x^2-(4)(1)(1)$ ∴ $p>2/3$

3- Halle los valores de k para los cuales las ecuaciones tienen dos raíces iguales
a) $x^2+10x+k=0$ $100-(4)(1)(k)$ ∴ $k=25$
b) $2x^2-3x+k=0$ $9-(4)(2)(k)$ ∴ $k=1.125$
c) $3x^2-2kx+5=0$ $4k^2-(4)(3)(5)$ ∴ $k=3.873$
d) $x^2-4kx-3k=0$ $16k^2-(4)(1)(3k)$ ∴ $k=0.75$

Gráficos de funciones Cuadráticas

Una función cuadrática es una parábola :v Numa sisierte
Presenta o un máximo o un mínimo llamado vértice :v
Si x^2 es positivo, la parábola abre hacia arriba y pus pasa lo contrario si es negativo :v
La ecuación del eje de simetría es $x=\frac{-b}{2a}$

Cuando la función básica $y=x^2$ sufre transformaciones, las resultantes pueden escribirse como $y=a(x-h)^2+k$
Para funciones expresadas así, el gráfico tiene su vértice en (h,k)

Ejemplo 10 (p. 45): Escriba $y=x^2-6x+4$ en forma $y=a(x-h)^2+k$
$y=x^2-6x+9+4-9$ $\qquad \frac{6}{2}=3$ simetría
$y=(x-3)^2-5$ vértice $=(3,-5)$

Ejemplo 11 (p. 46): Escriba $f(x)=2x^2+8x+11$ en esa forma
$y=2(x^2+4x+4)+11-8$
$y=2(x+2)^2+3$ $v=(-2,3)$

Ejercicios 2H (p. 46): Para cada función, escriba la ecuación del eje de simetría y el punto de intersección del eje y
a) $f(x)=x^2+8x+5$ simetría $=-4$ intersección $=(0,5)$
b) $f(x)=x^2-6x-3$ $s=3$ $i=(0,-3)$
c) $f(x)=5x^2+10x+6$ $s=-1$ $i=(0,6)$
d) $f(x)=-3x^2+10x+9$ $s=5/3$ $i=(0,9)$

Para funciones cuadráticas de la forma $y=a(x-p)(x-q)$ el gráfico corta al eje x en $(p,0)$ y $(q,0)$

Ejercicios 2I (p.48):

1- Escriba las coordenadas de intersección para ambos ejes

a) $f(x)=(x+3)(x-7)$ x: $(-3,0)$, $(7,0)$ y: $(0,-21)$

b) $f(x)=2(x-4)(x-5)$ x: $(4,0)$, $(5,0)$ y: $(0,+40)$

c) $f(x)=-3(x+2)(x+1)$ x: $(+2,0)$ $(+1,0)$ y: $(0,-6)$

d) $f(x)=5(x+6)(x-2)$ x: $(-6,0)$ $(2,0)$ y: $(0,-60)$

2- Escriba cada función de la forma $y=a(x-p)(x-q)$ y señale intersecciones

a) $y=x^2-7x-8$ $(x-8)(x+1)$ x: $(8,0)$ $(-1,0)$ y: $(0,-8)$

b) $y=x^2-8x+15$ $(x-5)(x-3)$ x: $(5,0)$ $(3,0)$ y: $(0,15)$

c) $y=-2x^2+3x+5$ $-2(x-1)(x+2.5)$ x: $(-1,0)$, $(2.5,0)$ y: $(0,5)$

d) $y=5x^2+6x-8$ $5(x-.8)(x+2)$ x: $(0.8,0)$, $(-2,0)$ y: $(0,-8)$

- Pregunta tipo examen -

4- Sea $f(x)=2x^2-12x$.

a) El gráfico corta al eje x en A y B. Halla sus coordenadas

$2x^2-12x+0$ $2(x^2-6x)$ $2(x+0)(x-6)$

$A=(0,0)$

$B=(6,0)$

b) Escriba la ecuación del eje de simetría

$x=\frac{-b}{2a}$ $x=\frac{12}{4}$ $\underline{x=3}$ → eje

c) El vertice del gráfico está en C. Halle sus coordenadas

$2x^2-12x+0$ $2(x^2-6x+9)-9$

$2(x-3)^2-9$

vertice: $(3,-9)$

- Pregunta tipo examen -

5- Sea $f(x)=x^2+3$ y $g(x)=x-2$

a) Halle $(f\circ g)(x)$

$(x-2)^2+3$ → $\underline{x^2-4x+7}$

b) Escriba las coordenadas del vertice del gráfico de $(f\circ g)$

vertice: $(2,3)$

El gráfico de la función h se genera mediante la traslación de $(f\circ g)$ $\begin{pmatrix}5\\-2\end{pmatrix}$

c) Escriba la expresión de $h(x)$ en su forma ax^2+bx+c

vertice: $(7,1)$ $(x-7)^2+1$ ∴ $x^2-14x+50$

d) Escriba la intersección del gráfico con el eje y

int: $(0,50)$

Determinación de la fórmula de una función cuadrática a partir de un gráfico

Si conoce las intersecciones con el eje x, puede comenzar escribiendo la forma factorizada

Si te dan el vértice puedes empezar con la forma canónica

Ejemplo 14 (p. 49): Usando la información, donde se sabe que hay los puntos $(-2,0)$, $(4,0)$ y $(0,-16)$ y se sabe que el término x^2 es positiva, escribe la respuesta en forma $y = ax^2 + bx + c$

$y = a(x+2)(x-4)$ $\quad y = a(x-p)(x-q)$

$y = 2(x+2)(x-4)$

$y = 2x^2 - \cancel{4x} - 16 \rightarrow y = 2x^2 - 4x - 16$

Ejemplo 15 (p. 50): Sabiendo que x^2 es negativo y se conocen los puntos $(0,-15)$ y $(6,3)$ escriba la ecuación de forma polinómica

$y = a(x-6)^2 + 3$ $\quad y = a(x-h)^2 + k$ $\quad (6,3)$ es vertice

$y = -a(x^2 - 12x + 36) + 3$

$y = a(-x^2 + 12x - 36) + 3$

$y = \frac{1}{2}(-x^2 + 12x - 36) + 3$

$y = -\frac{1}{2}x^2 + 6x - 18 + 3 \rightarrow -\frac{x^2}{2} + 6x - 15$

Ejemplo 16 (p. 51): Sabiendo que x^2 es positiva y se conocen los puntos $(-2,9)$, $(2,-7)$ y $(4,3)$ escribe la fórmula de la función

$9 = a(-2)^2 - b(-2) + c \qquad 9 = 4a + 2b + c \qquad c = -4a - 2b + 9$

$-7 = a(2)^2 - b(2) + c \qquad -7 = 4a - 2b + c \qquad c = -4a + 2b - 7$

$3 = a(4)^2 - b(4) + c \qquad 3 = 16a - 4b + c \qquad c = -16a + 4b + 3$

$y = 1.5x^2 + 4x - 5$

Ejercicios 2J (p. 52): Use la información y escriba la fórmula de forma $ax^2 + bx + c$

1- x^2 es positivo, el vertice está en $(2,1)$ y un intersecto en $(0,5)$

$y = a(x-h)^2 + k \qquad y = a(x-2)^2 + 1$

$y = x^2 - 4x + 5$

2- x^2 es positivo y se sabe que intersecta en x en $(-2,0)$ y $(6,0)$ en y $(0,-12)$

$y = a(x-p)(x-q) \qquad y = a(x+2)(x-6)$

$y = x^2 - 4x - 12$

3- x^2 es negativa, el vertice está en $(-1,8)$ intersecto en y $(0,5)$

$y = a(x-h)^2 + k \qquad y = a(x+1)^2 + 8$

$y = -3(x+1)^2$

$y = -3x^2 - 6x - 3 + 8 \rightarrow y = -3x^2 - 6x + 5$

4- x^2 es positiva, intersecta en x en $(-1,0)$ y $(6,0)$ y otro punto random en $(4,-5)$

$y = a(x+1)(x-6)$

$y = a(x-p)(x-q) \qquad y = a(x^2 - 5x - 6)$

$y = \frac{x^2}{2} - \frac{5x}{2} - 3$

Aplicaciones de las ecuaciones cuadráticas
Ejercicios 2K (p.55):
1- La altura que alcanza una pelota t segundos después de ser lanzada se determina por $h = 15t - 4.9t^2 + 3$
a) Halle la altura máxima $\frac{-15}{-2 \cdot 4.9} = 1.53$ simetría

$15(1.53) - 4.9(1.53)^2 + 3 = 14.479$ 14.479

b) ¿Durante cuánto tiempo la altura superará los 12 m?
$12 = -4.9t^2 + 15t + 3$
$0 = -4.9t^2 + 15t - 9$

$x_1 = 2.242$
$x_2 = 0.82$

Pos son esta clase de ejercicios :v
Capítulo 4: Funciones exponenciales y logarítmicas
Si $f(n) = 2^n$ entonces $f(n)$ es una f. exponencial :v numa
Sus inversas son las funciones logarítmicas
Potencias: Sus propiedades
Ya sabes lo que es una potencia
Multiplicación: $x^n \cdot x^m = x^{n+m}$:v numa
División: $x^n \div x^m = x^{n-m}$
Potencia de potencia: $(x^n)^m = x^{n \cdot m}$
La potencia 0: Toda base elevada a la 0 es 1 :v
Exponentes racionales: Si $x^{n/m}$ entonces $\sqrt[m]{x^n}$
Exponentes negativos: Si x^{-n} entonces $1/x^n$:v
Numa sabiduría cósmica :v
Resolución de ecuaciones exponenciales
Una ecuación exponencial se puede escribir como $a^x = b^y$
Puede resolverse si se tiene la misma base así
$5^x = 25 \rightarrow 5^x = 5^2 \rightarrow x = 2$
Ejemplo 5 (p. 107):
Resuelva $3^{x-1} = 3^{5x}$
$x - 1 = 5x \rightarrow -1 = 4x \rightarrow -\frac{1}{4} = x$

Ejercicios 4D (p.108):
1- Resuelva en x
a) $2^x = 32$
$2^x = 2^4 \therefore x = 4$
b) $3^{1-2x} = 243$
$3^{1-2x} = 3^5 \rightarrow 1 - 2x = 5 \therefore x = -2$
c) $3^{x^2-2x} = 27$
$3^{x^2-2x} = 3^3 \rightarrow x^2 - 2x = 3 \therefore x_1 = 3 \quad x_2 = -1$
d) $5^{2x-1} - 25 = 0$
$2x - 1 = 2 \therefore x = 3/2$
$x - 3 \quad x + 1)$

- Pregunta tipo examen -

3 - Resuelva $8(2^{x+1}) = 2\sqrt{2^x}$

$2^3(2^{x+1}) = 2\cdot(2^{x/2})$

$x+4 = 1 + x/2$

$x/2 = -3$

$x = -6$

Pueden resolverse ecuaciones cuando la incognita no esta en el exponente de la siguiente manera

Ejemplo 7 (p.108): Resuelva $3x^{-3/5} = 24$

$\frac{3x^{-3/5} = 24}{3}$

$x^{-3/5} = 8$

$(x^{-3/5})^{-5/3} = 8^{-5/3}$

$x = 0.03125$

Ejercicios 4E (p.109):

1 - Resuelva

a) $2x^4 = 162$

$x^4 = 81 \rightarrow x = 81^{1/4} \therefore x = 3$

b) $x^5 - 32 = 0$

$x^5 = 32 \quad x = 32^{1/5} \therefore x = 2$

c) $x^{-2} = 16$

$x = 16^{-.5} \quad x = 0.25$

Gráficos y propiedades de las funciones exponenciales

Una función exponencial es una función de la forma $f(x) = a^x$ donde a es un número real positivo y diferente a 1

El dominio de $f(x) = a^x$ son todos los reales

El rango son los reales positivos

La curva no corta al eje x

La intersección con el eje y es 1

El gráfico es siempre creciente

$f(x) = a^{-x}$ es una función de decrecimiento exponencial

La función exponencial en base e

El monto final crece a medida que el intervalo entre capitalizaciones decrece, el típico problema del banco :v

Transformaciones de funciones exponenciales

Las transformaciones se dan igual como cualquier función :v

Propiedades de los logaritmos

Watcha: $2^3 = 8$

2 es la base y 3 es el exponente o el logaritmo

Decimos que el logaritmo en base 2 de 8 es 3 y se escribe

$\log_2 8 = 3$

Ejercicios 4G (p. 115): Evalúe

a) $\log_7 49$ $7^x = 49$ $x = 2$

b) $\log_5 \sqrt{5}$ $5^x = \sqrt{5}$ $x = 1/2$

c) $\log_2 64$ $2^x = 64$ $x = 6$

d) $\log_9 1$ $9^x = 1$ $x = 0$

2- Evalúe

a) $\log_3 1/81 = -4$

b) $\log_5 125^{1/2} = 1.5$

c) $\log_{32} 8 = 0.6$

d) $\log_3 3^4 = 4$

OJO: Solamente podemos hallar logaritmos de números positivos

$\log_a 0$ no está definido

$\log_a (a^n) = n$

Ejercicios 4I (p. 117):

1- Escriba estas ecuaciones en forma logarítmica

a) $x = 2^8$ $\log_2 x = 8$

b) $x = 3^5$ $\log_3 x = 5$

c) $x = 10^4$ $\log_{10} x = 4$

d) $x = a^b$ $\log_a x = b$

2- [redacted] Escriba estas ecuaciones en forma exponencial

a) $x = \log_2 8$ $2^x = 8$

b) $x = \log_3 27$ $3^x = 27$

c) $x = \log_{10} 1000$ $10^x = 1000$

d) $x = \log_a b$ $a^x = b$

3- Resuelva las ecuaciones

a) $\log_4 x = 3$ $x = 64$

b) $\log_3 x = 4$ $x = 81$

c) $\log_x 64 = 2$ $x = 8$

d) $\log_x 6 = 1/2$ $x = 36$

e) $\log_2 x = -5$ $x = 1/32$

Funciones logarítmicas

Una función exponencial es la inversa de una logarítmica

Se halla la inversa como cualquier otra función ¿v Se intercambia "x" y "y" y se despeja como por ejemplo

$y = 2^x$

$x = 2^y$

$\log_2 x = y \log_2 2$ Dado que $\log_2 2 = 1$

$\log_2 x = y$

El dominio es el conjunto de todos los reales positivos

El rango es el conjunto de todos los reales

La curva no corta el eje y, el eje y es una asíntota vertical

Corta al eje x en 1

El gráfico es siempre creciente

Transformaciones de funciones logarítmicas
Pes igual :v
Logaritmos en base 10
$y = \log_{10} x$ es la inversa de $y = 10^x$ y pos, están chidos :v
Logaritmos naturales
$\log_e x = \ln x$ y pos también están chidos :v
Ejercicios 4L (p. 122):
4- Sin calculadora, evalúe:
a) $5^{\log_5 12} = 12$
b) $5^{\log_5 4} = 4$
c) $e^{\ln\sqrt{3}} = \sqrt{3}$
d) $e^{\ln 4} = 4$
5- Sin calculadora evalúe:
a) $\ln e^5 = 5$
b) $\log 100 = 2$
c) $\ln 1 = 0$
d) $\ln e = 1$
e) $\ln 1/e^3 = -3$
Propiedades de los logaritmos
$\log x + \log y = \log xy$
$\log x - \log y = \log \frac{x}{y}$
$n \log x = \log x^n$
$\log_a \frac{1}{x} = \log_a x^{-1} = -1 \cdot \log_a x = -\log_a x$
Es necesario aprenderse estas propiedades ya que no aparecen en el cuadernillo de datos
Ejercicios 4M (p. 124):
1- Exprese como único logaritmo
a) $\log 5 + \log 6$ $\quad \log 30$
b) $\log 24 - \log 2$ $\quad \log 12$
c) $2\log 8 - 4\log 2$ $\quad \log 4$
d) $\frac{1}{2}\log 49$ $\quad \log 7$
e) $3\log x - 2\log y$ $\quad \log x^3/y^2$
f) $\log x - \log y - \log z$ $\quad \log \frac{x}{y} - \log z = \log \frac{x}{yz}$
g) $\log x + 2\log y - 3\log xy$ $\quad \log xy^2 - \log(xy)^3 = \log \frac{xy^2}{x^3y^3} = \log \frac{1}{x^2 y}$
3- Halle el valor de cada expresión
a) $\log_6 2 + \log_6 18$ $\quad \log_6 36 = 2$
b) $\log_2 24 - \log_2 3$ $\quad \log_2 8 = 3$
c) $\log_8 2 + \log_8 32$ $\quad \log_8 64 = 2$
d) $2\log_6 3 + \log_6 24$ $\quad \log 216 = 3$
e) $\frac{1}{2}\log 36 - \log 15 + 2\log 5$ $\quad \log 10 = 1$
$\frac{6}{15} \cdot \overset{3}{25} = \frac{150}{15}$

Cambio de base

Suponga que quiere evaluar $\log_b a$ con otra base, base c

Si $y = \log_b a \rightarrow a = b^y$

Aplicamos logaritmos: $\log_c a = \log_c b^y$

$$\log_c a = y \log_c b$$

$$\frac{\log_c a}{\log_c b} = y$$

Por lo tanto, para cambiar de base: $\log_b a = \dfrac{\log_c a}{\log_c b}$

Ejemplo 22 (p. 126): $\log_x 3 = a$ y $\log_x 6 = b$

Halle $\log_3 6$ en función de a y b.

$$\log_3 6 = \frac{\log 6}{\log 3} = \frac{b}{a}$$

Ejercicios 40 (p. 126)

1- Use la fórmula del cambio de base y evalúe con 3 cifras significativas

a) $\log_2 7$ $\quad \dfrac{\log 7}{\log 2} = 2.807$

b) $\log_5 \dfrac{1}{7}$ $\quad \dfrac{\log 1/7}{\log 5} = -1.209$

c) $\log_3 (0.7)$ $\quad \dfrac{\log(0.7)}{\log 3} = -0.325$

2- Sabiendo que $\log_3 x = y$ exprese $\log_9 x$ en función de x e y

$$\frac{\log x}{\log 9} \rightarrow \frac{\log_3 x}{\log_3 9} = \frac{y}{2}$$

Ecuaciones exponenciales y logarítmicas

Ejemplo 23 (p. 127): $5^x = 9$

$x \log 5 = \log 9$

$x = 1.37$ a 3 cs

Ejercicios 4P (p. 128):

1- Resuelva las ecuaciones hallando el valor de x con 3cs

a) $2^x = 5$ $\quad x \log 2 = \log 5 \quad x = 2.32$

b) $3^x = 50$ $\quad x \log 3 = \log 50 \quad x = 3.56$

c) $5^{-x} = 17$ $\quad -x \log 5 = \log 17 \quad x = -1.76$

d) $7^{x+1} = 16$ $\quad (x+1) \log 7 = \log 16 \quad x = 0.425$

- Pregunta tipo examen -

2- Resuelva estas ecuaciones para hallar el valor de x con 3cs

a) $2^{x+2} = 5^{x-3}$ $\quad (x+2) \log 2 = (x-3) \log 5$

$$\frac{x+2}{x-3} = \frac{\log 5}{\log 2} \rightarrow \frac{x+2}{x-3} = 2.32$$

$$x + 2 = 2.32x - (3)(2.32)$$

$$x - 2.32x = -3(2.32) - 2$$

$$-1.32x = 8.97$$

$$x = 3.76$$

b) $3^{2-x} = 4^{2x-5}$ $(2-x)\log 3 = (2x-5)\log 4$

$\frac{\log 4}{\log 3} = \frac{2-x}{2x-5}$

$1.26(2x-5) = 2-x$

$2.52x - 6.31 = 2-x \rightarrow 2.52x - 8.31 = -x$

$-8.31 = -x + 2.52x$

$-8.31 = x(-1+2.52)$

$5.47 = x$

d) $7^x = (0.5)^{x-1}$ $x\log 7 = (x-1)\log(0.5)$

$-2.8x = x-1$

$1 = 3.8x$

$0.263 = x$

Resoluciones de ecuaciones logarítmicas

Las ecuaciones logarítmicas con igual base pueden resolverse igualando los argumentos de los logaritmos

Ejemplo 27 (p. 124): Resuelva $\log_a(x^2) = \log_a(3x+4)$

$x^2 = 3x+4$

$x^2 - 3x - 4 = 0$

$(x-4)(x+1) = 0$ $x_1 = 4$ $x_2 = -1$

Es necesario verificar que ambas soluciones son posibles

Hay que recordar que logaritmo de un número negativo no es posible sin embargo, el caso no es este

Para $x=4$ se cumple

Para $x=-1$ también

Ejercicios 4R (p. 130):

-Pregunta tipo examen-

1- Resuelva en x

a) $\log_2(x) = \log_2(6x-1)$ $1 = 5x \rightarrow 1/5 = x$

b) $\ln(x+1) = \ln(3-x)$ $2x = 2 \rightarrow x = 1$

c) $\log_5(2-x) = \log_5(6x-1)$ $5x = 3 \rightarrow x = 3/5$

d) $\log_2(2x+3) + \log_2(x-1) = \log_2(x+1)$ $2x^2 + x - 3 = x+1 \rightarrow 2x^2 - 4 = 0$

$2(x^2-2) = 0$

$\rightarrow x_1 = \sqrt{2}$

$x_2 = -\sqrt{2}$

Algunas veces es más sencillo resolver una ecuación usando exponentes

Ejemplo 29 (p. 130): Resuelva $\log_5(x-2) = 3$

$x - 2 = 5^3$

$x = 127$

Dado que

$\log_a x = b \rightarrow x = a^b$

Ejercicios 4S (p. 131):

1- Resuelva en x

a) $\log_9(x-2) = 2$ $x-2 = 9^2 \rightarrow x = 83$

b) $\log_3(2x-1) = 3$ $2x-1 = 3^3 \rightarrow x = 14$

c) $\log_{1/2}(3-x) = 5$ $3-x = (1/2)^5 \rightarrow 3 - 1/32 = x \rightarrow x = 95/32$

Aplicaciones de las funciones exponenciales y logarítmicas

Crecimiento y Decrecimiento Exponencial

Unas aplicaciones de los modelos de crecimiento y decrecimiento exponencial son

En biología:

- Crecimiento de microorganismos en un cultivo
- Población humana
- Propagación de un virus

En física:

- Cadena de reacciones nucleares
- Transferencia de calor

En economía:

- Diagramas piramidales

En tecnología informática:

- Potencia de procesamiento de computadoras

Ejercicios 4.7 (p. 133):

1- Se invierten 450 euros al 3.2 de interés compuesto con capitalización anual

a) Escriba la fórmula para el valor de la inversión luego de n años

$$T = 450 \cdot 1.032^n$$

b) ¿Después de cuántos años superará los 600 euros?

$$600 = 450 \cdot 1.032^n$$

$$\log(4/3) = n \log 1.032 \quad \therefore \quad n = 9.133$$

Después de 10 años

2- En una epidemia de SIDA había 100 mens infectados y cada día el número aumentó 10%

a) ¿Cuántos infectados habrá después de los siguientes periodos?

i) Dos días $T = 100 \cdot 1.1^x \rightarrow T = 121$ mens

ii) Después de una semana $T = 100 \cdot 1.1^x \rightarrow T = 194$ mens

b) ¿Cuánto tiempo pasará para que se infecten 250 mens?

$$250 = 100 \cdot 1.1^x$$

$$x = 9.61 \quad \therefore \quad 10 \text{ días}$$

3- Los incendios forestales se propagan de manera exponencial. Por cada hora de fuego sin control, el área de la quema se incrementa en un 15%.

Si se han quemado 10 hectáreas ¿en cuánto tiempo se quemarán 10,000?

$$T = a \cdot 1.15^x$$

$$T = 10 \cdot 1.15^x$$

$$10{,}000 = 10 \cdot 1.15^x \rightarrow 49.42 \text{ hrs}$$

$\leftarrow$ ¡En 2 días, 1 hora, 25 minutos y 30 segundos! aprox.

Capítulo 5: Funciones Racionales

¿Quieres saber cuántos rolones le caben a tu celular? Si tienes 4GB de memoria son 136 horas o 8160 minutos de música

Aprox. esto es:

2000 rolones de 4 minutos cada uno
o 1000 rolones de 8 minutos
o 4000 rolones de 2 minutos
No pos un buen :v
Esto nos lleva a la función $r = \frac{8000}{m}$ donde r= rolones y m= minutos que duran las rolas
Este es un ejemplo de función recíproca $f(x) = k/x$

Recíprocos
Ya sabes que es :v

Ejercicios 5A (p. 143):
1- Halle los recíprocos
a) 2 — $1/2$
b) 3 — $1/3$
c) -3 — $-1/3$
d) -1 — -1

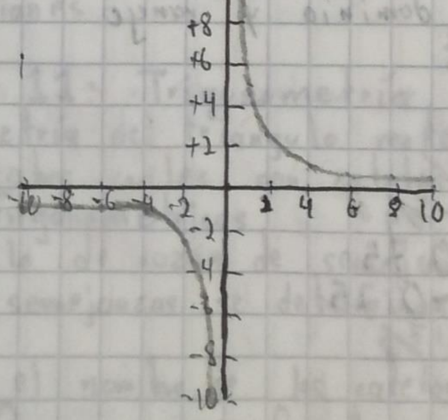
2- Halle los recíprocos
f) $\frac{2x}{9}$ — $\frac{9}{2x}$
g) $\frac{3a}{5}$ — $\frac{5}{3a}$
h) $\frac{2}{3d}$ — $\frac{3d}{2}$
j) $\frac{x+1}{x-1}$ — $\frac{x-1}{x+1}$

La función recíproca
La función recíproca de $f(x) = \frac{x}{k}$ es $f(x) = \frac{k}{x}$

Todos los gráficos de funciones recíprocas tienen formas similares

Asíntotas
Si una curva se acerca más y más a una recta pero nunca la toca, es una asíntota la recta a la que tiende
El gráfico de cualquier función recíproca de la forma $y = k/x$ tiene como asíntota vertical a $x=0$ y como asíntota horizontal a $y=0$

Ejercicios 5B (p. 146):
1- Dibuje en distintos gráficos
a) $y = \frac{5}{x}$



Funciones Racionales

Una función racional es una función de la forma $f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$ donde g y h son polinomios y $h(x)$ nunca será 0

Funciones racionales de la forma $y = \frac{k}{x-b}$

Este tipo de función tendrá una asíntota vertical cuando $x = b$
La asíntota horizontal será el eje x

Ejercicios 5C (p. 149):

1- Identifique las asíntotas e indique el dominio y rango

a) $y = \frac{1}{x+1}$ a. vert: $x = -1$ D: $x = [-\infty, -1) \cup (-1, \infty]$
a. hor: $y = 0$ R: $x = [-\infty, 0) \cup (0, \infty]$

b) $y = \frac{1}{x-4}$ a. vert: $x = 4$ D: $x \{x \mid x \neq 4\}$
a. hor: $y = 0$ R: $x \{x \mid x \neq 0\}$

c) $y = \frac{-2}{x-5}$ a. vert: $x = 5$ D: $x \{x \mid x \neq 5\}$
a. hor: $y = 0$ R: $x \{x \mid x \neq 0\}$

d) $y = \frac{4}{x+1}$ a. vert: $x = -1$ D: $x \{x \mid x \neq -1\}$
a. hor: $y = 0$ R: $x \{x \mid x \neq 0\}$

e) $y = \frac{4}{x+1} + 2$ a. vert: $x = -1$ D: $x \{x \mid x \neq -1\}$
a. hor: $y = 2$ R: $x \{x \mid x \neq 2\}$

Funciones racionales de la forma $y = \frac{ax+b}{cx+d}$

El gráfico de toda función racional de este tipo tiene una asíntota horizontal y vertical.
La asíntota vertical ocurre para el valor de x que hace 0 al denominador y la horizontal es la recta $y = a/c$

Funciones racionales de la forma $\frac{k}{x-b} = y$

Donde k y b son constantes, tendrá una asíntota vertical cuando el denominador sea 0
La asíntota horizontal será el eje x

Ejercicios 5D (p. 151)

1- Identifique las asíntotas e idique el dominio y rango

a) $y = \frac{x+2}{x-3}$ a. v. $x = 3$ D: $x \{x \mid x \neq 3\}$
a. h. $y = 0$ R: $x \neq 0$

b) $y = \frac{2x+2}{3x-1}$ a. v. $x = 1/3$ D: $x \neq 1/3$
a. h. $y = 2/3$ R: $y \neq 2/3$

c) $y = \frac{-3x+2}{-4x-5}$ a. v. $x = -5/4$ D: $x \neq -5/4$
a. h. $y = 0.75$ R: $y \neq 0.75$

d) $y = \frac{34x-2}{16x+4}$ a. v. $x = -0.25$ D: $x \neq -0.25$
a. h. $y = 17/8$ R: $y \neq 17/8$

Unidad 3:
Funciones Circulares y Trigonometría

Aprendizajes Esperados:
- El círculo: medida de ángulos en radianes; longitud de un arco; area del sector circular

- Definición de $\cos\theta$ y $\text{sen}\,\theta$ a partir del círculo de radio unidad
- Definición de $\tan\theta$ como $\text{sen}\,\theta / \cos\theta$
- Valores exactos de las razones trigonométricas de $0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}$ y sus múltiplos

- Relación fundamental $\cos^2\theta + \text{sen}^2\theta = 1$
- Identidades del ángulo doble para el seno y coseno
- Relación entre las razones trigonométricas

- Funciones trigonométricas (circulares) $\text{sen}\,x$, $\cos x$, y $\tan x$; dominios y recorridos; amplitud, periodicidad, gráficos
- Funciones compuestas de la forma $f(x) = a\,\text{sen}\,(b(x+c)) + d$
- Transformaciones
- Aplicaciones

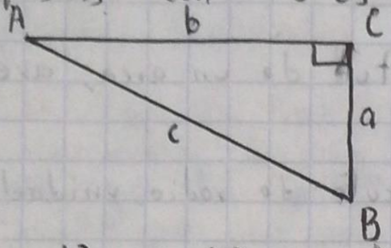
- Resolución de ecuaciones trigonométricas en un intervalo finito tanto de forma gráfica como analítica
- Ecuaciones que llevan a ecuaciones cuadráticas, por ejemplo, $\text{sen}\,x$, $\cos x$ o $\tan x$ (No se requiere: La solución general de ecuaciones trigonométricas)

- Resolución de triángulos
- Teorema del coseno
- Teorema del seno incluido el caso ambiguo
- Area del triangulo: $\frac{1}{2} \cdot ab\,\text{sen}\,C$
- Aplicaciones

Capitulo 11: Trigonometría
Trigonometría del triángulo rectángulo
Pos ya sabes cuáles son catetos e hipotenusa :v
Razones Trigonométricas
Ya sabes lo de razón de semejanza entre dos triángulos semejantes :v
Con estas semejanzas se determinan razones trigonométricas: seno, coseno y tangente
Ya sabes el nombre de los catetos. Las ~~funciones son~~ razones son:

$\text{sen}\,\theta = \frac{O}{H}$ $\quad \cos\theta = \frac{A}{H}$ $\quad \tan\theta = \frac{O}{A}$ $\quad \therefore \tan\theta = \frac{\text{sen}\,\theta}{\cos\theta}$

Ejercicios 11A (p. 367): Para cada pregunta use el diagrama para hallar todos los lados y ángulos que no se conocen. Dé sus respuestas con 3 cs donde sea necesario



1- $a = 12$, $c = 20$ — $b = 16$ — $\operatorname{sen} A = \frac{12}{20}$ = $\operatorname{sen} A = 0.6$ ∴ $\underline{A = 36.870°}$

$\underline{B = 53.130°}$

2- $b = 37$, $A = 40°$ — $\underline{B = 50°}$ — $\operatorname{sen} 50 = \frac{37}{c}$ → $\underline{c = 48.3}$

$\tan 50 = \frac{37}{a}$ → $\underline{a = 31.046}$

3- $c = 4.5$, $B = 55°$ — $\underline{A = 35°}$ — $\operatorname{sen} 55 = \frac{b}{4.5}$ — $\underline{b = 3.686}$

$\cos 55 = \frac{a}{4.5}$ — $\underline{a = 2.581}$

4- $b = 48$, $c = 60$ — $\underline{a = 36}$ — $\tan A = \frac{a}{b}$ — $\underline{A = 36.870°}$

$\tan B = \frac{b}{a}$ — $\underline{B = 53.130°}$

5- $a = 11$ $A = 35°$ — $\underline{B = 55°}$ — $\cos B = \frac{a}{c}$ — $\underline{c = 19.178}$

$\tan A = \frac{a}{b}$ — $\underline{b = 15.710}$

6- $a = 8.5$ $b = 9.7$ — $\underline{c = 12.897}$ — $\tan A = \frac{8.5}{9.7}$ — $\underline{A = 41.228}$

$\tan B = \frac{9.7}{8.5}$ — $\underline{B = 48.772}$

BOSS BATTLE

7- Si $a = 2x$, $b = 5x-1$ y $c = x^2+1$ halle el valor de x (y ángulos)

$\operatorname{Sen} B = \frac{b}{c}$ $\quad$ $\operatorname{Cos} A = \frac{b}{c}$ $\quad$ $\operatorname{Sen} B = \operatorname{Cos} A$ $\quad$ $\underline{A = 45°}$, $\underline{B = 45°}$

$\operatorname{Sen} 45 = \frac{5x-1}{x^2+1}$

$\operatorname{Sen} 45 (x^2+1) = 5x-1$

$2^{-1/2} x^2 + 2^{-1/2} = 5x-1$

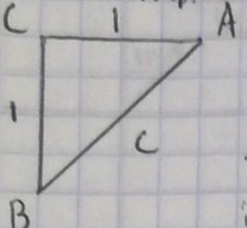
$0.707x^2 - 5x + 1.707 = 0$

$x_1 = 6.7113$ → ~~$a = 13.42$, $b = 32.55$ 35, $c = 46.04$~~

$x_2 = 0.3597$ → $a = 0.7194$, $b = 0.7985$, $c = 1.129$

Triangulos Rectangulos Especiales

Watch:



Para resolver el triangulo necesitamos c

$(1)^2+(1)^2=c^2$

$c=\sqrt{(1)^2+(1)^2} \quad \therefore \quad c=\sqrt{2}$

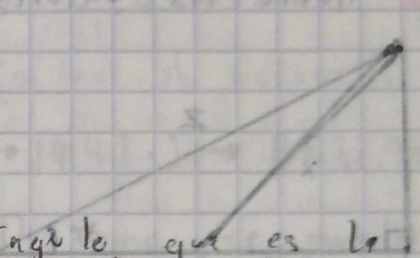
También necesitamos ∡A y ∡B pero como es isósceles ∡A = 45° y ∡B = 45°

Para el triangulo anterior, las razones trigonométricas son:

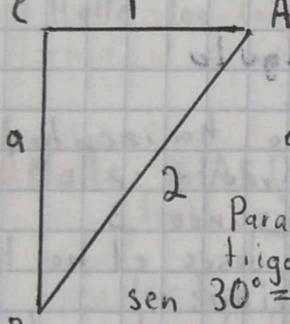
$\text{sen } 45° = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\cos 45° = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\tan 45° = \frac{1}{1} = 1$



Ahora watchemos el siguiente triángulo rectángulo que es la mitad de un equilátero. Necesitamos hallar a, ∡A y ∡B



$1^2+a^2=2^2 \quad \therefore \quad a=\sqrt{3}$

$\cos A = \frac{1}{2} \quad \therefore \quad A = 60° \longrightarrow B = 30°$

Para este triángulo, los valores para todas las razones trigonométricas de este triángulo con ángulos 30°, 60°, 90° son

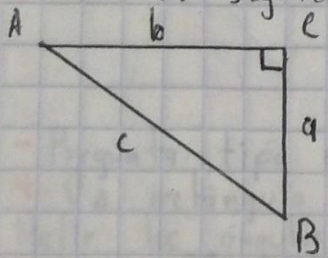
$\text{sen } 30° = \frac{1}{2}$ | $\text{sen } 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\cos 60° = \frac{1}{2}$

$\tan 30° = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ | $\tan 60° = \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3}$

Ejercicios 11B (p. 368):

1- Con el siguiente diagrama resuelva de forma exacta, están en cm todo



a) a = 12, c = 24 → T. 30, 60°, 90°

De la forma: $1^2+b^2=2^2$

$12(1^2+\sqrt{3}^2=2^2) \quad \therefore \quad \underline{b=12\sqrt{3}\text{ cm}}$

$B = 60°$

$\underline{A = 30°}$

b) b = 9, A = 45°

Si A = 45° entonces → $\underline{B = 45°}$

T. isósceles, entonces $\underline{a = 9\text{ cm}}$

$9(1^2+1^2=\sqrt{2}^2)$ entonces: $\underline{c = 9\sqrt{2}\text{ cm}}$

c) c = 4.5, B = 60° → $\underline{A = 30°}$ ½ T. equilatero

$2.25(1^2+\sqrt{3}^2=2^2) =$ $\underline{a = 2.25\text{ cm}}$ y $\underline{b = 2.25\sqrt{3}}$

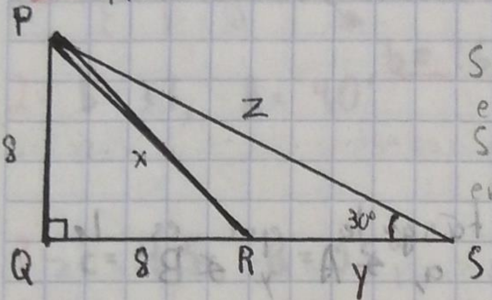
d) $b = 6$, $c = 4\sqrt{3}$???
$(1^2 + 1^2 = \sqrt{2}^2)$

→ $2\sqrt{3}\ (1^2 + \sqrt{3}^2 = 2^2)$ ∴ $a = 2\sqrt{3}$ cm → $B = 60°$, $A = 30°$

e) $a = 5\sqrt{2}$, $c = 10$???
→ $5\sqrt{2}\ (1^2 + 1^2 = \sqrt{2}^2)$ ∴ $b = 5\sqrt{2}$ cm → $A = 45°$, $B = 45°$

BOSS BATTLE

2- Halle los valores exactos de x, y, z



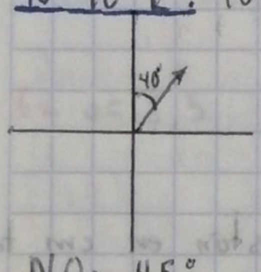
Si $\overline{PQ} = \overline{QR}$ ∴ isósceles
entonces $8\ (1^2 + 1^2 = \sqrt{2}^2)$ → $x = 8\sqrt{2}$
Si $\measuredangle S = 30$ ∴ $\measuredangle QPS = 60°$
entonces $8\ (1^2 + \sqrt{3}^2 = 2^2)$ ∴ $y = 8\sqrt{3} - 8$
$z = 16$

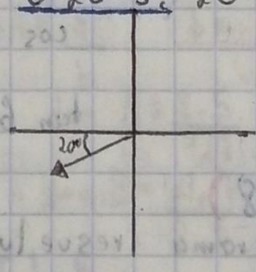
Aplicaciones de la trigonometría del triángulo rectángulo

Terminología:
- Angulo de elevación: Angulo "por encima" de la recta horizontal
- Angulo de depresión (sad): Angulo "por debajo" de esa recta :v

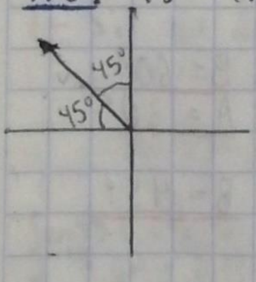
Los cuatro puntos cardinales se usan para el rumbo usando 3 cifras en el sentido de las manecillas del reloj desde el norte
Cuando se usan los puntos cardinales para una dirección:

N 40° E: 40° al este desde el norte **O 20° S:** 20° al sur desde el oeste



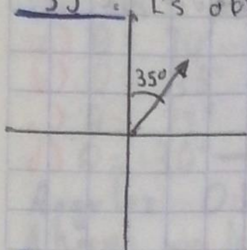


NO: 45° entre norte y oeste

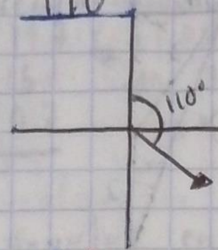


Cuando se usa rumbo para dirección:

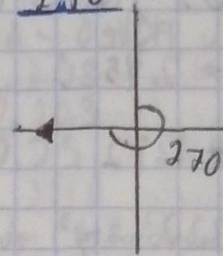
35°: Es obvio :v



110°



270°



Ejercicios 11C (p. 372):

1- Un triangulo isósceles ABC tiene $AC = 10cm$, $AB = BC = 15cm$

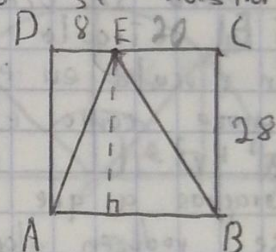
a) Halle la altura del triangulo

$5^2 + x^2 = 15^2 \therefore x = 10\sqrt{2}$

b) Halle $\measuredangle BAC$ y $\measuredangle ABC$

$\cos A = \frac{5}{15} \therefore A = 70.528$ $\quad \operatorname{sen} B = \frac{5}{15} \rightarrow 19.47 \cdot 2 \rightarrow B = 38.942$

2- ΔABE cabe exactamente en el cuadrado ABCD como se muestra $BC = 28$ cm y $DE = 8$ cm



a) Halle las longitudes de los segmentos AE y BE

$AD^2 + DE^2 = AE^2$

$28^2 + 8^2 = x^2 \therefore \underline{AE = 4\sqrt{53}}$

$28^2 + 20^2 = x^2 \therefore \underline{BE = 4\sqrt{74}}$

b) Halle $\measuredangle AED$, $\measuredangle EBA$ y $\measuredangle AEB$

$\tan E = \frac{28}{8} \therefore \underline{\measuredangle AED = 74.05°}$

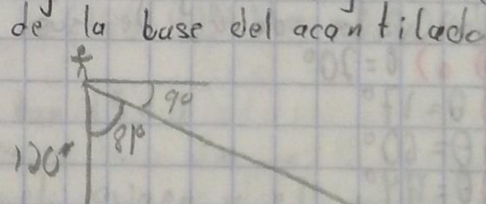
$\tan E = \frac{28}{20} \rightarrow 54.46 \rightarrow 180 = 54 + 74 + x \rightarrow \underline{\measuredangle AEB = 51.483°}$

$\measuredangle BEC$ $\quad$ ~~$\measuredangle AED = 51.483$~~

En $\Delta BEC \rightarrow 180 = 90 + 54.46 + x \rightarrow$ $\underline{\measuredangle EBA = 35.54°}$

3- Un observador parado en la cima de un acantilado vertical, 120m sobre el nivel del mar observa un barco en el agua con un ángulo de depresión de 9° ¿A qué distancia está el barco de la base del acantilado?

$\tan 81° = \frac{x}{120} \therefore \underline{x = 757.65}$



- Pregunta tipo examen -

4- Un rectángulo tiene un largo de 25 mm y ancho de 18 mm

Halle los ángulos formados por las diagonales del rectángulo

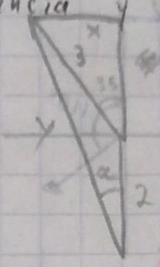
$\tan x = \frac{25}{18} \therefore x = 54.25°$

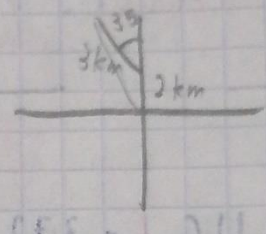
$180 = 90 + x + y$

$y = 35.75$

$\underline{\measuredangle = 54.25 \text{ y } 35.75}$

5- Ana camina 2 km hacia el norte, luego gira y camina 3 km en dirección N 35° O. Halle la distancia y el rumbo desde su punto de partida





Khe

$\cos 35 = \frac{x}{3} \rightarrow 2.45$

$\text{sen } 35 = \frac{x}{3} \rightarrow 1.72$

$(4.45)^2 + (1.72)^2 = y^2$

$y = 4.778$

$\cos\alpha = \frac{4.457}{4.778} \quad \alpha = 21.12$

$d = 4.778$ km y N21.12° O

Utilizacion de los ejes de coordenadas en trigonometria

El ángulo θ en un sistema de coordenadas cartesianas tiene su vertice en el origen. Un ángulo positivo se mide en sentido antihorario a partir del eje x

Ahora si viene lo bueno

¡El circulo unitario!

Un circulo en el origen y que su radio mida la unidad se le conoce como el circulo unitario donde en teorema de pitagoras $x^2 + y^2 = 1$

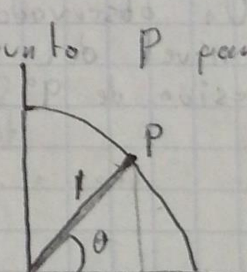
Gracias a que su hipotenusa es 1, las funciones trigonométricas se reducen a:

$\cos\theta = \frac{x}{1} = x \rightarrow x = \cos\theta \qquad \text{sen}\,\theta = \frac{y}{1} = y \rightarrow \text{sen}\,\theta = y$

En consecuencia un punto de la circunferencia de 0 a la hipotenusa del triangulo dentro de este circulo tendria coordenadas de $(\cos\theta, \text{sen}\,\theta)$ siendo θ la apertura a partir del eje x

Ejercicios 11D (p. 375):

1- Utilice el diagrama para hallar las coordenadas del punto P para cada valor de θ. De sus respuestas con 3 cs

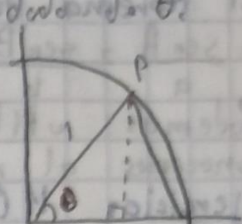


a) $\theta = 20°$ (0.939, 0.342)
b) $\theta = 17°$ (0.956, 0.292)
c) $\theta = 60°$ (0.5, 0.866)
d) $\theta = 74°$ (0.276, 0.961)
e) $\theta = 90°$ (0, 1)

2- Con el diagrama anterior, hallo el valor de θ para las coordenadas del punto P. Dé sus respuestas en el grado más próximo

a) P(0.408, 0.913) $\theta = 66°$
b) P(0.155, 0.922) $\theta = 81°$
c) P(0.707, 0.707) $\theta = 45°$
d) P(0.970, 0.242) $\theta = 14°$

3- Con el diagrama, halle el área de Δ AOP para el valor dado de θ.
Dé sus respuestas con aproximación de 3cs



a) $\theta = 70°$ $PX = 0.9397$ $\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot PX = A$ $A \approx 0.469\ u^2$
b) $\theta = 38°$ $PX = 0.615$ $A = 0.308$
c) $\theta = 24°$ $PX = 0.407$ $A = 0.203$
d) $\theta = 30°$ $PX = 0.5$ $A = 0.25$

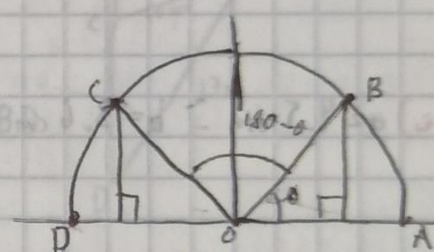
Angulos Obtusos

Ahora watchemos ángulos en el segundo cuadrante. Estos miden entre $90°$ y $180°$. A veces es útil relacionarlos con los del primer cuadrante.
Para ángulos suplementarios α y β, $\operatorname{sen}\alpha = \operatorname{sen}\beta$ y $\cos\alpha = -\cos\beta$
Para cualquier ángulo θ $\operatorname{sen}\theta = \operatorname{sen}(180-\theta)$ y $\cos\theta = -\cos(180-\theta)$

Ejercicios 11E (p. 376):

1- Use el diagrama para hallar B y C para los valores de θ. Dé su aproximación a 3cs

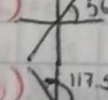
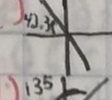
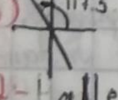
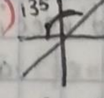
a) $\theta = 30°$ B $(\sqrt{3}/2, 0.5)$ C $(-\sqrt{3}/2, 0.5)$
b) $\theta = 57°$ B $(0.545, 0.839)$ C $(-0.545, 0.839)$
c) $\theta = 45°$ B $(0.707, 0.707)$ C $(-0.707, 0.707)$
d) $\theta = 13°$ B $(0.974, 0.225)$ C $(-0.974, 0.225)$
e) $\theta = 85°$ B $(0.0872, 0.996)$ C $(-0.0872, 0.996)$



Ahora si trazamos una recta desde el centro del círculo al exterior y así obtenemos un triángulo rectángulo, como sabemos que un cateto es igual a $\cos\theta$ y el otro a $\operatorname{sen}\theta$ y la hipotenusa a 1 así demostramos: $\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$ y también para cualquier recta $y = mx$, el valor de m es $\tan\theta$

Ejercicios 11F p. 379

1- Halle la pendiente de la recta $y = mx$ con 3cs si el ángulo de inclinación es:

a)  $\tan 56.3 = 1.50$
c)  42.3 $\tan(180-42.3) = -0.909$
b)  $\tan 117.5 = -1.921$
d)  135 $\tan 45 = 1$

2- Halle la ecuación de la recta que pasa por el origen y el punto P
Halle el valor de θ al grado más próximo si P es:

a) $P(0.674, 0.738)$ $y = 1.09x$ $\tan^{-1} m = \theta$ $\theta = 47.595°$ $48°$
b) $P(0.471, 0.882)$ $y = 0.534x$ $\theta = 28.103°$ $28°$
c) $P(-0.336, 0.942)$ $y = -0.357x$ $\tan^{-1} m = \theta \rightarrow -19.630 + 180 = \theta = 160.369°$ $160°$
d) $P(1.35, -1.64)$ $y = -0.823x$ $\theta = 140.540°$ $141°$
e) $P(-0.8, 0.6)$ $y = -1.333x$ $\theta = 126.870°$ $127°$
f) $P(1.59, 3.76)$ $y = 0.423x$ $\theta = 22.92°$ $23°$

El teorema del seno

$\frac{\text{sen} A}{a} = \frac{\text{sen} B}{b} = \frac{\text{sen} C}{c}$ Esta formula se proporciona en el cuadernillo de fórmulas para las externas

Podemos utilizar el teorema del seno para resolver triángulos si conocemos al menos un ángulo y el lado opuesto y una medida más

Ejercicios 4G (p. 383)

1- Resuelva cada triángulo ABC. Dé sus respuestas con 3cs

a) $b = 24$ cm, $A = 47°$, $B = 83°$

$\frac{\text{sen} 83}{24} = \frac{\text{sen} 47}{a}$ ∴ $C = 50°$

$a = 17.684$ cm

$\frac{\text{sen} 83}{24} = \frac{\text{sen} 50}{c}$ ∴ $c = 18.523$

b) $c = 2.5$ cm, $A = 40°$, $C = 72°$

$\frac{\text{sen} 72}{2.5} = \frac{\text{sen} 40}{a}$ ∴ $B = 68°$

$a = 1.689$

$\frac{\text{sen} 72}{2.5} = \frac{\text{sen} 68}{b}$ $b = 2.437$

c) $a = 4.5$ cm $b = 3.6$ cm $A = 55°$ $\frac{\text{sen} 55}{4.5} = \frac{\text{sen} B}{3.5} \rightarrow B = 39.577$

$C = 85.423$

$\frac{\text{sen} 55}{4.5} = \frac{\text{sen} 85.423}{c} \rightarrow c = 5.476$

d) $b = 60$, $B = 15°$ $C = 125°$

$A = 40°$

$\frac{\text{sen} 15}{60} = \frac{\text{sen} 125}{c}$ $c = 189.898$

$\frac{\text{sen} 15}{60} = \frac{\text{sen} 40}{a}$ $a = 149.012$

2- Un triángulo isósceles tiene una base de 20cm; los ángulos de la base miden 68.2°. Halle los lados iguales

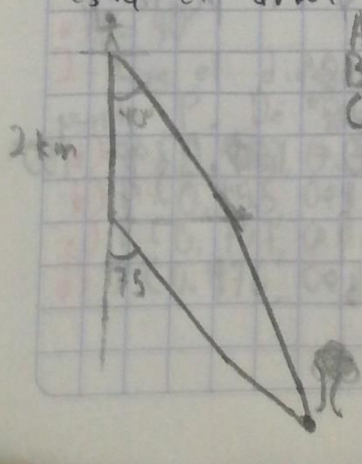
$\frac{\text{sen} 68.2}{a} = \frac{\text{sen} 68.2}{b} = \frac{\text{sen} 43.6}{20} \longrightarrow a = b = 26.927$

3- Julia watcha un árbol en dirección S40°E desde donde está parado. Camina 2 km al sur y ve que el árbol está en S75°E ¿A qué distancia está el árbol de su primera y segunda parada

$A = 40°$
$B = 180 - 75 = 105°$
$C = 35°$

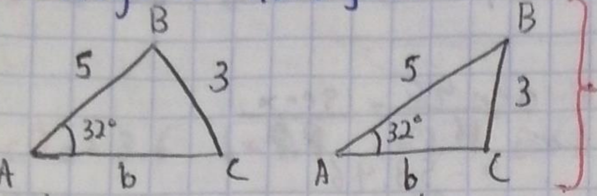
$\frac{\text{sen} 40}{a} = \frac{\text{sen} 105}{b} = \frac{\text{sen} 35}{2}$

2.24 3.368



Parada 1: 3.368 km
" 2: 2.24 km

Triángulos Ambiguos



Triángulos Ambiguos

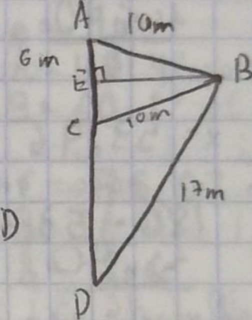
Estos son casos ambiguos

El caso ambiguo no se produce siempre que se resuelve un triángulo. Si usamos el teorema del seno puede haber si:

- Nos dan 2 lados y un ángulo no comprendido entre ellos agudo
- El lado opuesto al ángulo agudo dado es el menor de los dos lados dados

Ejercicios 11H (p. 385):

2- Observe el diagrama



a) Halle BE, CE y DE

BE: $6^2 + x^2 = 10^2$ $\quad$ BE = 8cm

CE: 6cm

DE: $8^2 + x^2 = 17^2$ $\quad$ DE = 15cm

b) Halle ∡EAB, ∡BCE, ∡BCD, ∡BDC, ∡ABD y ∡CBD

EAB = $\tan^{-1}\theta = \frac{8}{6}$ $\quad$ ∡EAB = 53.13°

∡BCE = 53.13°

∡BCD = 126.870°

∡BDC: $\frac{\text{sen } 126.870}{17} = \frac{\text{sen } x}{10}$ ∴ ∡BDC = 28.072°

∡ABD: $\frac{\text{sen } 28.072}{10} = \frac{\text{sen } x}{21}$ ∴ ∡ABD = 81.197

∡CBC = 25.058

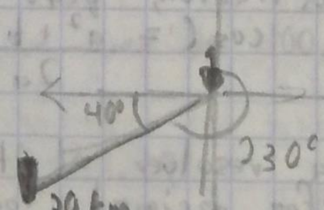
c) Explique cómo el diagrama se relaciona con el caso ambiguo del teorema del seno

Llegas a un punto donde sabes ∡ADB y observas que el ángulo y las 2 lados coinciden. ABD con BCD, 17, 10 y 28.072°

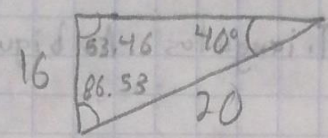
- Pregunta tipo examen -

3- Un barco está navegando al Oeste cuando el capitán ve un faro a 20 km sobre un rumbo de 230°

a) Dibuja un diagrama



b) ¿Que distancia debe navegar para que el faro este a 16 km?



$$\frac{\text{sen }40}{16} = \frac{\text{sen } x}{20}$$

$x = 53.46$

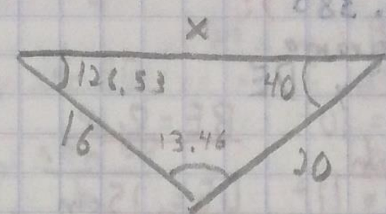
$$\frac{\text{sen }40}{16} = \frac{\text{sen } 86.53}{x} \longrightarrow x = 24.846$$

Necesitó avanzar 24.846 km

c) ¿Que distancia debe navegar el barco más allá del punto hallado en b) antes de que el faro esté nuevamente a 16 km del barco

$$\frac{\text{sen }40}{16} = \frac{\text{sen } x}{20}$$

$x = 53.46$



Para sacar el lado ambiguo:

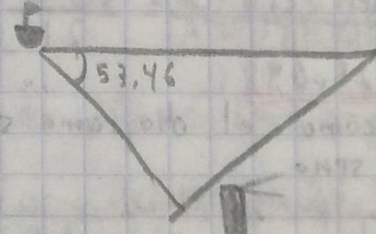
$180 - 53.46 = 126.53$

$$\frac{\text{sen }40}{16} = \frac{\text{sen } 13.46}{x} \quad x = 5.79 \text{ ¿?}$$

Numa entonces 5.79 es la respuesta al inciso b y 24.846 − 5.79 es la del c)

d) ¿Sobre qué rumbo está situado el faro respecto del barco la segunda vez que los separan 16 km

Sobre un rumbo de 53.46°



El Teorema del Coseno

Cuando te den a, b, c ó a, b, C no se podrán resolver los triangulos por teorema del seno. Para ello se usa el teorema del coseno

Está bien shido su demostración, pero al final llegamos a:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C \quad ó \quad \cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

Ejercicios 11I (p. 389):

1- Utilice la información para resolver el triángulo. Dé sus respuestas con aproximación de una cifra decimal. Todo está en metros iv

a) $A = 64°$, $b = 43$, $c = 72$ $\quad a^2 = 43^2 + 72^2 - 2(43)(72)\cos 64$

$a = 65.7 \quad B = 36.0 \quad C = 79.9$

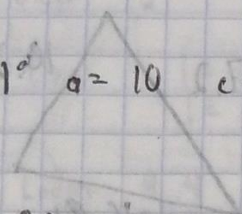
b) $a=20 \quad b=33 \quad c=41 \quad \cos A = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$ $\quad A=28.8$

$B=52.7$
$C=98.5$

c) $a=3.6 \quad b=4.9 \quad c=2.4 \quad \cos A = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$

$A=44.3°$
$B=108°$
$C=27.7°$

d) $B=31° \quad a=10 \quad c=14$



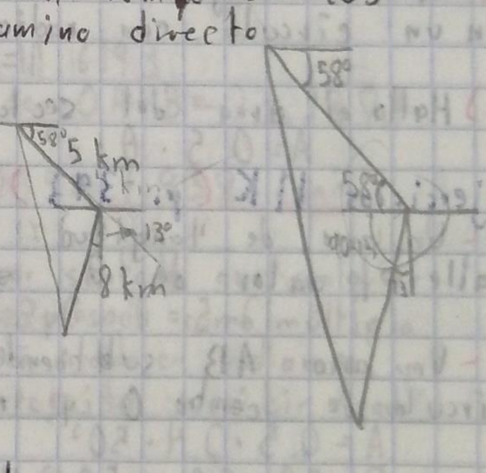
e) $C=70° \quad a=75 \quad b=86 \quad c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$ $\quad c=92.7$

$A=49.4°$
$B=60.5°$

f) $a=45 \quad b=50 \quad c=58 \quad \cos C = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$

$C=75.0°$
$B=56.4°$
$A=48.6°$

2- Un men deja un campamento y camina 5 km con un rumbo de 058°. Toma un break y camina otros 8 km con rumbo de 103°. Se detiene nuevamente antes de volver por un camino directo ¿Cuanto deberá caminar



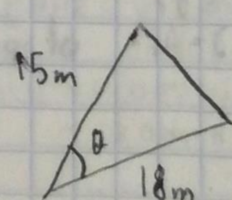
$58+(90-13)=A$
$A=135$
$a^2=b^2+c^2-2bc\cos a \therefore a=12.06$

Recorrerá 12.06 km

Area de un triangulo
Su demostración está skida pero al final sabemos que:
$A=\frac{1}{2}ab\,\mathrm{sen}\,C$

Ejercicios 11 J (p: 390):
1- El triángulo mostrado tiene un área de $100\,m^2$. Halle θ

$A=0.5\,ab\,\mathrm{sen}\,C$
$100=0.5\cdot 15\cdot 18\cdot \mathrm{sen}\,\theta$
$\mathrm{sen}^{-1}\left(\frac{100}{135}\right)=\theta$ $\quad \theta=47.79°$

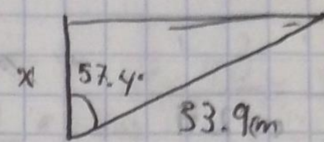


3- El siguiente triangulo tiene un area de $324 \, cm^2$. Halle x

$A = 0.5 \cdot a \cdot b \cdot \text{sen } C$

$324 = 0.5 \cdot x \cdot 33.9 \cdot \text{sen } 57.4$

$x = 22.69$



- Pregunta tipo examen -

4- a) Halle el angulo mayor del triangulo

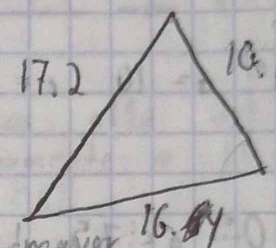
$\cos C = \dfrac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$ $\qquad \cos C = \dfrac{10.2^2 + 16.4^2 - 17.2^2}{2(10.2)(16.4)}$

$\rightarrow$ $C = 76.67$

$B = 68.09$

$A = 35.24$

C es el mayor



Radianes, arcos y sectores circulares

$360° = 2\pi$ radianes = circunferencia $\rightarrow$ longitud del arco

$\rightarrow$ Longitud del arco $= r\theta$ donde r = radio y θ es el ángulo central medido en radianes

$\rightarrow$ Area del sector circular $= \dfrac{\theta r^2}{2}$ donde r = radio y θ = ángulo central en radianes

Ejemplo 18 (p. 392):

a) Halla la longitud del arco que subtiende un ángulo central de 2.6 en un círculo con radio = 7 cm

$l = 7 \cdot 2.6 \rightarrow l = 18.2 \, cm$

b) Halla el área del sector circular

$A = 0.5 \cdot \theta \cdot r^2$ $\qquad A = 63.7 \, cm^2$

Ejercicios 11K (p. 393):

3- Un arco de longitud 12.5 mm subtiende un ángulo central θ. Halle el valor de θ si su radio del círculo es 2.5 mm

$12.5 = \theta \cdot 2.5$ $\qquad \theta = 5$ rad

4- Un arco AB subtiende un ángulo central de 2.4 rad en un círculo de centro O y r = 50 cm. Halle el área y perímetro de AOB

$A = 0.5 \cdot 2.4 \cdot 50^2$ $\qquad A = 3000$

$P = 50 + 50 + 50 \cdot 2.4$ $\qquad P = 220$

- Pregunta tipo examen -

6- En el círculo con centro P, el arco QR subtiende un ángulo central θ. Si la longitud de QR es 27.2 cm y el área del PQR es $217.6 \, cm^2$ halle θ y el radio

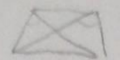
$27.2 = \theta r$

$435.2 = \theta r^2$

$\dfrac{27.2}{r} = \dfrac{435.2}{r^2}$ $\qquad r = 16$

$\therefore$

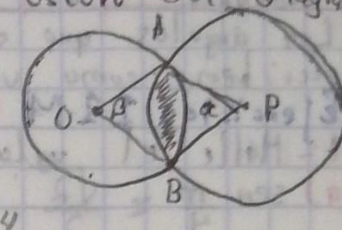
$\theta = 1.7$




$\pi r = \frac{180}{93}$

BOSS BATTLE

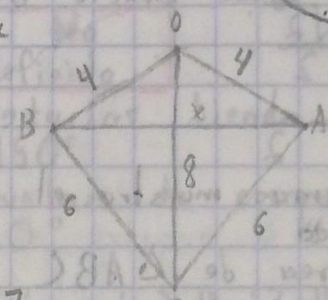
7- El círculo O tiene un $r = 4$ cm, el círculo P tiene $r = 6$ cm. La distancia entre ambos centros es de 8 cm. Si las circunferencias se cortan en A y B, halle el área del sombreado oscuro del diagrama



OBPA es cíclico xd $\therefore \beta + \alpha = 180$

O $r = 4$ cm
P $r = 6$ cm
$\}\ r = 8$ cm 2 cm de intersección

$l = \theta r$ $l = (180 - \alpha)4 \rightarrow 720 - 4\alpha$
$l = \alpha \cdot 6$ 6α



ΔOBA Lados 4, 4 y x
ΔPBA Lados 6, 6 y x

$\Delta OBP = \Delta OAP$ Lados 4, 6 y 8

$\measuredangle B = \cos^{-1}\left(\frac{4^2 + 6^2 - 8^2}{2 \cdot 4 \cdot 6}\right) = 104.47$

$\measuredangle BPO = 28.955$ $\measuredangle BPA = 57.9100$
$\measuredangle BOP = 46.567$ $\measuredangle BOA = 93.1349$

$A = \frac{1}{2} \cdot 1.0107 \cdot 6^2 = 18.19297837$ Area de $\Delta OBP = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 6 \cdot \operatorname{sen} 104.47$

$A = \frac{1}{2} \cdot 1.6255 \cdot 4^2 = 13.00408898$ $A = 11.6193$

31.197 Area de $OAPB = 23.2397$

$31.197 - 23.239 = \underline{7.958 \text{ cm}^2}$

Grados y radianes

$360° = 2\pi \therefore 180° = \pi$

entonces $\frac{180}{\pi} = 1$ radián

y $1° = \frac{\pi}{180}$ radianes

Se da por sentado que cualquier ángulo expresado como múltiplo de π está medido en radianes, y no se necesita escribir "rad"

→ Para convertir grados a radianes multiplicar por $\frac{\pi}{180}$

→ Y al revés, pos al revés: $\frac{180}{\pi}$:v

O haz una regla de 3 :v "Ponte trucha"

Ejercicios 11L (p. 395)

1- Convierte de grados a radianes con valor exacto

a) 75° $5\pi/12$
b) 240°
c) 80°
d) 330°

a) $\frac{5\pi}{12}$ b) $\frac{4\pi}{3}$ c) $\frac{4\pi}{9}$ d) $\frac{11\pi}{6}$

$\pi = \frac{180}{75}$

Es útil recordar las siguientes equivalencias:

Ángulo en grados	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°	210°	225°
Ángulo en radianes	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$

Los ángulos que son múltiplos de 30° y 45° generalmente se escriben como valores exactos en radianes, utilizando π

Ejercicios 11M (p. 397):

1- Halle el valor exacto de las siguientes razones trigonométricas

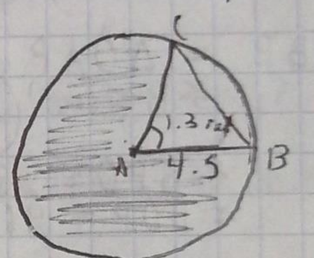
a) $\text{sen}\,\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

b) $\cos\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2}$

c) $\tan\frac{\pi}{6}\ \frac{\sqrt{3}}{3}$

d) $\text{sen}\,\frac{\pi}{3}\ \frac{\sqrt{3}}{2}$

3- El diagrama muestra el círculo, centro A, radio = 4.5 cm y $\measuredangle BAC = 1.3$ rad



a) Halle el área de ΔABC

$A = \frac{1}{2}\ 4.5 \cdot 4.5 \cdot \text{sen}\,1.3 = \underline{9.756\ cm^2}$

b) Halle la longitud BC

$BC = \sqrt{4.5^2 + 4.5^2 - 2 \cdot 4.5 \cdot 4.5 \cdot \cos 1.3}$

$BC = 5.447$

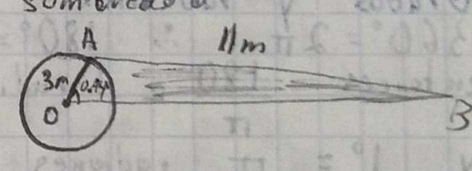
c) Halle el área de la región sombreada

eso $= 2\pi - 1.3$

$A = \frac{1}{2} \cdot (2\pi - 1.3) \cdot 4.5^2$

$A = 50.45\ cm^2$

4- El diagrama muestra el círculo, centro O con un radio de 3m, AB = 11m y $\measuredangle AOB = 0.94$ rad. Halla el área sombreada



$\frac{11}{\text{sen}\,0.94} = \frac{3}{\text{sen}\,x}$ $\qquad OB = 12.4992\ m$

$x = 0.222$ rad

$A_{\Delta AOB} = \frac{1}{2} \cdot 11 \cdot 3 \cdot \text{sen}\,1.9796 \rightarrow 15.14\ m^2$

$A_{\triangleleft} = \frac{1}{2} \cdot 0.94 \cdot 3^2 = \underline{4.23\ m^2}$ $\qquad 15.14 - 4.23 = \underline{10.91\ m^2}$

Capítulo 13: Funciones Circulares

Utilización del círculo unitario

Investigación:

Seno, coseno y tangente en el círculo unitario

En el capítulo 11 hallamos los valores exactos para las razones trigonométricas de 30°, 45°, 60° y 90°

Ahora watchemos:

Angulo, en grados y rad	Seno	Coseno	Tangente
$0°$, 0 rad	0	1	0
$30°$, $\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$
$45°$, $\frac{\pi}{4}$	$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{1} = 1$
$60°$, $\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3}$
$90°$, $\frac{\pi}{2}$	1	0	No definido

Ya sabemos que los ángulos suplementarios tienen el mismo valor de seno, por ejemplo: $\text{sen } 30° = \text{sen } 150°$

Tambien que los suplementarios tienen valores de coseno opuestos, como: $\cos 30° = -\cos 150°$

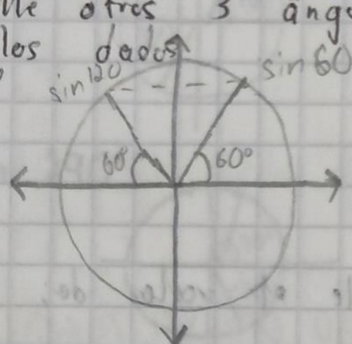
Vamos a deducir más cosas:

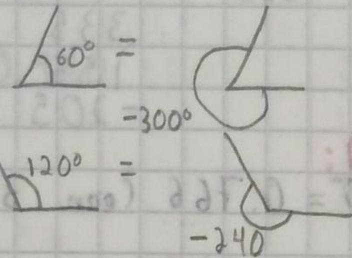
Gracias a la identidad: $\tan\theta = \frac{\text{sen }\theta}{\cos\theta}$ se puede deducir que para ángulos del primer y tercer cuadrante la tangente será positiva y para los del segundo y cuarto cuadrante será negativa

Ejercicios 13 A (p. 451):

3- Halle otros 3 ángulos que tengan el mismo seno que los ángulos dados

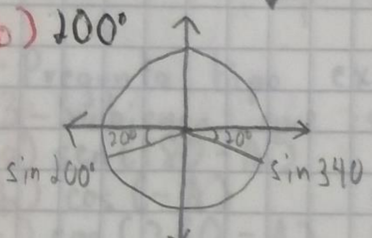
a) $60°$





120
-240
-300

b) $200°$



340
-160
-20

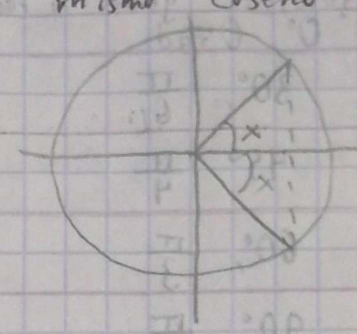
c) -75

285
255
-105

d) 115

65
-245
-295

4.- Halle otros 3 ángulos en grados que tengan el mismo coseno



a) 35°

325°
-35°
-325°

b) 130°

230°
-230
-130

c) 295°

65°
-65°
-295°

d) -240°

120
-120
240

5.- Halle otros 3 ángulos en grados que tengan la misma tangente

a) 50°

230°
-130
-310

b) 100°

280°
-80°
-260

c) 220°

40°
-140°
-320°

d) -25°

335
155
-205

Ejemplo 2 (p.452):

Sabiendo que sen 50° = 0.766 (con 3cs) halle el valor de;

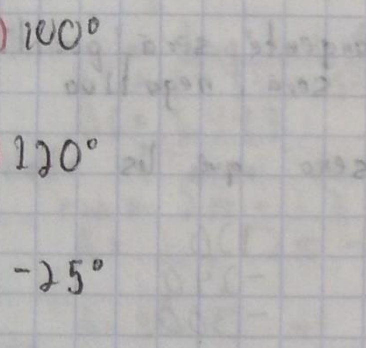
a) cos 50°

$\text{sen}^2 50 + \cos^2 50 = 1$

$0.766^2 + \cos^2 50 = 1$

$\cos 50 = 0.643$

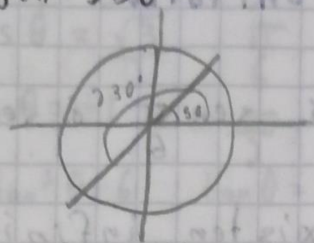
b) cos 130°



$\cos 130° = -\cos 50°$

$\cos 130° = -0.643$

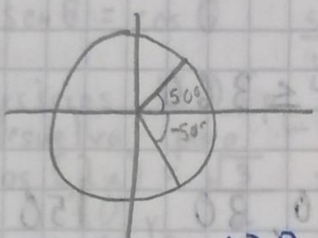
c) sen 230



$\text{sen } 230° = -\text{sen } 50°$

$\therefore \text{sen } 230 = -0.766$

d) cos (-50)



$\cos 50 = \cos(-50)$

$\therefore \cos(-50) = 0.643$

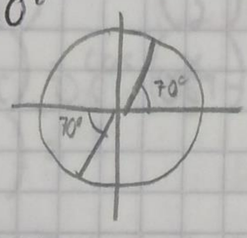
Ejercicios 13B (p. 453):

1- Sabiendo que $\text{sen } 70° = 0.940$ y $\cos 70 = 0.342$ (3 cs) halle:

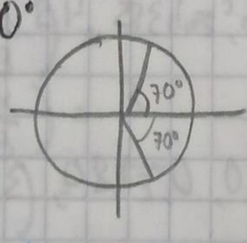
a) $\text{sen } 110° = 0.940$

b) $\cos(-70)° = 0.342$

c) $\cos 250° = -0.342$



d) $\text{sen } 290° = -0.940$



- Pregunta tipo examen -

3- Sabiendo que $\text{sen } A = 0.8$ y $\cos A = 0.6$ halle:

a) $\text{sen}(180 - A) = 0.8$

b) $\cos(-A) = 0.6$

c) $\cos(360 - A) = 0.6$

d) $\text{sen}(180° + A) = -0.8$

e) $\tan A = \dfrac{0.8}{0.6} = \dfrac{4}{3}$

f) $\tan -A = -\dfrac{4}{3}$

g) $\text{sen}(360 - A) = -0.8$

h) $\tan(180 + A) = \dfrac{4}{3}$

Resolución de ecuaciones usando el círculo unitario

Supongamos que queremos resolver: $\operatorname{sen} x = \frac{1}{2}$

Sabemos que $\operatorname{sen} 30 = \frac{1}{2}$ también $\operatorname{sen} 150$ ó $\operatorname{sen} \frac{\pi}{6}$ ó $\operatorname{sen}\left(-\frac{7\pi}{6}\right)$

¿Y ahora que? :)

¿Cual es el valor de x? En realidad existen infinitos valores para x por lo que necesitamos:

- ¿x está en grados o en rad?
- ¿Cuál es su dominio?

Ahora supongamos: $\operatorname{sen} x = \frac{1}{2}$ para $-360 \leq x \leq 360$

Ahora si xd

La ecuación tiene 4 soluciones: $x = -330, -210, 30$ y 150

Ejercicios 13C (p. 455):

1- Resuelva para $-360° \leq x \leq 360°$

a) $\operatorname{sen} x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ $x = 60, 120, -300, -240$ $x = -300, -240, 120, 60$

b) $\cos x = -\frac{1}{2}$ $x = 120, 240, -120, -240$ $x = -240, -120, 120, 240$

c) $\tan x = 1$ $x = 45, 225, -135, -315$ $x = -315, -135, 45, 225$

d) $\operatorname{sen} x = 0$ $x = 0$, $x = 180$, 360 $x = -360, -180, 0, 180, 360$

e) $\cos^2 x = \frac{1}{2}$ $\cos x = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ $x = 45$, $x = 315$, -45, -315 $x = -315, -45, 45, 315$

f) $\tan^2 x = \frac{1}{3}$ $\tan x = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ $x = 30, 210, -330, -150$ $x = -330, -150, 210, 30$

2- Resuelva para $-2\pi \leq x \leq 2\pi$

a) $\operatorname{sen} \theta = \frac{1}{2}$ $x = \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, -\frac{11\pi}{6}, -\frac{7\pi}{6}$

b) $\tan\theta = 0$ $\quad 0 \quad \pi \quad 2\pi \quad -2\pi \quad -\pi$

c) $\cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$ $\quad \frac{\pi}{6}, -\frac{\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}, -\frac{11\pi}{6}$

d) $\text{sen}\,\theta = -1$ $\quad -\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2},$

e) $2\tan^2\theta = 6$ $\quad \tan\theta = \sqrt{\frac{6}{2}}$ $\quad \frac{\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}, -\frac{5\pi}{3}, -\frac{2\pi}{3}$

$\tan\theta = \sqrt{3}$

f) $\text{sen}\,\theta = \cos\theta$ $\quad \frac{\text{sen}\,\theta}{\cos\theta} = 1$ $\quad \tan\theta = 1$ $\quad \frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, -\frac{3\pi}{4}, -\frac{7\pi}{4}$

Ejercicios 13D (p. 456):

1- Resuelva para $-180 \leq x \leq 180$

a) $\cos(2x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ $\quad x = 15, -15, 165, -165$

30 $\quad$ 30 $\quad$ -30 $\quad$ 330

b) $6\,\text{sen}(2x) - 2 = 1$

$\text{sen}(2x) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ $\quad x = 15, 75, -165, -105$

30 $\quad$ 30 $\quad$ 150 $\quad$ -330 $\quad$ -210

c) $\text{sen}\left(\frac{x}{2}\right) - \cos\left(\frac{x}{2}\right) = 0$

$\text{sen}\left(\frac{x}{2}\right) = \cos\left(\frac{x}{2}\right)$

$\tan\left(\frac{x}{2}\right) = 1$ $\quad x = 90, \cancel{270}$

45 $\quad$ 45 $\quad \cancel{135}$

d) $\text{sen}^2\left(\frac{x}{3}\right) = 3\cos^2\left(\frac{x}{3}\right)$ $\quad x = 180$

60

$\tan^2\left(\frac{x}{3}\right) = 3$

$\tan\left(\frac{x}{3}\right) = \sqrt{3}$

60

2- Resuelva para $-\pi \leq \theta \leq \pi$

a) $\text{sen}(2\theta) = -\frac{1}{2}$ $\quad = -\frac{\pi}{12}, -\frac{\cancel{13}\pi}{12}$

$-\frac{\pi}{6}$ $\quad -\frac{\pi}{6}$ $\quad \frac{13\pi}{6}$

b) $\tan(3\theta) = 1$ $\quad = \frac{\pi}{12}, \frac{5\pi}{12}, -\frac{\pi}{4}, -\frac{7\pi}{12}$

$\frac{\pi}{4}$ $\quad \frac{\pi}{4}$ $\quad \frac{5\pi}{4}$ $\quad -\frac{3\pi}{4}$ $\quad -\frac{7\pi}{4}$

c) $\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{1}{2}$

$\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$ $\quad = \frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}$

$\frac{\pi}{4}$ $\quad \frac{\pi}{4}$ $\quad -\frac{\pi}{4}$

d) $\operatorname{sen}^2\left(\frac{2\theta}{3}\right) = 1$ $\qquad \frac{3\pi}{4}$, $\cancel{\frac{5\pi}{4}}$

$\operatorname{sen}\left(\frac{2\theta}{3}\right) = 1$

$90 \quad \frac{\pi}{2}$

Identidades Trigonométricas

$\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$ ✓

$\tan x = \dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$ ✓

— Has desbloqueado una nueva identidad —

- $\cos(2\theta) = 1 - 2\operatorname{sen}^2\theta$

Y con ella has desbloqueado:

- $\cos(2\theta) = 2\cos^2\theta - 1$
- $\cos(2\theta) = \cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta$

También has desbloqueado:

- $\operatorname{sen}(2\theta) = 2\operatorname{sen}\theta\cos\theta$

Veamos qué puedes hacer con tu nuevo arsenal

¿Estás retándome? >:v

Ejercicios 13E (p. 460):

— Preguntas tipo examen —

1- Sabiendo que $\operatorname{sen}\theta = \frac{5}{6}$ y $0° \leq \theta < 90°$ halle

a) $\operatorname{sen}(2\theta)$

$\operatorname{sen}(2\theta) = 2\operatorname{sen}\theta\cos\theta$

$\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1$

$\frac{25}{36} + x^2 = 1 \qquad x^2 = \frac{11}{36} \qquad x = \frac{\sqrt{11}}{6}$

$2 \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{\sqrt{11}}{6} = \frac{10\sqrt{11}}{36} = \frac{5\sqrt{11}}{18}$

b) $\cos(2\theta) = \cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta$

$\frac{11}{36} - \frac{25}{36} = -\frac{14}{36} = -\frac{7}{18}$

c) $\tan(2\theta)$

$\left[\dfrac{\frac{5\sqrt{11}}{18}}{-\frac{7}{18}}\right] \qquad \dfrac{5\cdot\sqrt{11}\cdot\cancel{18}}{\cancel{18}\cdot -7} \qquad -\dfrac{5\sqrt{11}}{7}$

2- Sabiendo que $\cos x = -\frac{2}{3}$ y $90° < x < 180$ halle

a) $\operatorname{sen}(2x)$

$x^2 + \left(-\frac{2}{3}\right)^2 = 1 \qquad x^2 + \frac{4}{9} = 1 \qquad x^2 = \frac{5}{9} \qquad x = \frac{\sqrt{5}}{9}$

$\text{sen}(2\theta) = 2 \cdot -\frac{2}{3} \cdot \frac{\sqrt{5}}{3} = -\frac{4\sqrt{5}}{9}$

b) $\cos(2x)$

$\cos(2\theta) = \frac{5}{9} - \frac{4}{9} = \frac{1}{9}$

c) $\tan(2x)$ $\frac{-\frac{4\sqrt{5}}{9}}{\frac{1}{9}} = -4\sqrt{5}$

Ejercicios 13F (p. 461):

1- Resuelva para $0° \leq x \leq 180$

a) $\text{sen}(2x) = \cos x$

$2\,\text{sen}\,x \cos x = \cos x$

$2\,\text{sen}\,x = 1$

$\text{sen}\,x = \frac{1}{2}$ $x = 30°, 150°$

b) $\text{sen}(2x) = \cos(2x)$

$\cancel{\tan}(2x) = 1 \rightarrow \tan(2x) = 1$ $\tan(45) = 1$

$\tan(135) = 1$

$x = 22.5, 112.5$

c) $(\text{sen}\,x + \cos x)^2 = 0$

$\text{sen}^2 x + 2\,\text{sen}\,x \cos x + \cos^2 x = 0$

$1 + \text{sen}(2x) = 0$

$\text{sen}(2x) = -1$ $\text{sen}\,90$ $x = 135$

$x = \cancel{-45}$

d) $\cos^2 x = \frac{1}{2}$

$\cos x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}} = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$ $\therefore$ $x = 45$

$x = 135$

3- Resuelva para $0 \leq x \leq \pi$

a) $\tan x = \text{sen}\,x$

$\frac{\text{sen}\,x}{\cos x} = \text{sen}\,x$

$\text{sen}\,x = \text{sen}\,x \cos x$ ó $\sin x = 0 \rightarrow x = \pi$

$1 = \cos x$ $\underline{x = 0}$

b) $2\cos^2 x - 1 = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\cos 2x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ $\frac{\pi}{4} \rightarrow$ $x = \frac{\pi}{8}$

$\frac{7\pi}{4} \rightarrow$ $x = \frac{7\pi}{8}$

¿ c) $\cos(2x) = \cos x$

$2\cos^2 x - 1 - \cos x = 0 \rightarrow 2x^2 - x - 1$

$(2x-2)(2x+1)$

$(\cos x - 1)(2\cos x + 1) = 0 \leftarrow (x-1)(2x+1)$

$\cos x = 1$ $\quad$ $\cos x = -\frac{1}{2}$

$x = 0$ $\quad$ $x = \frac{2\pi}{3}$

¿ d) $\operatorname{sen}(4x) = \operatorname{sen}(2x)$

$\operatorname{sen}(4x) = \operatorname{sen}(2x)$

$\operatorname{sen}(4x) = 2\operatorname{sen}x\cos x$

$2\operatorname{sen}(2x)(\cos(2x)) = \operatorname{sen}(2x)$

$2\operatorname{sen}(2x)(\cos(2x)) + \operatorname{sen}(2x) = 0$

$[\operatorname{sen}(2x)]\cdot[2\cos(2x) - 1] = 0$

$\operatorname{sen} 2x = 0$ $\quad$ $2\cos(2x) - 1 = 0$

$2x = 0, \pi, 2\pi$ $\quad$ $\cos(2x) = +\frac{1}{2}$

$x = 0, \frac{\pi}{2}, \pi$

$2x = \frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}$

$x = \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}$

Representación Gráfica de funciones circulares

Ya conocemos muchos ángulos y si graficamos $y = \operatorname{sen} x$ obtendremos los mismos valores de seno que en el círculo unitario:

~~yes~~ Si comparamos las funciones seno y coseno encontramos algunas similitudes

- Las curvas tienen igual tamaño y forma pero difieren en que la curva seno pasa por $(0, 0)$ y la coseno por $(0, 1)$
- Las funciones son periodicas, el periodo es de $360°$ o 2π
- Ambas tienen amplitud de 1

Ejercicios 13 G (p. 467):

Resuelva utilizando la Calculadora

1- $\operatorname{sen} x = \frac{1}{4}$, $-360° \leq x \leq 360$ $\quad$ $x = -346$, -194, 14, 166

2- $\cos\theta = \sqrt{0.8}$, $-180° \leq x \leq 180$ $\quad$ $x = -26$, 26

Haces lo mismo para radianes pero cambias la calcu a radianes >:v

$\frac{360}{2}$

Función Tangente
Es una función periódica, existen asíntotas, su periodo es 180°
y los valores no definidos son todos aquellos: 180x - 90
Los ejercicios con la graficadora son iguales :v

Traslaciones y estiramientos de funciones trigonométricas
Traslación: Igual que todas :v (Una traslación horizontal es un desplazamiento de fase)
Estiramiento: Igual
Pueden combinarse estas para diferentes funciones

Modelizaciones que utilizan las funciones seno y coseno
Para modelizar datos utilizando la función coseno necesitamos conocer:
- La amplitud de la función
- La traslación horizontal
- La traslación vertical
- El periodo

Ejercicios 13L (p. 486):
Estime el periodo, la amplitud y las traslaciones
Escriba una función coseno en la forma $y = a\cos(b(x-c))+d$

1- Datos en el libro :v
Amplitud: 4.8
TH: 0
TV: 7
Periodo: 2

$4.8\cos(180x)+7$

360° = 1 periodo
Si 1 periodo = 2 → 360 ÷ 2 = 180

2- Datos en el libro :v
Amplitud: 6.3
TH: -5
TV: 15.6
Periodo: 30

$6.3\cos(12(x+5))+15.6$

360 ÷ 30 = 12

Unidad 4: Vectores

Aprendizajes Esperados:

- Los vectores como desplazamientos en el plano y en el espacio
- Componentes de un vector: representación en columna:

$$v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = v_1 i + v_2 j + v_3 k$$

- Enfoques algebraico y geométrico de los siguientes temas:
  - Suma y diferencia de dos vectores: el vector nulo, el vector $-v$
  - Multiplicación por un escalar, kv; vectores paralelos
  - Módulo de un vector: $|v|$
  - Vectores unitarios: la base i, j, k
  - Vectores de posición $\vec{OA} = a$
  - $\vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA} = b - a$

- Producto escalar de dos vectores
- Vectores perpendiculares; vectores paralelos
- Ángulo entre dos vectores

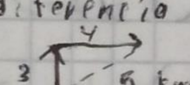
- Ecuacion vectorial de una recta en dos y tres dimensiones: $r = a + tb$
- Ángulo entre dos rectas

- Distinción entre rectas coincidentes y paralelas
- Cálculo del punto de intersección entre dos rectas
- Determinación de la posición relativa de dos rectas

Conceptos básicos

Si avanzo 4 km al Norte y 3 km al Este

La distancia recorrida es $4 + 3 = 7$

El desplazamiento es la diferencia del punto inicial y final, por teorema de Pitagoras  serian 5

Vector: Cantidad que tiene medida (magnitud) y dirección.
El desplazamiento y la velocidad son magnitudes vectoriales

Escalar: Cantidad que tiene medida pero no magnitud. La distancia y la celeridad son cantidades escalares

Celeridad $\neq$ velocidad

Representación de Vectores

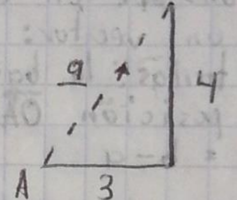
Considerando los puntos $A(2, 3)$ y $B(5, 7)$ en el plano cartesiano.
Para describir el movimiento desde A a B podríamos decir: "Nos movemos 3 unidades en la dirección positiva del eje x y 4 unidades en la dirección positiva del eje y

El 3 se denomina la componente horizontal, o "x" y el 4 componente vertical, o "y". Tanto la dirección como la longitud del movimiento tienen importancia.
Este vector puede escribirse de una variedad de formas:
El segmento AB representa el vector $\overrightarrow{AB}$ donde la flecha indica el movimiento de A a B. Las componentes de éste se pueden representar en un vector columna:

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Los vectores también pueden representarse usando una letra minúscula en negrita: $\mathbf{a} = \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$

Escrito a mano se subraya: $\underline{a}$



También el vector se puede representar mediante vectores unitarios o versores. Podemos escribir $\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ como $3i + 4j$ donde i y j están como "x" y "y" respectivamente. A $\underline{i}$ y $\underline{j}$ se les llama vectores base.
En un plano tridimensional introducimos la letra k, por ejemplo:

$$\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = 3i - 2j + k$$

- El vector unitario en "x" es i
  En 2 dimensiones: $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ En 3d: $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$
- En "y" es j En 2d: $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ En 3d: $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$
- En "z" es k En 3d $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Estos son vectores base

Ejemplo 1 (p. 409):
a) Escriba $\underline{a} = \begin{pmatrix} 6 \\ -7 \end{pmatrix}$ usando vectores unitarios $\underline{a} = 6i - 7j$
b) Escriba $-i + 5k$ en vector columna

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$2x^2 + x - 1$ $\qquad$ $(2x + 2)(2x - 1)$

$4x^2 + 1(2x) - 2$ $\qquad$ $x + 1 \quad 2x - 1$

Magnitud de un vector

La magnitud de $\overrightarrow{AB}$ es la longitud del vector y se denota con $|\overrightarrow{AB}|$

Otros nombres para la magnitud son módulo, longitud, norma y medida

Se calcula con el teorema de Pitagoras

Si $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = ai + bj$ entonces $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{a^2 + b^2}$

En 3d es igual $= \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$

Ejercicios 12A (p. 410):

1- Escriba estos vectores usando vectores unitarios

a) $\underline{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ $\quad -2i + 3j$

b) $\underline{y} = \begin{pmatrix} 0 \\ 7 \end{pmatrix}$ $\quad 7j$

c) $\underline{z} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ $\quad i + j - k$

2- Escriba estos vectores en forma de vector columna

a) $\overrightarrow{AB} = 2i + 3j$ $\quad \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

b) $\overrightarrow{CD} = -i + 6j - k$ $\quad \begin{pmatrix} -1 \\ 6 \\ -1 \end{pmatrix}$

c) $\overrightarrow{EF} = k$ $\quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Vectores iguales, negativos y paralelos

Dos vectores son iguales si tienen igual dirección, sentido y magnitud; sus componentes i, j, k son iguales y la columna también

Si $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ y $\overrightarrow{MN} = \begin{pmatrix} -a \\ -b \end{pmatrix}$ entonces $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{MN}$. $\overrightarrow{MN}$ es un vector opuesto

$\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$

Dos vectores son paralelos si uno es múltiplo escalar del otro

Entonces, si $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{RS}$ son paralelos, $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{RS}$ donde k es una cant. escalar

Por ejemplo $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{CD} = \begin{pmatrix} 4 \\ 10 \end{pmatrix}$ ambos son paralelos

Ejercicios 12B (p. 413):

2- ¿Cuáles de estos vectores son paralelos a $i + 7j$?

a) $\begin{pmatrix} 0.1 \\ 0.7 \end{pmatrix}$ Si

b) $\begin{pmatrix} -1 \\ -7 \end{pmatrix}$ Si

c) $\begin{pmatrix} -0.05 \\ -0.03 \end{pmatrix}$ No

d) $\begin{pmatrix} -10 \\ 70 \end{pmatrix}$ No

e) $60i + 420j$ Si

f) $6i - 42j$ No

g) $-i + 7j$ No

$4^2 + x^2 = (k2\sqrt{13})^2$

3- ¿Para qué valor de t estos vectores son paralelos?

a) $r = 4i + tj$ $4 = 14x$ $t = -12 \cdot 0.28$

$s = 14i - 12j$ $x = 0.28$ $t = -3.429$

b) $\underline{a} = \begin{pmatrix} t \\ -8 \end{pmatrix}$ $t = 7 \cdot 0.8$

$\underline{b} = \begin{pmatrix} 7 \\ -10 \end{pmatrix}$ $-8 = -10x$ $t = 5.6$

$x = 0.8$

5- En el cubo OABCDEFG la longitud de cada arista es una unidad. Exprese estos vectores en función de i, j y k

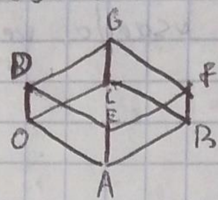
a) $\vec{OG}$ $j + k$

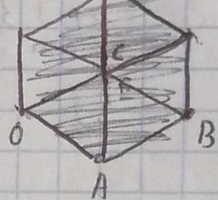
b) $\vec{BD}$ $-i + j - k$

c) $\vec{AD}$ $-i + j$

d) $\vec{OM}$ donde M es el punto medio de GF

$0.5i + j + k$





Vectores de Posición

Son vectores que dan la posición relativa de un punto respecto a un punto fijo O

El punto P con coordenadas (x, y) tiene vector de posición

$\vec{OP} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = xi + yj$

Vectores Resultantes

Consideremos A (2, 3) y B (6, 6)

Vemos que $\vec{AB} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$

Vemos que este movimiento se describe como un movimiento directo de A a B, pero también de A a O seguido de O a B

Decimos entonces: $\vec{AB} = \vec{AO} + \vec{OB}$

El vector $\vec{AB}$ se llama resultante de los vectores $\vec{AO}$ y $\vec{OB}$

Recordemos que $\vec{AO} = -\vec{OA}$ $\therefore$ $\vec{AB} = -\vec{OA} + \vec{OB}$ $\rightarrow$ $\vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA}$

Entonces para hallar el vector resultante $\vec{AB}$ podemos restar el vector de posición A al de B

Ejercicios 12C (p. 416):

1- P tiene coordenadas (7, 4) Q (2, 3). Halle $\vec{PQ}$ y $\vec{QP}$

$\vec{PQ} = \begin{pmatrix} -5 \\ -1 \end{pmatrix}$ $\vec{QP} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}$

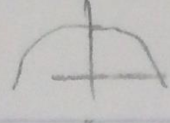
6- $\vec{AB} = \begin{pmatrix} 1 \\ y \\ -2 \end{pmatrix}$ $\vec{BC} = \begin{pmatrix} 2x \\ -3 \\ z \end{pmatrix}$ $\vec{AC} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ x+y \end{pmatrix}$

Halle x, y, z

$x = 0.5$ $x + y = 7.5$

$y = 7$

$z = 9.5$



Los puntos son colineales si pertenecen a una misma recta?

Ejercicios 12 D (p. 417):

1- Muestre que los puntos A, B y C con vectores de posición $i-2j+3k$, $-2i+3j-k$, $4i-7j+7k$ respectivamente, son colineales

$A = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ $C = \begin{pmatrix} 4 \\ -7 \\ 7 \end{pmatrix}$

$\sqrt{6}$ $\sqrt{6}$ $\frac{2}{3}\sqrt{6}$

A ver awanta

Para resolver este ejercicio debes resolver el 3- de los ejercicios 12 B y para eso debes saber esto:

Ejemplo 4 (p. 413):

¿Para qué valores de s y t estos vectores resultan paralelos?

$\underline{m} = 3i + tj - 6k$

$\underline{n} = 9i - 12j + sk$

Si son paralelos $m = xn$

$3i + tj - 6k = x(9i - 12j + sk)$

$3i + tj - 6k = 9xi - 12xj + sxk$

$3 = 9x$

$\frac{1}{3} = x$

$\therefore\ t = -12 \cdot \frac{1}{3} = 4$

$-6 = \frac{1}{3} \cdot s \rightarrow s = -18$

Ahora si retomemos

?

Ejercicios 12 D (p. 417):

1- Lo tienes arriba, vuélvelo a leer >:v

$\overline{AB} = \overline{OB} - \overline{OA} \rightarrow (-2i + 3j - k) - (i - 2j + 3k)$

$\overline{AB} = -3i + 5j - 4k$

$\overline{AC} = \overline{OC} - \overline{OA} \rightarrow (4i - 7j + 7k) - (i - 2j + 3k)$

$\overline{AC} = 3i - 5j + 4k$

Como $\overline{AB} = -\overline{AC}$ $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$ son paralelos

Y tener en común el punto A las convierte en colineales

- Pregunta tipo examen -

2- Los puntos A, B y C tienen coordenadas (2, 3, -3), (5, 1, 5) y (8, -1, 13) respectivamente

a) Halle $\overrightarrow{AB}$

$$(5i + j + 5k) - (2i + 3j - 3k)$$
$$\overrightarrow{AB} = 3i - 2j + 8k$$

b) Muestre que A, B y C son colineales

$$\overrightarrow{AB} = 3i - 2j + 8k$$
$$\overrightarrow{AC} = (8i - j + 13k) - (2i + 3j - 3k)$$
$$\overrightarrow{AC} = 6i - 4j + 16k$$
$$2\overline{AB} = \overline{AC}$$ ∴ son paralelos y A es un punto en común ∴ son colineales

Distancia entre dos puntos en tres dimensiones

Si $A = (x_1, y_1, z_1)$ entonces $\underline{a} = \overrightarrow{OA} = x_1 i + y_1 j + z_1 k$
y si $B = (x_2, y_2, z_2)$ entonces $\underline{b} = \overrightarrow{OB} = x_2 i + y_2 j + z_2 k$

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$$
$$= \underline{b} - \underline{a}$$
$$= (x_2 - x_1)i + (y_2 - y_1)j + (z_2 - z_1)k$$

Distancia AB:

$$\sqrt{(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2 + (z_2-z_1)^2}$$

Ejercicios 12 E (p. 418):

1- Halle el vector $\overrightarrow{AB}$ desde A(-1, 5, 1) hasta B(4, 5, -1) y a partir de lo anterior, determine la distancia entre dos puntos

$$AB = OB - OA$$
$$AB = (4i + 5j - k) - (-i + 5j + k)$$
$$AB = 5i - 2k$$
$$\sqrt{(5)^2 + (-2)^2} \rightarrow \sqrt{29}$$

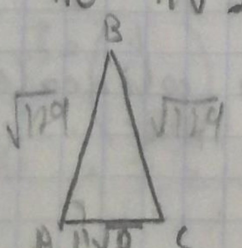
- Pregunta tipo examen -

2- El vector A tiene vector de posición $\begin{pmatrix} -5 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$, B tiene vector de posición $\begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}$ y C $\begin{pmatrix} 8 \\ 10 \\ 1 \end{pmatrix}$

Muestre que el triángulo ABC es isósceles y calcule $\measuredangle CAB$

$$AB = \sqrt{(11)^2 + (-2)^2 + (2)^2} = \sqrt{129}$$
$$BC = \sqrt{129}$$
$$AC = 11\sqrt{2}$$

AB = BC ∴ es isósceles



$$\cos A = \frac{\sqrt{129}^2 + 11\sqrt{2}^2 - \sqrt{129}^2}{2 \cdot \sqrt{129} \cdot 11\sqrt{2}} = A = 46.778$$

Vectores Unitarios

Es un vector de longitud 1 en una dirección dada.
Para hallar un vector unitario en la dirección de un vector a, es decir $|a|$ y luego multiplicar el vector a por $\frac{1}{|a|}$. Este vector tendrá la misma dirección dado que es múltiplo escalar de a y tendrá longitud 1 dado que mide $\frac{1}{|a|} \times$ la longitud del vector original.
- Entonces se usa la fórmula $\frac{a}{|a|}$
- Para hallar un vector de longitud k en la dirección de a se usa la fórmula $k\frac{a}{|a|}$

Ejemplo 9 (p. 419):

a) Halle el vector unitario en la dirección del vector $3i + 4j$

El $3i + 4j$ tiene longitud $\sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$

Por lo tanto un vector de longitud 1 será $\left(\frac{1}{5}\right)(3i + 4j) = \frac{3}{5}i + \frac{4}{5}j$

b) Halle un vector de longitud 10 en dirección del vector $\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$

El vector $\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ tiene longitud $\sqrt{10}$. El vector $\frac{1}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ tiene longitud 1

Por lo tanto, un vector de longitud 10 es $\frac{10}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$

Ejercicios 12F (p. 420):

1- Muestre que $\frac{3}{5}i + \frac{4}{5}j$ es un vector unitario

$$1 = \sqrt{\frac{9}{25} + \frac{16}{25}} = \sqrt{\frac{25}{25}} = 1$$ Por eso mero :v

3- Halle un vector unitario paralelo a $4i - 3j$

$$\sqrt{4^2 + 3^2} = 5 \quad \therefore \quad \frac{4}{5}i - \frac{3}{5}j$$

6- $ai + 2aj$ es un vector unitario. Si $a > 0$, halle a

$$1 = \sqrt{a^2 + (2a)^2} = \sqrt{5a^2} \qquad a\sqrt{5} = 1$$
$$a = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

Suma y Diferencia de Vectores

Supongamos que tenemos dos vectores $u = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix}$ y $v = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$

$u + v$ se interpreta geométricamente como un primer movimiento a lo largo de u seguido de un movimiento por v.
El vector resultante $u + v$ es el tercer lado del triángulo formado cuando u y v se disponen de forma tal que el origen de v coincide con el extremo de u

La suma de vectores es conmutativa, es decir

$\underline{u} + \underline{v} = \underline{v} + \underline{u}$

Y es muy fácil hacerlo, observemos:

Por ejemplo:

$$\underline{u} + \underline{v} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5+3 \\ 0+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Diferencia de Vectores

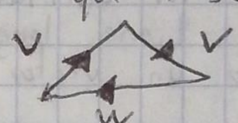
Consideremos $\underline{u}$ y $\underline{v}$ como los anteriores

$\underline{u} - \underline{v}$ se interpreta como un movimiento a lo largo de $\underline{u}$ seguido de un movimiento a lo largo del opuesto de $\underline{v}$ es decir $\underline{-v}$

La resta no es conmutativa, es decir $\underline{u} - \underline{v} \neq \underline{v} - \underline{u}$

El Vector Nulo

$\underline{u} + \underline{v} + \underline{w} = 0$ en todas dimensiones ya que resulta en una vuelta al punto de partida:



Ejercicios 12G (p. 422)

2- Dados $\underline{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ $\underline{b} = \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \end{pmatrix}$ y $\underline{c} = \begin{pmatrix} -5 \\ -3 \end{pmatrix}$ halle

a) $a + b = \begin{pmatrix} -2 \\ -8 \end{pmatrix}$

b) $b - c = \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \end{pmatrix}$

c) $\frac{1}{2}(a + c) = \begin{pmatrix} -1.5 \\ -3 \end{pmatrix}$

d) $a + 3b - c$ $\begin{pmatrix} -5 \\ 9 \end{pmatrix}$

e) $3c - 2b + 5a$

$$\begin{pmatrix} -15 \\ -9 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -8 \\ 10 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 10 \\ 15 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 17 \\ -4 \end{pmatrix}$$

5- Los vectores $\underline{a}$ y $\underline{b}$ son $\underline{a} = \begin{pmatrix} x \\ x+y \end{pmatrix}$ y $\underline{b} = \begin{pmatrix} 6-y \\ -2x-3 \end{pmatrix}$

Si $a = b$ halle "x" y "y"

$x = 6 - y$

$x + y = -2x - 3$

$(6 - y) + y = -2(6 - y) - 3$

$6 = -12 + 2y - 3$

$21 = 2y$

$10.5 = y$

$x = -4.5$

$\rightarrow$ $\boxed{\begin{matrix} y = 10.5 \\ x = -4.5 \end{matrix}}$

6- Los vectores $\underline{a}$ y $\underline{b}$ son $\underline{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ t \\ u \end{pmatrix}$ y $\underline{b} = \begin{pmatrix} t-s \\ 3s \\ t+s \end{pmatrix}$

Si $3a = 2b$ calcule "s", "t" y "v"

$9 = 2t - 2s$ $\longrightarrow$ $\boxed{\begin{matrix} 9 = t \\ 4.5 = s \\ 9 = v \end{matrix}}$

$3t = 6s \rightarrow \frac{1}{2}t = s$

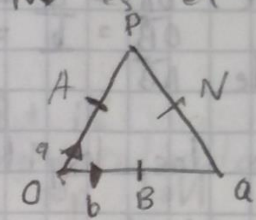
$3v = 2t + 2s$

Demostraciones Geométricas

Aun cuando no contemos con vectores específicos se puede usar lo que se sabe para deducir algunos resultados geométricos

Ejercicios 12 H (p. 424):

1.- En este triangulo $OA = AP$, $BQ = 3\,OB$, N es el punto medio de PQ y $\underline{a} = \vec{OA}$, $\underline{b} = \vec{OB}$



Muestre que:

a) $\vec{AP} = \underline{a}$

Si $OA = AP$

y $\underline{a} = OA$

entonces $\underline{a} = \vec{AP}$

b) $\vec{AB} = \underline{b} - \underline{a}$

$b = \vec{OB}$

$a = \vec{OA}$

Sabemos que para sacar esta resultante $\vec{AB}$ restamos los componentes anteriores e incluso hay una pequeña fórmula: $\vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA}$

c) $\vec{PQ} = 4b - 2a$

$\vec{PQ} = \vec{OQ} - \vec{OP}$

Resulta que $BQ + 3OB = OQ \therefore OQ = 4b$

También, si $a = OA$ y $a = OP$, $\therefore OP = 2a$

entonces sabemos: $\vec{PQ} = 4b - 2a$

d) $\vec{PN} = 2b - a$

$2PN = PQ$ porque N es el punto medio

entonces $PN = \dfrac{4b - 2a}{2} \therefore PN = 2b - a$

e) $\vec{ON} = a + 2b$

$NQ = OQ - ON \rightarrow QN = ON - OQ$

$QN = -PN = -2b + a$

$OQ = 4b$

$QN + OQ = ON \rightarrow (-2b + a) + (4b) = ON$

$2b + a = ON$

f) $\vec{AN} = 2b$

Podemos trabajarlo como un triangulo semejante a otro POQ es semejante a PAN

Si $PO = 2PA$ y $PQ = 2PN$ por semejanza de triangulos, $OA = 2AN \rightarrow \dfrac{4b}{2} = AN \therefore AN = 2b$

Ja, demostraciones de primaria 😎

Producto Escalar

A menudo necesitamos calcular el ángulo entre dos vectores cuando resolvemos problemas

Investigación: El Teorema del Coseno (p. 426):

Considere $\vec{OA} = \underline{a} = 3i + 4j$

$\vec{OB} = \underline{b} = 5i + 12j$

1- Halle $\vec{AB}$

$2i + 8j$

2- Halle las longitudes OA, OB, y AB ($|\vec{OA}|$, $|\vec{OB}|$ y $|\vec{AB}|$)

Nel q flojera :v

Puedes hallar $\cos \angle AOB$ con teorema del coseno dando $14.3°$ en este caso

Supongamos $\vec{OA} = \underline{a} = a_1 i + a_2 j$

$\vec{OB} = \underline{b} = b_1 i + b_2 j$

Puede simplificarse la expresión y llegar a:

$$\cos\theta = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2}{|a|\,|b|}$$

o alternativamente: $a_1 b_1 + a_2 b_2 = |a|\,|b| \cos\theta$

$a_1 b_1 + a_2 b_2$ se llama el producto escalar de los vectores $\underline{a}$ y $\underline{b}$

Se puede hallar multiplicando los coeficientes de i y los de j y (en 3d) los de k y sumar al chile todo :v

- El producto escalar $a \cdot b = |a|\,|b| \cos\theta$ donde θ es el ángulo entre ambos vectores

El angulo entre dos vectores

Si no conocemos el valor de θ usamos

$$\cos\theta = \frac{a \cdot b}{|a|\,|b|}$$

y no desarrollar por completo el teorema del coseno

Propiedades especiales del producto escalar

- Vectores perpendiculares

Dos vectores son perpendiculares SI Y SOLO SI su producto escalar es 0

Porque $a \cdot b = |a|\,|b| \cos 90° \therefore a \cdot b = 0$

- Vectores paralelos

Si dos vectores son paralelos $a \cdot b = |a|\,|b| \cos 0°$

$a \cdot b = |a|\,|b|$

- Vectores coincidentes

$a \cdot a = a^2$ porque $a \cdot a = |a|\,|a| \cos 0°$

Ejercicios 12 I (p. 428):

1- Dados $\underline{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ $\underline{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \end{pmatrix}$ $\underline{c} = \begin{pmatrix} -5 \\ -2 \end{pmatrix}$ halle:

a) $\underline{a} \cdot \underline{b} = 2 + (-20) = -18$

b) $\underline{b} \cdot \underline{c} = -5 + (10) = 5$

c) $\underline{a} \cdot \underline{a} = 20$

d) $\underline{c} \cdot (a+b) = -15 + (2) = -13$

e) $(c+a) \cdot b = -3 + (40) = 37$

3- Determine si estos pares de vectores son perpendiculares, paralelos o nada al chile :v

a) $2i + 4j$ $\quad 8 - 8 = 0$ Perpendiculares
$\quad 4i - 2j$

b) $\underline{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\underline{d} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ $\quad 2 + 2 = 4$ Nada :v
$\quad |a| \cdot |b| = 5$

c) $\underline{u} = \begin{pmatrix} -8 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ $\underline{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ $\quad -32 + (-2) - 2 = -36$ Son paralelos
$\quad |a| \cdot |b| = 36 \therefore$

d) $3i - 2j + k$ $\quad 9 - 4 - 1 = 4$ Nada
$\quad 3i - 2j - k$ $\quad |a| |b| = 14$

e) $\overrightarrow{OX} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{OZ} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\quad 0 + 0 + 0 = 0$ Perpendiculares

f) $2i - 8j$ $\quad -2 - 32 = -34$ Paralelos
$\quad -i + 4j$ $\quad |a| |b| = 34$

g) $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ $\quad -2 - 2 = 4$ Paralelos
$\overrightarrow{CD} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ $\quad |a| |b| = 4$

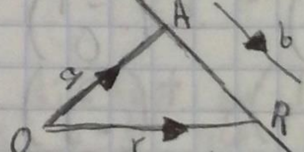
Ecuación Vectorial de la Recta

Supongamos que una recta pasa por el punto A, donde A tiene un vector de posición $\underline{a}$ y que la recta es paralela al vector $\underline{b}$

Ahora, si R es cualquier punto que pertenece a la recta, $\overrightarrow{AR}$ es paralelo a $\underline{b}$. Por lo tanto debe existir un número t tal que $\overrightarrow{AR} = t\underline{b}$

Calquier punto R que pertenece a la recta puede hallarse partiendo del origen y desplazándose por el vector $\underline{a}$ hasta alcanzar la recta

Por lo que:



$$\underline{r} = \overrightarrow{OR} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AR} = \underline{a} + t\underline{b}$$

Donde $\underline{r}$ es el vector de posición general de un punto que pertenece a la recta

Ejemplo 14 (p. 431):

a) Halle una ecuación vectorial de la recta que pasa por (1, -1, 3) y es paralela a $-i + 3j - k$

$a = i - j + 3k$ $b = -i + 3j - k$

$r = (i - j + 3k) + t(-i + 3j - k)$

b) Halle una ecuación vectorial de la recta que pasa por los puntos A (1, 0, -4) y B (-2, 1, 1)

$OA = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$ $OB = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$AB = OB - OA \therefore AB = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$

A partir de lo anterior, su ecuación sería

$r = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$

c) ~~Los~~ Halle el ángulo agudo entre estas dos rectas

Los vectores directores son

a) $\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$

Usamos $a \cdot b = |a||b| \cos\theta$

$3 + 3 - 5 = \sqrt{11} \cdot \sqrt{35} \cos\theta$

$\frac{1}{\sqrt{11}\sqrt{35}} = \cos\theta \longrightarrow \theta = 87.1°$

Ejercicios 12J (p. 432):

1- Halle una ecuación de la recta que es paralela al vector $\underline{a}$ y que pasa por el punto B con vector de posición $\underline{b}$

a) $\underline{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ $\underline{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$r = (-i + 2j) + t(3i + 2j)$

b) $\underline{a} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix}$ $\underline{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$r = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix}$

2- Halle una ecuación vectorial de la recta que pasa por los puntos dados

a) $(4,5)$ y $(3,-2)$

$a = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}$ $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \end{pmatrix}$

$r = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ 7 \end{pmatrix}$

b) $(4,-2)$ y $(5,-2)$

$a = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}$ ahora $OA = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}$ $OB = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix}$ $AB = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$r = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

3- Halle una ecuación de una recta perpendicular al vector $\underline{a}$ y que pasa por el punto B con vector de posición $\underline{b}$

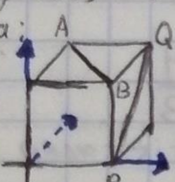
a) $\underline{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ $\underline{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 6 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ $r = \begin{pmatrix} -1 \\ 6 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$

Su perpendicular

Punto de intersección entre dos rectas

Si nos dan dos ecuaciones vectoriales de dos rectas
En 3d, dos rectas pueden cortarse, ser paralelas o alabeadas, watcha:



Ejemplo 15 (p. 434):

Dos rectas tienen ecuaciones $r_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ y $r_2 = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix}$

Muestre que las rectas se cortan y halle el punto donde lo hacen

r_1 y r_2 se cortan si existe un valor t y s tales que

$r_1 = r_2$

$r_1 = \begin{cases} x = 3 + s \\ y = s \\ z = -1 + s \end{cases}$ $r_2 = \begin{cases} x = 6 \\ y = 2 + 4t \\ z = 8t \end{cases}$

Igualamos

$\left.\begin{array}{l} 3 + s = 6 \\ s = 2 + 4t \\ -1 + s = 8t \end{array}\right\}$ $s = 3$ y $t = \frac{1}{4}$

Como sí hay un valor de s y t que satisface a las 3 ecuaciones entonces sí se cortan xd

¿Numa pero donde ?: :v
Ke wena pregunta donoti :v

Sustituyendo en r_1

$$r_1 = \begin{pmatrix}3\\0\\-1\end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \qquad \left.\begin{matrix}3+3=6\\0+3=3\\-1+3=2\end{matrix}\right\} \text{Coordenadas: } (6,3,2)$$

Ejercicios 12K (p. 435):

1.- Pregunta tipo examen -

3.- Una ecuación de la recta l_1 es

$$r = \begin{pmatrix}5\\-1\\2\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}$$

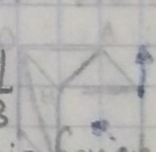
otra ecuación l_2 es

$$r = \begin{pmatrix}3\\-2\\-4\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}$$

Muestre que las rectas se cortan y halle las coordenadas donde pasa

$$5+2t = 3+2s$$
$$-1+t = -2+s \qquad t = -1+s$$
$$2-t = -4+2s$$

$$2-(-1+s) = -4+2s$$
$$2+1-s = -4+2s$$
$$3-s = -4+2s$$
$$\frac{7}{3} = s \qquad t = \frac{4}{3}$$



Y pos si se satisfacen

$$\left(\frac{23}{3}, \frac{5}{3}, -\frac{2}{3}\right)$$

Más vale que luego repases muchos ejercicios de estos >:v

Aplicaciones de Vectores

Ejemplo 16 (p. 437):

El vector de posición de un bote A, t hrs después de dejar el puerto está dado por $r_1 = t\begin{pmatrix}30\\15\end{pmatrix}$. Un segundo bote, $r_2 = \begin{pmatrix}50\\5\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}10\\10\end{pmatrix}$

a) ¿Qué distancia hay entre los botes cuando el primero sale del puerto?

$$r_1 = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} \quad r_2 = \begin{pmatrix}50\\5\end{pmatrix} \qquad \sqrt{50^2+5^2} = \sqrt{2525} = 50.2 \text{ km}$$

b) ¿Qué velocidad tiene cada bote?
Para A; al pasar una hora habra recorrido $\begin{pmatrix} 30 \\ 15 \end{pmatrix}$

Su distancia es:
$$\sqrt{30^2 + 15^2} = \sqrt{1125} = 33.5 \frac{km}{h}$$

Par B, lo que recorre en una hora es $\begin{pmatrix} 10 \\ 10 \end{pmatrix}$

Su distancia es:
$$\sqrt{200} = 14.1 \frac{km}{h}$$

c) ¿Existe peligro de que los botes colisionen si no cambian de dirección?

En x $\quad 30x = 50 + 10x \quad x = 2.5$
$\quad\quad 15x = 5 + 10x \quad x = 1$

} No se satisface en ambas
$\therefore$ No chocan

Los ejercicios 12L son muy similares :v
Ahi tú watchas para hacerles :v

Unidad 5: Estadística y Probabilidad

Aprendizajes Esperados:

- Conceptos de población, muestra, muestra aleatoria, datos discretos y continuos
- Presentación de datos: Distribuciones de frecuencia (tablas), histogramas de frecuencia con intervalos de clase de la misma amplitud
- Diagramas de caja y bigotes; valores no esperados
- Datos agrupados: uso de los valores centrales de los intervalos para los cálculos; amplitud del intervalo; límite superior e inferior de los intervalos; clase modal (No se requiere: Histogramas de densidad de frecuencias)

- Medidas estadísticas y su interpretación
- Medidas de posición central: media, mediana y moda
- Cuartiles y percentiles
- Dispersión: rango; rango intercuartílico, varianza, desviación típica
- Efecto producido por constantes en datos originales
- Aplicaciones

- Frecuencia acumulada; gráficos de la frecuencia acumulada; su uso para hallar mediana, cuartiles y percentiles

- Correlación lineal de variables bidimensionales
- Coeficiente de correlación momento-producto de Pearson, r
- Diagramas de dispersión; rectas de ajuste óptimo
- Ecuación de la recta de regresión de y sobre x
- Uso de la ecuación para realizar predicciones
- Interpretación matemática y de contexto (No se requiere: El coeficiente R^2)

- Conceptos de experimento, resultado, resultados equiprobables, espacio muestral (U) y suceso
- La probabilidad de un suceso A (casos probables ÷ posibles)
- Los sucesos complementarios A y A'
- Uso de diagramas de Venn, diagramas de árbol y tablas de resultados

- Sucesos compuestos, $P(A \cup B)$
- Sucesos incompatibles, o mutuamente excluyentes $P(A \cap B) = 0$
- Probabilidad condicionada; definición $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$

- Sucesos independientes; definición $P(A|B) = P(A) = P(A|B')$
- Probabilidades con y sin reposición

✓ - Concepto de variable aleatoria discreta y sus distribuciones de probabilidad
✓ - Esperanza matemática (media), E(X) para datos discretos
✓ - Aplicaciones

✓ - Distribución binomial
✓ - Media y varianza de una distribución binomial (No se requiere: Demostración de la media y varianza)

✓ - Distribuciones normales y curvas normales
✓ - Tipificación o estandarización de la variable en distribución normal (valores y puntuaciones)
✓ - Propiedades de la distribución normal

ALERTA

A partir de aquí al final de los apuntes se vuelven muy teóricos y hasta la teoría es limitada (porque ya todo lo que resta lo viste >:v)
Por lo que si quieres más profundización de los temas, ni modo K rnal le buscas en internet >:v
Okno xd te la kreiste
Usa los apuntes de 3° a 5° de BI :v

Capítulo 3: Probabilidad

Definiciones

✓ - Suceso es el resultado de un experimento
✓ - Experimento es un proceso para tener resultado
✓ - Experimento aleatorio existe incertidumbre
✓ Espacio muestral ✓
✓ Probabilidad teórica y experimental ✓
Probabilidad subjetiva
Es solo adivinar por eventos anteriores (como un partido de fut)

Diagramas de Venn

✓ Diagrama de Venn
✓ Suceso complementario A'
✓ Intersección de sucesos $(\cap)$
✓ Unión de sucesos $(\cup)$

La Regla de la Adición

✓ $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Sucesos Mutuamente Excluyentes

✓ $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$
Porque:
$$P(A \cap B) = 0$$

Diagramas del espacio muestral y la regla del producto

Se pueden enumerar los resultados de un experimento si no son muchos o hacer diagramas de espacio muestral; ~~ej~~ evento, ~~ej~~ ex

Regla del Producto para sucesos independientes

Dos sucesos A y B son independientes si la probabilidad de que ocurra uno no afecta al otro

Cuando dos sucesos son independientes:

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$

Probabilidad Condicionada

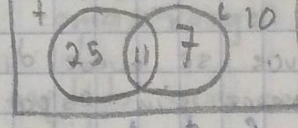
Para dos sucesos A y B la probabilidad de que ocurra A sabiendo que ocurrió B se halla usando:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Ejemplo 11 (p. 86):

De los 53 miembros del personal del colegio, 36 beben té, 18 beben café y 10 se fresean y no beben ni uno de los dos :v

a) ¿Cuántos toman té y café?



11 mens

36

Halle la probabilidad de que

b) Beba té pero no café

$$\frac{25}{53}$$

c) Sabiendo que bebe té, también beba café

$$\frac{11}{36}$$

d) Sabiendo que bebe, no beba café

$$\frac{25}{36}$$

Diagramas de árbol de probabilidad

Son esas cosas que no te salieron en la investigación de mate :v y ya sabes cómo funcionan >:v

Probabilidad sin reposición y Probabilidad Condicionada

Esto significa que la probabilidad de la segunda extracción en un experimento cualquiera depende del resultado de la primera extracción como el típico ejemplo de extraer canicas de colores de una caja :v

Pero esto también ya lo sabes >:v

Aquí acaba probabilidad :v

Pasemos ahora a estadística

Capítulo 8: Estadística descriptiva

Analisis Unidimensional

Contempla una sola variable por ejemplo, la altura de los estudiantes de una clase

La comparación de dos variables, como alturas y pesos se llama análisis bidimensional pero eso lo watchas páginas más adelante

Los datos se clasifican en cualitativos y cuantitativos

Los cualitativos son categóricos y los cuantitativos son medibles :v

Los datos cuantitativos se clasifican en discretos y continuos

- Los discretos son enteros :v
- Los continuos pueden ser medidos (longitud, peso, tiempo) y son decimales :v

¿Cuál es la diferencia entre población y muestra

- Población: Incluye a todos los miembros a estudiar
- Muestra: Subconjunto de la población

Presentación de los Datos

Una tabla de frecuencias es una manera fácil de visualizar los datos. También podemos mostrar datos discretos en un gráfico de barras.

Para los datos continuos se puede dibujar un histograma. Igual al gráfico de barras pero sin espacios entre las barras

Medidas de Posición Central

Moda: Valor más frecuente

Media: Promedio :v $\quad$ $\text{Media} = \dfrac{\text{Suma de los valores}}{\text{Número de valores}}$

Ejemplo 6 (p. 263): Halle la media del siguiente conjunto de datos

a)

Nota	Frecuencia	fn
0	11	0
1	10	10
2	19	38
3	10	30
Total	50	78

$$\frac{78}{50} = 1.56$$

b)

Edad	Frecuencia	Punto Medio	fm
$10 \le t \le 12$	4	11	44
$12 \le t < 14$	8	13	104
$14 \le t < 16$	5	15	75
$16 \le t < 18$	3	17	51
	20		274

$$\frac{274}{20} = 13.7$$

El método del inciso b donde se toma un punto medio de datos agrupados puede llevar a ciertas imprecisiones, por eso en los exámenes dice "estime la media" no para que la adivines >:v

Mediana: El men de en medio cuando los números de un conjunto de datos se ordenan de forma creciente. Si el conjunto es par, la mediana es el promedio de los dos de en medio
Si hay muchos elementos y es difícil hallar la mediana se usa mediana $= \left(\frac{n+1}{2}\right)$ Ahora, esta formula no da la mediana, da la posición de la mediana dentro del conjunto ordenado de datos

Medidas de Dispersión

Las de posición central exploran el centro de la población
Las de dispersión indican cuánto varían los datos respecto de un valor central

- Rango Diferencia entre el valor mayor y el menor
- Cuartil

$Q_1 = \frac{1}{4}(n+1)$, $Q_3 = \frac{3}{4}(n+1)$, $Q_2 =$ Mediana :v

Estas fórmulas aplican igual que la de la mediana, no halla el valor sino la posición
Todo esto se hace con la graficadora xd

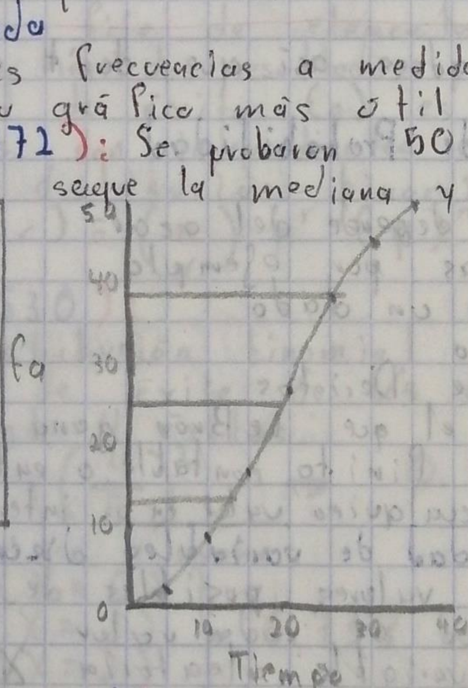
- $Q_3 - Q_1$ es lo que se conoce como rango intercuartílico

Frecuencia Acumulada

Pos se suman las frecuencias a medida que se avanza :v
Una ojiva es su gráfico más útil

Ejemplo 10 (p. 272): Se probaron 50 baterías y vió su duración
Haga una ojiva y saque la mediana y el rango intercuartil

Tiempo (h)	f	fa
$0 \leq h$ 5	3	3
$5 \leq h$ 10	5	8
$10 \leq h$ 15	8	16
$15 \leq h$ 20	10	26
$20 \leq h$ 25	12	38
$25 \leq h$ 30	7	45
$30 \leq h$ 35	5	50



$Q_3 = 25$
RIC $= 11$
$M = 19$
$Q_1 = 14$

Varianza y desviación típica

- Varianza: $\frac{\sum_{i=1}^{n}(x-\mu)^2}{n}$
- Desviación típica: $\sqrt{\text{Varianza}}$ Tiene las mismas unidades que los datos

Todo se hace con la graficadora :v

- Una dt baja muestra que los datos están muy juntos
- Una dt alta muestra lo contrario :v

Capítulo 10: Análisis Bidimensional

- Para presentar datos bidimensionales, se hace mediante un diagrama de dispersión
- La variable independiente en el eje x y la otra en y :v
- Tendencia positiva y negativa
- Correlación de -1 a 0 y de 0 a 1

No todas las correlaciones son lineales

Causalidad:

Que exista correlación entre dos conjuntos de datos no necesariamente significa que uno sea causa de otro

- **La Recta de Ajuste óptimo**

Se calcula la media de los datos de "x" y de "y" y ya xd

- La ecuación de la recta de ajuste óptimo que pasa por el punto medio

También llamada recta de regresión se usa para predecir

- **Regresión de Mínimos Cuadrados**
- La ecuación de la recta de regresión de y sobre x

Su fórmula es complicada (consulta el libro de BI p. 346)

- Cómo se mide la correlación

Así :v

Todo se hace con la Graficadora así que don't worry

Capítulo 15: Distribuciones de Probabilidad

- **Variables Aleatorias**

Es una cantidad cuyo valor depende del azar

Se representan en mayúsculas por ejemplo

X = Las veces que sale 6 en un dado

B = Bebes en un embarazo

M = Masa de un paquete de Doritos

T = Tiempo empleado en el que LeBron gana otro campeonato :v

Variables discretas: Número finito, contable o entero (como X, B)

Variables continuas: Toman cualquier valor en un intervalo (como M, T)

- **Distribuciones de probabilidad de variables discretas**

Es una lista de todos los valores posibles de la variable aleatoria y la probabilidad de cada valor

Ejemplo 2 (p. 521): La variable aleatoria X tiene la siguiente distribución de probabilidad:

x	1	2	3	4	5
P(X = x)	7c	5c	4c	3c	c

a) Halle el valor de c

$7c + 5c + 4c + 3c + c = 1 \quad 20c = 1 \quad c = 1/20$

b) Halle $P(X \geq 4)$

$\frac{3c + c}{4c} \to \frac{4}{20} \to \frac{1}{5}$

Esperanza Matemática

El valor medio o esperado de una variable aleatoria X es el valor promedio que deberíamos esperar para X cuando se realizan muchas repeticiones del experimento

El valor medio de X se representa $E(X)$

El valor esperado de una variable aleatoria X es

$$E(X) = \sum x \ P(X = x)$$

Ejemplo 3 (p. 524): Con la siguiente distribución ¿cuál es el valor esperado de X?

x	0	1	2	3
$P(X=x)$	$\frac{125}{216}$	$\frac{25}{72}$	$\frac{5}{72}$	$\frac{1}{216}$

$$E(X) = 0 \cdot \frac{125}{216} + 1 \cdot \frac{25}{72} + 2 \cdot \frac{5}{72} + 3 \cdot \frac{1}{216}$$

$$0 + \frac{25}{72} + \frac{10}{72} + \frac{3}{216} = \frac{1}{2}$$

La Distribución Binomial

Los tres elementos esenciales de una distribución binomial son:

- Hay un número fijo de elementos n
- Cada experimento tiene dos resultados posibles: éxito o fracaso
- La probabilidad de éxito (p) es constante de experimento en experimento
- Los experimentos son independientes entre sí

Para calcular la distribución binomial se usa

$$P(X = r) = \binom{n}{r} p^r (q)^{n-r} \quad \text{donde} \quad q = 1 - p$$

Ejemplo 4 (p. 530):

X sigue una distribución binomial con 6 experimentos y una probabilidad de éxito de $1/5$ en cada intento, diga la P de

a) Tener exactamente 4 éxitos

$$P = \binom{6}{4} \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^4 \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^2 \rightarrow 0.0154 \ (3\ cs)$$

c) Tener tres éxitos o menos

Calcular
$$\left.\begin{matrix} P(X=0) \\ P(X=1) \\ P(X=2) \\ P(X=3) \end{matrix}\right\} 0.738 \ (3\ cs)$$

b) Al menos un éxito

$$1 - P(X=0) \rightarrow 0.983$$

Esperanza matemática de una Distribución binomial

$$E(X) = np$$

Varianza de una distribución binomial

$$Var(X) = npq$$

donde $q = 1 - p$

La Distribución Normal

Para este usas la curva de Gauss
- La curva tiene forma de campana
- Es simétrica respecto de la media
- Media, mediana y moda coinciden

Características de una distribución normal

Se definen por su media (μ) y desviación (σ)
- Si la variable aleatoria X tiene una distribución normal con media μ y desviación σ, esto se escribe: $X \sim N(\mu, \sigma^2)$

El area bajo la curva de distribución normal

Siempre, el area total será 1

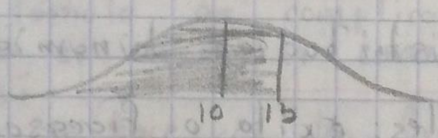
La función de probabilidad es muy complicada, pero hay otros métodos

- ¡La Distribución Normal Estándar! - p. 540

Ejemplos No incluidos en el libro

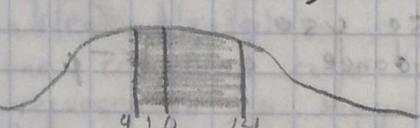
1- $X \sim N(10, 5^2)$

a) $P(X < 13)$



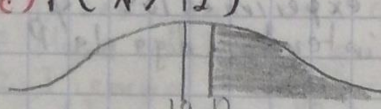
En la calcu
En ejec matemática
Option → stat → dist → NORM
Norm CD (Lower, Upper, σ, μ)
Norm CD (-99999, 13, 5, 10)
0.726

b) $P(9 < X < 14)$



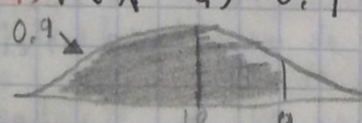
NormCD (9, 14, 5, 10)
0.3674

c) $P(X > 12)$



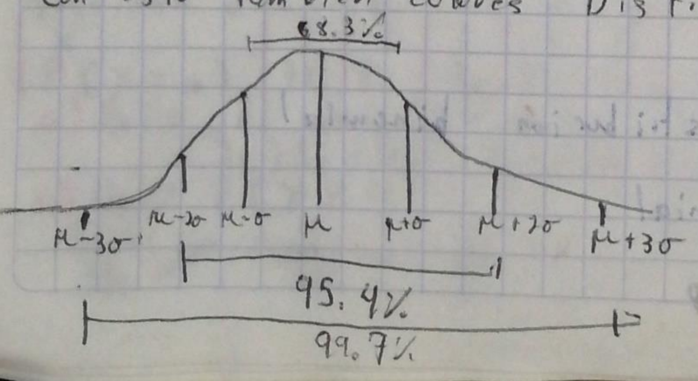
Norm CD (12, 99999, 5, 10)
0.3446

d) $P(X < a) = 0.9$



Inv Norm CD (Prob, σ, μ)
Inv Norm CD (0.9, 5, 10)
16.4

Con esto tambien cubres "Distribución Normal Inversa



De $\mu-\sigma$ a $\mu+\sigma$ → 68.3%
$\mu-2\sigma$ $\mu+2\sigma$ 95.4%
$\mu-3\sigma$ $\mu+3\sigma$ 99.7%

Unidad 6: Análisis

Aprendizajes Esperados:
- Idea informal del límite y convergencia
- Notación de límite
- Definición de derivada como $f'(x) = \lim_{h \to 0} \left(\frac{f(x+h) - f(x)}{h} \right)$
- Interpretación de la derivada como pendiente de la recta tangente
- Tangentes normales y sus ecuaciones

- Derivadas :v

- Máximos y mínimos
- Puntos de inflexión
- Comportamiento de f' f'' f''' f''''
- Optimización

- Integral indefinida como antiderivada
- Integrales :v
- Integral definida
- Area bajo la curva
- Calculo de areas entre curvas
- Volumenes de revolución alrededor de x

- Cinemática relativos a desplazamiento, velocidad y aceleración
- Distancia total recorrida

Capítulo 7: Límites y derivadas

Límites y Convergencia

- Límite
- Límite convergente
- Límite de una función
- La derivada y su definición
- Derivadas de orden superior (La segunda, o tercera o esas derivadas)
- Celeridad: Cuán rapido se mueve un objeto
- Velocidad: eso :v y su dirección
- Puntos máximos y mínimos

Capítulo 9: Integración

- Antiderivada e integral indefinido
- Area e integrales definidas
- Teorema fundamental del cálculo (Es $\to \int_a^b \leftarrow$ restar $b-a$ para el area)
- Area entre dos curvas

Volumen de Revolución

$$V = \int_a^b \pi (f(x))^2 \, dx$$

✓ Integrales definidas con movimiento lineal

Capítulo 14: Análisis con funciones trigonométricas

✓ Derivadas de las trigonométricas

✓ Derivadas trascendentes

✓ Integrales de seno y coseno