

Guía Examen Unidad 1

Logaritmo

$$2^3 = 8$$

Base → 2 Exponente → 3 Potencia → 8

$$\log_2 8 = 3$$

Base → 2 Número → 8 Logaritmo → 3

Propiedades

- $\log_6 (MN) = \log_6 (M) + \log_6 (N)$
- $\log_6 (M/N) = \log_6 (M) - \log_6 (N)$
- $\log_6 (M^x) = x \log_6 (M)$
- $\log_6 X = \log_6 Y$

Pueden anularse logaritmos de misma base

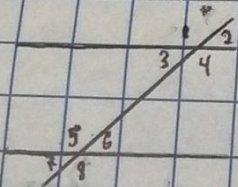
Cambiar de Base

$$\log_x Y = \frac{\log Y}{\log X}$$

Ángulos

- Agudo: $0^\circ < \theta < 90^\circ$
- Recto: $\theta = 90^\circ$
- Obtuso: $90^\circ < \theta < 180^\circ$
- Llano: $\theta = 180^\circ$
- Entrante o cóncavo: $180^\circ < \theta < 360^\circ$
- Perigonal: $\theta = 360^\circ$

Transversal



- Internos: 3, 4, 5 y 6
- Externos: 1, 2, 7 y 8
- Alternos Internos: 3 y 6, 4 y 5
- Alternos Externos: 1 y 8, 2 y 7
- Correspondientes: 1 y 5, 3 y 7, 2 y 6, 4 y 8
- Opuestos por el Vertice: 5 y 8, 6 y 7, 1 y 4, 2 y 3

• **Conversion de Angulos:**

- Min Seg \rightarrow Decimal

$$35^{\circ} 20' 10'' \rightarrow 35 + \frac{20}{60} + \frac{10}{3600} \rightarrow 35 + .33 + .0027$$

$$\underline{35.3327}$$

- Decimal \rightarrow Min Seg

$$121.76 \rightarrow (.76)(60) \rightarrow 45.6 \rightarrow (.6)(60) \rightarrow 36$$

$$\underline{121^{\circ} 45' 36''}$$

• **Operaciones con Angulos**

- Sumar:

$$\begin{array}{r} 29^{\circ} 38' 20'' \\ 18^{\circ} 47' 52'' \\ \hline 47^{\circ} 85' 74'' \end{array} \rightarrow \begin{array}{l} 74 \div 60 = 1.233 \rightarrow \\ (.233) \times 60 = 14 \\ 47^{\circ} 86' 14'' \rightarrow \\ 86 \div 60 = 1.433 \rightarrow \\ (.433) \times 60 = 26 \\ 48^{\circ} 26' 14'' \end{array}$$

- Restar:

$$\begin{array}{r} 138^{\circ} 29' 17'' \\ - 24^{\circ} 42' 18'' \\ \hline 113^{\circ} 87' 77'' \end{array} \rightarrow \begin{array}{r} 137^{\circ} 89' 17'' \\ - 24^{\circ} 42' 18'' \\ \hline 113^{\circ} 46' 59'' \end{array}$$

- Multiplicar:

$$\begin{array}{r} 73^{\circ} 16' 29'' \\ \times 2 \\ \hline 146^{\circ} 32' 58'' \end{array}$$

- Dividir:

$$\begin{array}{r} 18 \overline{) 165^{\circ} 48' 29''} \\ \underline{162} \\ 38 \\ \underline{36} \\ 28 \\ \underline{27} \\ 9 \\ \underline{9} \\ 0 \end{array}$$

• **Clasificación de Angulos**

- Positivo: Gira en contra al reloj
- Negativo: Gira a favor del reloj
- Complementaria: Suman 90°
- Suplementaria: Suman 180°

• **Grados y Radianes**

$$360^{\circ} = 2\pi \text{ radianes}$$

$$180^{\circ} = \pi \text{ radianes}$$

- Grad \rightarrow Rad:

$$270^{\circ} = x \quad 180^{\circ} = \pi \rightarrow \frac{270}{180} \pi \rightarrow \frac{3\pi}{2}$$

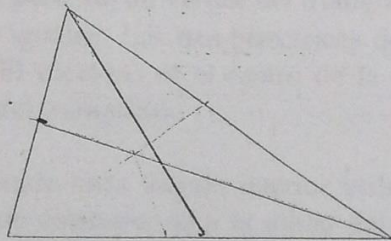
- Rad \rightarrow Grad:

$$\frac{5}{6} = x^{\circ} \quad \frac{(5/6)\pi}{\pi} (180) = \frac{150\pi}{\pi} = 150^{\circ}$$

Rectas, Segmentos y Puntos Notables en Triángulos.

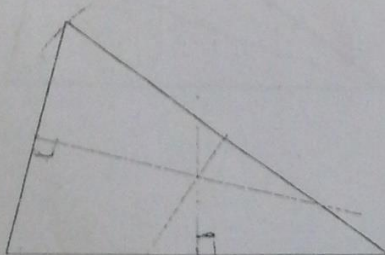
MEDIANA. Es el segmento que une a un vértice del triángulo con el punto medio de su lado opuesto. Las medianas se intersectan en un punto común llamado *baricentro*. En el baricentro se localiza el centro de gravedad del triángulo.

Para trazar la mediana se localiza en primer lugar el punto medio de un lado y se une dicho punto con el vértice opuesto utilizando la regla.



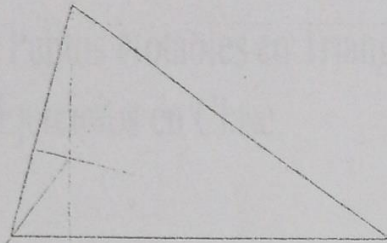
MEDIATRIZ. Es el segmento perpendicular al punto medio de cada lado del triángulo. Las tres mediatrices se cortan en un punto llamado *circuncentro*, siendo este punto el centro de la circunferencia circunscrita al triángulo (circunferencia alrededor del triángulo).

Para trazar cada mediatriz se localiza en primer lugar el punto medio de un lado y, utilizando las escuadras, se traza un segmento perpendicular a dicho punto (a 90° del lado). En el caso de la mediatriz, los vértices no se toman en cuenta. Para trazar la circunferencia circunscrita, simplemente se coloca la punta metálica del compás en el circuncentro, y se abre hasta tocar algún vértice del triángulo; notarás que al girar el compás, éste coincidirá con los otros dos vértices del triángulo.



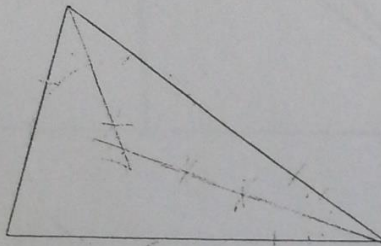
ALTURA. Es la línea que pasa por un vértice y es perpendicular al lado opuesto o a su prolongación. Las tres alturas se intersectan en un punto llamado *ortocentro*. La notación de las alturas es h_a , h_b y h_c , de acuerdo al lado al que llegan. La magnitud de alguna altura del triángulo se utiliza para calcular el área del triángulo.

Para trazar cada altura se hace coincidir una regla o escuadra con un lado; dejando inmóvil dicha regla, se recorre la otra escuadra sobre ella, hasta que coincida con el vértice opuesto al lado en cuestión. Recuerda que la altura debe formar un ángulo de 90° con el lado y además coincidir con un vértice.



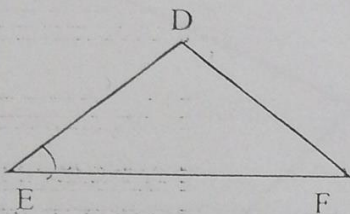
BISECTRIZ. Es el segmento que parte de un vértice del triángulo y divide al ángulo interior correspondiente, en dos ángulos iguales. Las tres bisectrices de un triángulo se intersectan en un punto llamado *incentro*. El incentro es el centro de la circunferencia inscrita en el triángulo (circunferencia dentro del triángulo).

Para trazar bisectriz, se mide cada ángulo interior utilizando el transportador y se hace una marca en la medida que corresponda a la mitad del ángulo. Finalmente, se une dicha marca con el vértice del ángulo. Para trazar la circunferencia inscrita se hace coincidir la punta metálica del compás con el incentro y se abre hasta que coincida de manera tangencial con algún lado; posteriormente se traza el círculo. Notarás que al trazar el círculo, la punta de lápiz del compás coincidirá de manera tangencial con los otros dos lados del triángulo.



Segmentos y Puntos Notables en Triángulos. Ejercicios en Clase.

1. En el siguiente triángulo, escribe la notación correcta de lo que se te pide.



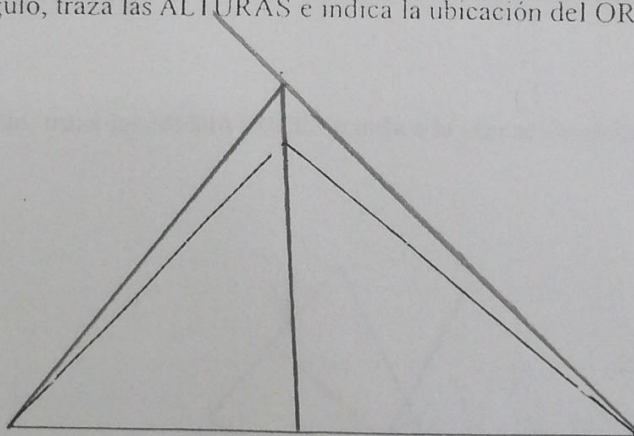
La notación del triángulo es: $\triangle DEF$

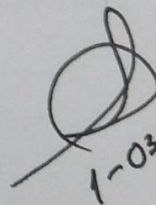
Sus lados son: $\overline{DE}, \overline{EF}, \overline{FD}$

Sus vértices son: D, E, F

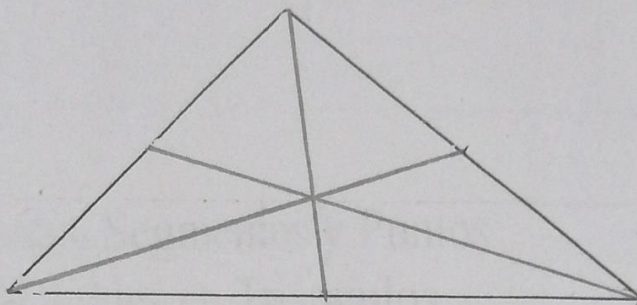
Sus ángulos son: $\angle DEF, \angle FED, \angle FDE$

2. En el siguiente triángulo, traza las ALTURAS e indica la ubicación del ORTOCENTRO.

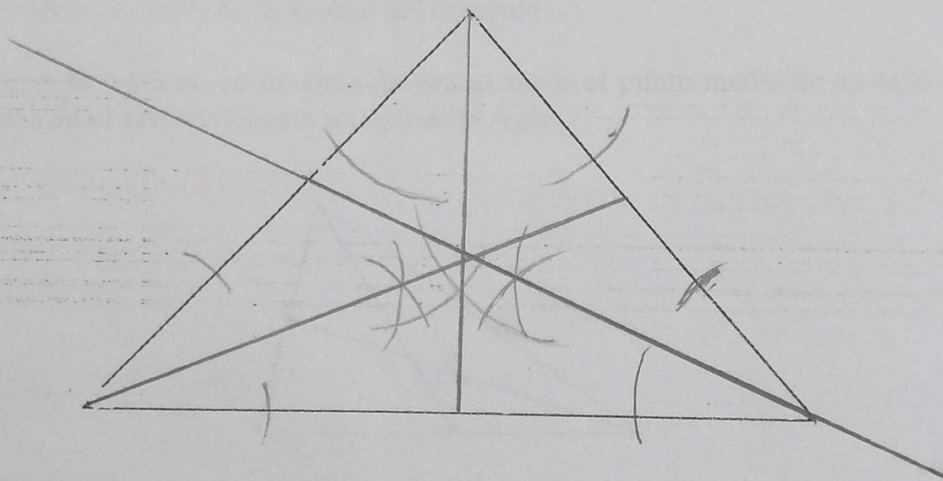



1-03-16

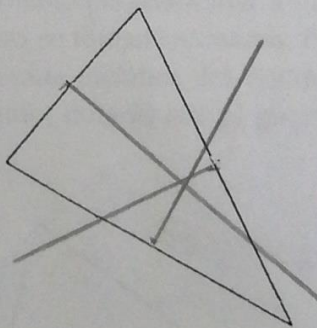
3. En el siguiente triángulo, traza las MEDIANAS e indica la ubicación del BARICENTRO.



4. En el siguiente triángulo, traza las BISECTRICES e indica la ubicación del INCENTRO.



5. En el siguiente triángulo, traza las MEDIATRICES e indica la ubicación del CIRCUNCENTRO.



$$1) \operatorname{Sen} \left(2x - \frac{\pi}{3} \right) = \frac{1}{2}$$

$$\left(2x - \frac{\pi}{3} \right) = \operatorname{Sen}^{-1} \left(\frac{1}{2} \right)$$

$$2x - \frac{\pi}{3} = 30^\circ$$

$$2x - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6}$$

$$2x = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3}$$

$$2x = \frac{\pi + 2\pi}{6}$$

$$2x = \frac{3\pi}{6}$$

$$x = \frac{3\pi}{12}$$

$$x = \frac{\pi}{4}$$

$$\boxed{30^\circ = \left(\frac{\pi}{180} \right) = \frac{30\pi}{180} = \frac{\pi}{6}}$$

$$2) \tan^2 x \operatorname{Sen} x = \operatorname{Sen} x$$

$$\tan^2 x \operatorname{Sen} x - \operatorname{Sen} x = 0$$

$$\operatorname{Sen} x (\tan^2 x - 1) = 0$$

$$\operatorname{Sen} x = 0 \quad \tan^2 x - 1 = 0$$

$$x = \operatorname{Sen}^{-1}(0) \quad (\tan x - 1)(\tan x + 1) = 0$$

$$x = 0$$

$$\tan x - 1 = 0 \quad \tan x + 1 = 0$$

$$x = \tan^{-1}(1) \quad x = \tan^{-1}(-1)$$

$$x = 45 = \frac{\pi}{4} \quad x = -45^\circ = -\frac{\pi}{4}$$

$$3) \text{Sen}^2 \theta - 2 \text{Sen} \theta + 1 = 0$$

$$x^2 - 2x + 1 = 0$$

$$(x-1)^2 = 0$$

$$x = 1$$

$$\text{Sen} \theta = 1$$

$$\theta = \text{Sen}^{-1}(1)$$

$$\theta = 90^\circ$$

$$\theta = \frac{\pi}{2}$$

$$4) 2 \text{Cos}^2 y - \text{Cos} y - 1 = 0$$

$$2x^2 - x - 1 = 0$$

$$a = 2 \quad b = -1 \quad c = -1$$

$$\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$\frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4(2)(-1)}}{2(2)}$$

$$\frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{4}$$

$$\frac{1 \pm 3}{4} = \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = -\frac{2}{4} = -\frac{1}{2} = -0.5 \end{cases}$$

$$\text{Cos} y = 1$$

$$y = \text{Cos}^{-1}(1)$$

$$y = 0$$

$$\text{Cos} y = -\frac{1}{2}$$

$$y = \text{Cos}^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$y = 120^\circ$$

$$120^\circ \times \frac{\pi}{180} = \frac{2\pi}{3}$$

$$5) \sec x - 1 = 0$$

$$\sec x = 1$$

$$\frac{1}{\cos x} = 1$$

$$\cos x = 1$$

$$x = \cos^{-1}(1)$$

$$x = 0$$

$$6) \sec \beta \cdot \csc \beta = 2 \csc \beta$$

$$2 \csc \beta - \sec \beta \csc \beta = 0$$

$$\csc \beta (2 - \sec \beta) = 0$$

$$\csc \beta = \frac{0}{1}$$

$$2 - \sec \beta = 0$$

$$\sec \beta = 2$$

$$\sec \beta = \frac{1}{\cos \beta} = 2$$

$$\cos \beta = \frac{1}{2}$$

$$\beta = \sec^{-1}(2)$$

$$\beta = \cos^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$$

NE

$$\beta = 60^\circ$$

$$\boxed{60^\circ \times \frac{\pi}{180} = \frac{\pi}{3}}$$

$$7) 2 \cos^2 \delta + \cos \delta = 0$$

$$\cos \delta (2 \cos \delta + 1) = 0$$

$$\cos \delta = 0 \quad \cos \delta = -\frac{1}{2}$$

$$\delta = \cos^{-1}(0)$$

$$\delta = 90^\circ$$

$$\delta = \frac{\pi}{2}$$

$$\cos \delta = -\frac{1}{2}$$

$$\delta = \cos^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$\delta = 120^\circ$$

$$\boxed{120^\circ \times \frac{\pi}{180} = \frac{12}{18} \pi = \frac{2\pi}{3}}$$

$$8) 2 \sin 2x = \sqrt{3}$$

$$\sin 2x = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$2x = \sin^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$2x = 60^\circ$$

$$x = 30^\circ$$

$$\boxed{30^\circ \times \frac{\pi}{180} = \frac{3}{18} \pi = \frac{\pi}{6}}$$

$$9) \sin x = \cos x$$

$$\sin x = \sqrt{1 - \sin^2 x}$$

$$\sin^2 x = 1 - \sin^2 x$$

$$2 \sin^2 x = 1$$

$$\sin^2 x = \frac{1}{2}$$

$$\sin x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$x_1 = \sin^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$x_1 = 45^\circ$$

$$x_1 = \frac{\pi}{4}$$

$$x_2 = \sin^{-1}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$x_2 = -45^\circ$$

$$x_2 = -\frac{\pi}{4}$$

$$0) \operatorname{Sen}^2 y + 2 \operatorname{Sen} y = 0$$

$$\operatorname{Sen} y (\operatorname{Sen} y + 2) = 0$$

$$\operatorname{Sen} y = 0 \quad \operatorname{Sen} y = -2$$

$$y = \operatorname{Sen}^{-1}(0) \quad \text{NE}$$

$$y = 0$$

$$11) \tan^2 y - \tan y = 0$$

$$\tan y (\tan y - 1) = 0$$

$$\tan y = 0$$

$$y = \tan^{-1}(0)$$

$$y = 0$$

$$\tan y - 1 = 0$$

$$\tan y = 1$$

$$y = \tan^{-1}(1)$$

$$y = 45^\circ$$

$$y = \frac{\pi}{4}$$

$$12) 3 \cos^2 t - \cos t - 4 = 0$$

$$3x^2 - x - 4$$

Suma -1

Producto -12 $\begin{cases} 3 \times 4 \\ 12 \times 1 \end{cases}$

$$3x^2 - 4x + 3x - 4$$

$$3x^2 + 3x - 4x - 4$$

$$3x(x+1) - 4(x+1)$$

$$(3x - 4)(x + 1)$$

$$(3 \cos t - 4)(\cos t + 1) = 0$$

$$\cos t = \frac{4}{3}$$

$t = \text{NE}$

$$\cos t = -1$$

$$t = \cos^{-1}(-1)$$

$$t = 180^\circ$$

$$t = \pi$$

Ejemplos:

Demstrar que la siguiente ecuación es una identidad,
transforma el LI en el LD.

$$1) (\sec t + \tan t)(1 - \sin t) = \cos t$$

$$\left(\frac{1}{\cos t} + \frac{\sin t}{\cos t}\right)(1 - \sin t) = \cos t$$

$$\left(\frac{1 + \sin t}{\cos t}\right)(1 - \sin t) = \cos t$$

$$\frac{1 - \sin^2 t}{\cos t} = \cos t$$

$$\frac{\cos^2 t}{\cos t} = \cos t$$

$$\cos t = \cos t$$

$$2) \frac{\tan t + \cos t}{\sin t} = \sec t + \cot t$$

$$\frac{\tan t}{\sin t} + \frac{\cos t}{\sin t} = \sec t + \cot t$$

$$\left(\frac{\frac{\sin t}{\cos t}}{\sin t}\right) + \frac{\cos t}{\sin t} = \sec t + \cot t$$

$$\frac{\cancel{\sin t}}{\cos t(\cancel{\sin t})} \rightarrow \frac{1}{\cos t} = \sec t$$

$$\frac{\cancel{\text{Sen } t}}{\text{Cos } t \cancel{\text{ Sen } t}} + \text{Cot } t = \text{Sec } t + \text{Cot } t$$

$$\text{Sec } t + \text{Cot } t = \text{Sec } t + \text{Cot } t$$

$$3) \frac{1 + \tan(x)}{1 - \tan(x)} = \frac{\text{Cot}(x) + 1}{\text{Cot}(x) - 1}$$

$$\frac{\frac{1}{1} + \frac{1}{\text{Cot } x}}{1 - \frac{1}{\text{Cot } x}} = \frac{\text{Cot } x + 1}{\text{Cot } x - 1}$$

$$\frac{\frac{\text{Cot } x + 1}{\text{Cot } x}}{\frac{\text{Cot } x - 1}{\text{Cot } x}} = \frac{\text{Cot } x + 1}{\text{Cot } x - 1}$$

$$\frac{\text{Cot } x + 1}{\text{Cot } x - 1} = \frac{\text{Cot } x + 1}{\text{Cot } x - 1}$$

$$1) \frac{(\tan x - \sec x)^2}{1} = \frac{1 - \operatorname{sen} x}{1 + \operatorname{sen} x}$$

$$\left(\frac{\operatorname{Sen} x}{\operatorname{Cos} x} - \frac{1}{\operatorname{Cos} x} \right)^2 =$$

$$\left(\frac{\operatorname{Sen} x - 1}{\operatorname{Cos} x} \right)^2 =$$

$$\frac{(\operatorname{Sen} x - 1)(\operatorname{Sen} x - 1)}{1 - \operatorname{Sen}^2 x} =$$

$$\frac{(\operatorname{Sen} x - 1)(\operatorname{Sen} x - 1)}{(1 - \operatorname{Sen} x)(1 + \operatorname{Sen} x)} =$$

$$- \frac{(1 - \operatorname{Sen} x)(\operatorname{Sen} x - 1)}{(1 - \operatorname{Sen} x)(1 + \operatorname{Sen} x)} =$$

$$\frac{1 - \operatorname{Sen} x}{1 + \operatorname{Sen} x} = \frac{1 - \operatorname{Sen} x}{1 + \operatorname{Sen} x}$$

$$\frac{1}{\csc x - \cot x} = \csc x + \cot x$$

$$\frac{1}{\csc x - \cot x} \cdot \frac{\csc x + \cot x}{\csc x + \cot x} = \csc x + \cot x$$

$$\frac{\csc x + \cot x}{\csc^2 x - \cot^2 x} = \csc x + \cot x$$

$$\frac{\csc x + \cot x}{1 + \cancel{\cot^2 x} - \cancel{\cot^2 x}} = \csc x + \cot x$$

$$\csc x + \cot x = \csc x + \cot x$$

$$6) \frac{\cot x - \tan x}{\sin x + \cos x} = \csc x - \sec x$$

$$\frac{\frac{\cos x}{\sin x} - \frac{\sin x}{\cos x}}{\sin x + \cos x} =$$

$$\frac{\frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\sin x \cos x}}{\sin x + \cos x} =$$

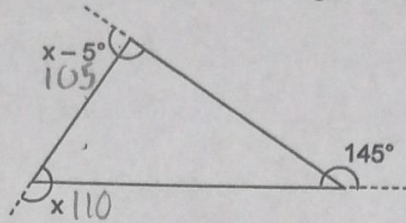
$$\frac{(\cos x - \sin x)(\sin x + \cos x)}{\sin x \cos x (\sin x + \cos x)} =$$

$$\frac{\cancel{\cos x}}{\cancel{\sin x} \cos x} - \frac{\cancel{\sin x}}{\cancel{\sin x} \cos x} =$$

$$\csc x - \sec x = \csc x - \sec x$$

Ejercicio 8

1) Calcular el valor de los ángulos exteriores del siguiente triángulo:

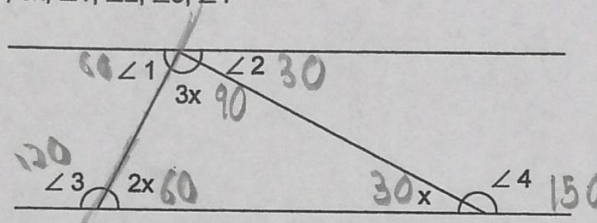


2) Uno de los ángulos agudos de un triángulo rectángulo es ocho veces el otro. ¿Cuánto vale cada ángulo? *90, 10, 80*

3) En un triángulo isósceles, un ángulo de la base es el cuádruplo del ángulo diferente. ¿Cuánto mide cada ángulo? *80 80 20*

4) Uno de los ángulos interiores de un triángulo mide 84° y la diferencia de los otros dos es de 14° . ¿Cuánto miden los ángulos restantes? *84 55 41*

5) Hallar x , $2x$, $3x$, $\angle 1$, $\angle 2$, $\angle 3$, $\angle 4$

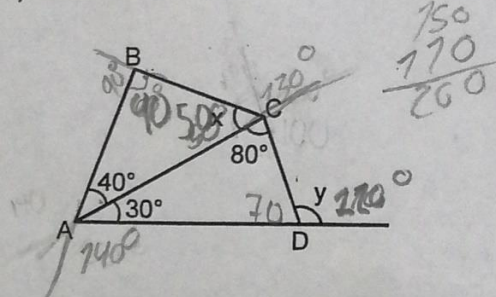


*6x = 180
x = 30*

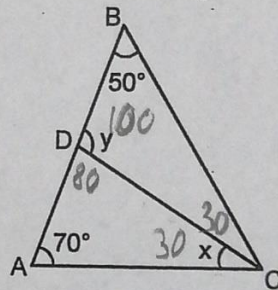
Ejercicio 9

En los siguientes triángulos hallar el valor de $\angle x$ y $\angle y$

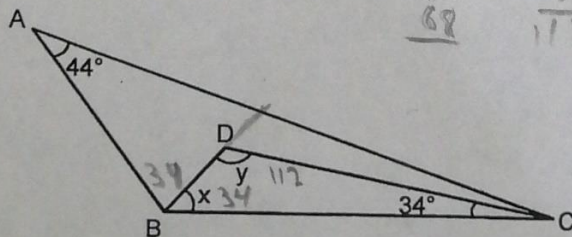
1)



2) \overline{CD} biseca al ángulo C



3) \overline{BD} biseca a $\angle B$ y \overline{CD} biseca a $\angle C$



*180
68
112*

*44
68
112*

*112
68
150*

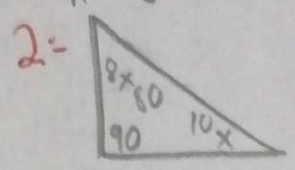
34

8
1: $145 + 2x - 5 = 360$

$2x = 220$

$x = 110$

$x - 5 = 105$

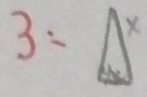


$90 + 9x = 180$

90 10 80

$9x = 90$

$x = 10$



20 80 80

$9x = 180$

$x = \frac{180}{9}$

$x = 20$

4: $84 + x + x - 14 = 180$

84 55 41

$2x - 14 = 96$

$2x = 110$

$x = 55$

5: $6x = 180$

$x = 30$

$x = 180$

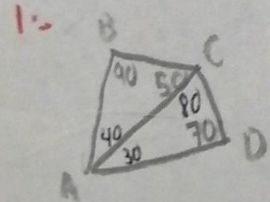
$2x = 60$

$\frac{180}{6}$

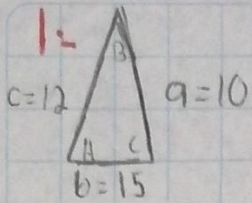
$3x = 90$

$x = 30$

9



2:



1- $\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$

$\cos A = \frac{(15)^2 + (12)^2 - (10)^2}{2(15)(12)} \rightarrow \frac{269}{360}$

$\cos A = .7472$

$A = \cos^{-1}(.7472) \rightarrow A = 41.6496$

2- $\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} \rightarrow \frac{\sin(41.6496)}{10} = \frac{\sin B}{15}$

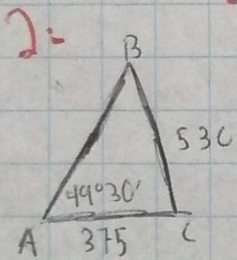
$15(\sin 41.6496) = \sin B \rightarrow .9968 = \sin B$

$\sin^{-1}.9968 = B \rightarrow B = 85.4583$

3- $\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin C}{c} \rightarrow \frac{\sin(41.6496)}{10} = \frac{\sin C}{12}$

$.7974 = \sin C \rightarrow \sin^{-1}.7974 = C \rightarrow 52.8908$

6 $180 - A - B = C$



1- $\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} \rightarrow \frac{\sin 49^{\circ}30'}{375} = \frac{\sin B}{530}$

$375.5491 = B$

2- $180 - 375.5491 - 49.5 = C \rightarrow C = 97.95$

3- $\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin C}{c} \rightarrow \frac{\sin 49^{\circ}30'}{375} = \frac{\sin 97.95}{c}$

$690.29 = c$

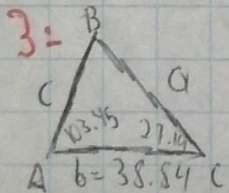
3- $B = 76.26$ 49.36

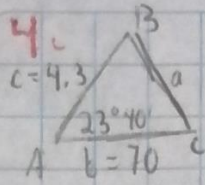
2- $\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} \rightarrow \frac{\sin 103.45}{38.84} = \frac{\sin 76.26}{49.36}$

$a = 38.88$ 49.78 49.36

3- $\frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c} \rightarrow \frac{\sin 76.26}{38.84} = \frac{\sin 27.19}{c}$

$c = 18.27$ 23.38





1. $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$
 $a^2 = (70)^2 + (4.3)^2 - 2(70)(4.3) \cos(23^\circ 40')$

$a = 66.08$

2. $\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} \rightarrow \frac{\sin 23^\circ 40'}{66.08} = \frac{\sin B}{70}$

$B = 25.1618$

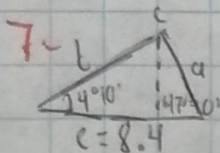
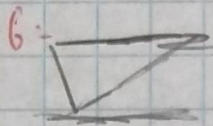
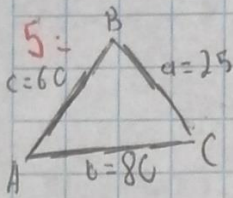
3. $C = 131.1715$

1. $\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$

$\cos A = .9765 \rightarrow A = 12.42$

2. $\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} \rightarrow \frac{\sin 12.42}{25} = \frac{\sin B}{80} \rightarrow B = 43.49$

3. $C = 124.08$



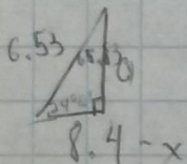
1. $C = 108^\circ 10'$

2. $\frac{\sin C}{c} = \frac{\sin A}{a} \rightarrow \frac{\sin 108^\circ 10'}{8.4} = \frac{\sin 24^\circ 10'}{a}$

$a = 3.6193$

3. $a^2 + b^2 = c^2$

$b^2 = c^2 - a^2$



$\sin 24^\circ 10' = \frac{Co}{Hip} = \frac{B}{x}$

$x = \frac{B}{\sin 24^\circ 10'}$